This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

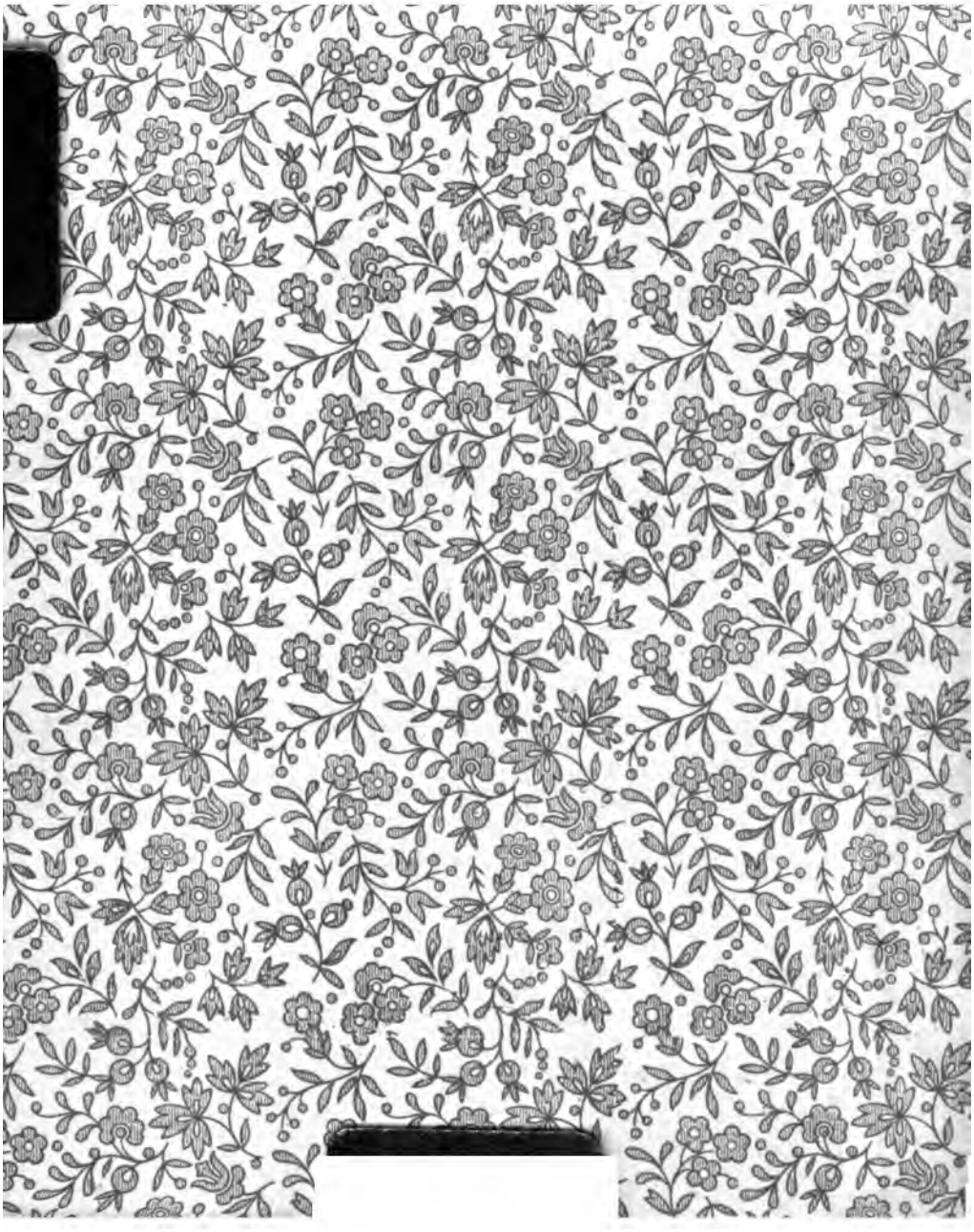
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Stanford University Libraries
3 6105 001 501 9 E
949 T20 T00



MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu Göttingen. und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XXVII. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1886.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY.
a 28322

Inhalt des siebenundzwanzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Affolter, in Zürich. Ueber Gruppen gerader Linien auf Flächen höherer Ordnung 277

Bruns, in Leipzig. Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung 234

Dingeldey, in Darmstadt. Ueber Curevn dritter Ordnung mit Doppelpunkt 272

Engel, in Leipzig. Ueber die Definitionsgleichungen der continuirlichen Transformationsgruppen 1

Hess, in München. Ueber die Herpolodie. (Aus einem Briefe an die Redaction) 465

—— Nachtrag zu der Note über die Herpolodie 568

Hilbert, in Königsberg i. Pr. Ueber die nothwendigen und hinreichenden covarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständiger Potenz 158

Hurwitz, in Königsberg i. Pr. Zusatz zu der Note „Einige allgemeine Sätze über Raumcurven“ 161

—— Ueber endliche Gruppen linearer Substitutionen, welche in der Theorie der elliptischen Transcendenten auftreten 183

Klein, in Göttingen. Ueber Configurationen, welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind 106

—— Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen 431

Krause, in Rostock. Ueber Fourier'sche Entwickelungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen 419

Königsberger, in Heidelberg. Ueber eine Eigenschaft unendlicher Reihen 397

—— Ueber das Bildungsgesetz der höheren Differentiale einer Function von Functionen 473

Markoff à St. Petersbourg. Sur les racines de certaines équations 143

—— Sur les racines de certaines équations. (Seconde note) 177

Morera, in Pavia. Ueber die Integration der vollständigen Differentiale . 403

Neumann, in Leipzig. Ueber die rollende Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Horizontalebene unter dem Einfluss der Schwere . . . 478

—— Ueber eine einfache Methode zur Begründung des Princips der virtuellen Verrückungen 502

Papperitz, in Dresden. Untersuchungen über die algebraische Transformation der hypergeometrischen Functionen 315

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft. (Bekannt gemacht im Jahresbericht der Gesellschaft, Leipzig im März 1886) 471

Seite

Pringsheim, in München. Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der elliptischen Functionen 151

Segre, à Turin. Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes 295

Staude, in Breslau. Ueber neue Focaleigenschaften der Flächen 2. Grades 253

—— Eine katoptrische Eigenschaft des Ellipsoides 412

Study, in Leipzig. Ueber die Geometrie der Kegelschnitte, insbesondere deren Charakteristikenproblem 58

—— Ueber die Cremona'sche Charakteristikenformel 102

Schur, in Leipzig. Ueber die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses 163

—— Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen 537

VonderMühll, in Leipzig. Ueber Greens Theorie der Reflexion und Brechung des Lichtes 506

—— Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen. Nach Johann Rudolf Merian 575

Voss, in München. Beiträge zur Theorie der algebraischen Flächen. Erster Theil. Zur Theorie der Steiner'schen Kernflächen 357

—— Ueber eine Eigenschaft der cubischen Formen mit beliebig vielen Veränderlichen 515

—— Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen 527

—— Ueber ein Theorem der analytischen Mechanik 569

Ueber die Definitionsgleichungen der continuirlichen Transformationsgruppen.

Von

FRIEDRICH ENGEL in Leipzig.

Einleitung.

Ein längerer Aufenthalt in Christiania bot mir Gelegenheit im persönlichen Verkehre mit Sophus Lie dessen Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen eingehend zu studiren. Das Ziel unserer gemeinsamen Arbeit war, eine zusammenhängende Darstellung dieser Theorie zu liefern, wobei mir wesentlich nur die redactionelle Seite der Aufgabe zufiel. Nebenbei beschäftigte ich mich jedoch auch mit selbstständigen Untersuchungen auf dem Gebiete der Transformationsgruppen. Meine Resultate sollen im Verlaufe dieser Abhandlung auseinandergesetzt werden.

Zur Zeit ist nun jene zusammenhängende Darstellung der Theorie noch gar nicht vollendet, geschweige denn veröffentlicht. Zum Verständnisse des Folgenden würde es somit nöthig sein, die ziemlich zahlreichen Lie'schen Abhandlungen über Transformationsgruppen zu kennen. Um diesem Uebelstande nach Möglichkeit abzuhelfen, sollen zunächst die Hauptbegriffe und Hauptsätze aus der Theorie der Transformationsgruppen in aller Kürze zusammengestellt werden, so weit sie später Anwendung finden. Auf die Beweise müssen wir natürlich bei dieser Zusammenstellung verzichten.

A. Eine Schaar von Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ bildet eine *endliche continuirliche Transformationsgruppe*, wenn zwei Transformationen der Schaar nach einander ausgeführt wieder eine Transformation der Schaar ergeben. Analytisch heisst diess, dass die obige Transformation verbunden mit

$$x_i'' = f_i(x_1' \ldots x_n';\ b_1 \ldots b_r)$$

eine Transformation von der Gestalt

$$x_i'' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ c_1 \ldots c_r)$$

ergiebt, bei welcher die c nur von den a und b abhängen:

$$c_\varkappa = \varphi_\varkappa (a_1 \ldots a_r;\ b_1 \ldots b_r).$$

Die Grössen $a_1 \ldots a_r$ heissen die *Parameter* der Gruppe. Es ist klar, dass es auf die Gruppe als solche keinen Einfluss hat, wenn man irgend r unabhängige Functionen der $a_\varkappa$ als neue Parameter einführt.

Wir werden uns hier auf solche Gruppen beschränken, welche die identische Transformation $x_i' = x_i$ enthalten und von infinitesimalen Transformationen erzeugt sind.

Unter einer *infinitesimalen Transformation* versteht Lie eine Transformation von der Gestalt:

$$x_i' = x_i + \xi_i (x_1 \ldots x_n)\, \delta t \quad (i = 1 \ldots n),$$

wobei δt eine unendlich kleine Grösse bezeichnet. Für diese infinitesimale Transformation führt er nun das Symbol

$$\sum_1^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = X(f)$$

ein, aus welchem ihre Transformationsgleichungen augenblicklich hergeleitet werden können. Bedeutet nämlich f eine beliebige Function von $x_1 \ldots x_n$, so besteht die Gleichung:

$$f(x_1' \ldots x_n') = f(x_1 \ldots x_n) + X(f)\, \delta t,$$

aus welcher $x_i' = x_i + \xi_i \delta t$ ohne Weiteres folgt. Es ist auch klar und jedenfalls leicht zu verificiren, *dass das Symbol $X(f)$ von der Wahl der Variabeln unabhängig ist.*

Denkt man sich die infinitesimale Transformation $X(f)$ unendlich oft wiederholt, so erhält man ∞^1 endliche Transformationen, nämlich die folgenden:

$$x_i' = x_i + t\xi_i + \frac{t^2}{1.2} \sum_1^n \xi_\varkappa \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

oder kürzer:

$$x_i' = x_i + t\, X(x_i) + \frac{t^2}{1.2} XX(x_i) + \cdots.$$

Wie sich leicht zeigen lässt, bilden diese ∞^1 Transformationen eine endliche, continuirliche Transformationsgruppe mit dem einen Parameter t. Lie nennt diese Gruppe *eingliedrig* und sagt, dass sie von der infinitesimalen Transformation $X(f)$ *erzeugt wird.*

Mehrere, etwa r infinitesimale Transformationen

$$X_\varkappa f = \sum_1^n \xi_{i\varkappa} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (\varkappa = 1 \ldots r)$$

heissen von einander *unabhängig*, wenn es nicht möglich ist r Con-

stanten $c_1 \ldots c_r$ so zu wählen, dass der Ausdruck $c_1 X_1 f + \cdots + c_r X_r f$ identisch verschwindet.

Sind $X_1 f \ldots X_r f$ von einander unabhängig, so lässt sich zeigen, dass der Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen

$$\sum_1^r{}_x c_x X_x f$$

eine Schaar von eingliedrigen Gruppen

$$x_i' = x_i + t \sum_1^r{}_x c_x X_x(x_i) + \cdots \tag{1}$$

erzeugt, welche ∞^r verschiedene Transformationen enthält. Lie hat weiter nachgewiesen, dass *diese Schaar von Transformationen immer dann, aber auch nur dann eine endliche continuirliche Transformationsgruppe bildet, wenn zwischen den Xf Beziehungen von der Form*

$$X_i(X_x(f)) - X_x(X_i(f)) \equiv \sum_1^n{}_j \{X_i(\xi_{jx}) - X_x(\xi_{ji})\} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_1^r{}_s c_{ixs} X_s f$$

bestehen, wobei die c_{ixs} numerische Constanten bedeuten. Ist diese Bedingung erfüllt, so stellt (1) die endlichen Gleichungen einer continuirlichen Transformationsgruppe mit r Parametern dar oder kürzer einer *r-gliedrigen* Gruppe.

Die Schaar der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen, welche einer solchen r-gliedrigen Gruppe angehören, ist offenbar dadurch charakterisirt, dass sie gleichzeitig mit $X_i f$ und $X_x f$ immer auch alle infinitesimalen Transformationen von der Form

$$c_i X_i f + c_x X_x f, \quad X_i(X_x(f)) - X_x(X_i(f)) = (X_i X_x)$$

enthält.

Als Beispiel diene die allgemeine projectivische Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit. Ihre endlichen Gleichungen sind

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3},$$

die infinitesimalen Transformationen aber:

$$X_1 f = \frac{df}{dx}, \quad X_2 f = x \frac{df}{dx}, \quad X_3 f = x^2 \frac{df}{dx}$$

und zwar bestehen die Relationen:

$$(X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f.$$

B. Es sei

$$Xf = \sum_1^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = c_1 X_1 f + \cdots + c_r X_r f$$

die allgemeine infinitesimale Transformation einer r-gliedrigen Gruppe.

Differentiirt man die Gleichungen

$$\xi_i = \sum_1^r c_\varkappa \xi_{i\varkappa} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

hinreichend oft nach $x_1 \ldots x_n$, so kann man $c_1 \ldots c_r$ eliminiren und enthält für $x_1 \ldots x_n$ eine Reihe von linearen homogenen Differentialgleichungen

$$(2) \qquad \sum_1^n A_{\lambda i}(x_1 \ldots x_n)\xi_i + \sum_1^n \sum_1^n B_{\lambda i \varkappa}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} + \cdots = 0$$
$$(\lambda = 1,2 \ldots).$$

Solcher Gleichungen kann man nun so viele aufstellen, dass sie $\xi_1 \ldots \xi_n$ und damit die ganze Gruppe vollständig definiren. Lie nennt sie daher die *Definitionsgleichungen* der betreffenden endlichen continuirlichen Gruppe. Mit Berücksichtigung des unter A. gesagten können wir jetzt den Satz aussprechen:

„Ein System linearer homogener Differentialgleichungen von der Form (2) definirt eine endliche continuirliche Transformationsgruppe, wenn seine allgemeinsten Lösungen $\xi_1 \ldots \xi_n$ nur von willkürlichen Constanten abhängen und wenn sich aus irgend zwei Lösungensystemen $\xi_{11} \ldots \xi_{n1}$, $\xi_{12} \ldots \xi_{n2}$ immer ein drittes von der Form

$$(3) \qquad \sum_1^n \left(\xi_{i1} \frac{\partial \xi_{j2}}{\partial x_i} - \xi_{i2} \frac{\partial \xi_{j1}}{\partial x_i} \right) \qquad (j = 1 \ldots n)$$

zusammensetzen lässt."

C. Den *endlichen* continuirlichen Transformationsgruppen mit ihren *willkürlichen Parametern* stehen die *unendlichen* mit *willkürlichen Parametern und willkürlichen Functionen* gegenüber. Wir betrachten natürlich nur solche unendliche Gruppen, deren infinitesimale Transformationen sich durch lineare homogene Differentialgleichungen von der Form (2) definiren lassen. Diese Differentialgleichungen werden dann alle in dem letzten Satze angegebenen Eigenschaften besitzen, nur dass ihr allgemeinstes Lösungensystem nicht bloss von willkürlichen Constanten abhängt, sondern auch von willkürlichen Functionen.

Hier tritt nun eine Schwierigkeit hervor. Die Schaar von infinitesimalen Transformationen, welche durch jene Differentialgleichungen definirt wird, erzeugt eine Schaar von eingliedrigen Gruppen; es ist

aber bisher noch nicht gelungen, den Nachweis zu führen, dass diese Schaar von eingliedrigen Gruppen eine Transformationsgruppe bildet und dass sie mit der ursprünglichen unendlichen Gruppe identisch ist.

Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, werden wir uns wenigstens bei den unendlichen Gruppen auf die infinitesimalen Transformationen beschränken und die endlichen Transformationen fast ganz aus dem Spiele lassen. In der Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen sind ja sowieso die infinitesimalen Transformationen weit wichtiger als die endlichen.

Zu dem Ende führen wir den Ausdruck: *Gruppe von infinitesimalen Transformationen* ein. Wir verstehen darunter eine Schaar von infinitesimalen Transformationen, welche die Eigenschaft hat, dass sie mit $X_1 f$ und $X_2 f$ zugleich auch noch die Transformationen $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$ und $(X_1 X_2)$ enthält, und welche ausserdem sich durch Differentialgleichungen definiren lässt. Es ist selbstverständlich, dass diese Differentialgleichungen linear und homogen sind und dass sich aus zwei Lösungssystemen ξ_{i1} und ξ_{i2} derselben stets ein drittes von der Form (3) ableiten lässt. Wir nennen diese Differentialgleichungen die *Definitionsgleichungen unserer Gruppe von infinitesimalen Transformationen.**)

Enthält das allgemeinste Lösungensystem der besprochenen Differentialgleichungen nur *willkürliche Constanten*, so haben wir eine *endliche* Gruppe von infinitesimalen Transformationen vor uns und zwar erzeugen diese Transformationen nach dem Obigen eine endliche continuirliche Transformationsgruppe. Enthalten dagegen die allgemeinsten Lösungen jener Differentialgleichungen auch *willkürliche Functionen*, so haben wir es mit einer *unendlichen* Gruppe von infinitesimalen Transformationen zu thun. Ob dieselbe jedoch eine unendliche Transformationsgruppe erzeugt oder nicht, das lassen wir dahingestellt.

D. Von grosser Wichtigkeit ist der Begriff der *Aehnlichkeit.*

Zwei r-gliedrige Transformationsgruppen heissen *ähnlich*, wenn die eine bei Einführung geeigneter Variabeln mit der andern identisch wird.

Es seien also z. B.

$$x' = \varphi(x; a_1, a_2); \qquad x' = \psi(x; b_1, b_2)$$

zwei zweigliedrige Gruppen der einfachen Mannigfaltigkeit und es

---

*) Die Einführung dieser Bezeichnungen geschieht im Einverständniss mit Lie. Derselbe hat zwar den Ausdruck „Gruppe von infinitesimalen Transformationen" noch nicht benutzt, wohl aber den Begriff, von welchem er namentlich in seiner Abhandlung „Ueber unendliche continuirliche Gruppen" (Christiania Videnskabsselskabs Forh. 1882 Nr. 12) Gebrauch macht.

nehme die zweite bei Einführung der neuen Variablen $x_1 = \omega(x')$ und entsprechend $x_1' = \omega(x')$ die Form an:

$$x_1' = \varphi(x_1; a_1(b_1\, b_2),\ a_2(b_1\, b_2)).$$

Werden jetzt noch a_1 und a_2 als neue Parameter eingeführt, so wird die zweite Gruppe mit der ersten identisch; also sind beide mit einander ähnlich.

Zwei r-gliedrige Transformationsgruppen sind offenbar auch dann mit einander ähnlich, wenn die infinitesimalen Transformationen der einen bei geeigneter Variabelnwahl in die infinitesimalen Transformationen der andern übergehen. Hiernach ist auch klar, was unter der Aehnlichkeit zweier endlicher oder unendlicher Gruppen von infinitesimalen Transformationen zu verstehen ist.

E. Wenn ein analytischer Ausdruck bei einer Transformation sich nicht ändert, wenn er also invariant bleibt, so sagt Lie, dass der Ausdruck die betreffende Transformation *gestattet* oder *zulässt*.

Eine Function $\varphi(x_1 \ldots x_n)$ *gestattet die infinitesimale Transformation* Xf, *wenn der Ausdruck* $X(\varphi)$ *identisch verschwindet* oder, was dasselbe ist, wenn φ eine Lösung der Gleichung $Xf = 0$ ist. Zugleich mit der infinitesimalen Transformation Xf gestattet dann φ auch alle endlichen Transformationen

$$x_i' = x_i + t\,X(x_i) + \frac{t^2}{1\cdot 2}\,X\,X(x_i) + \cdots$$

der zugehörigen eingliedrigen Gruppe.

Giebt es eine Function $\varphi(x_1 \ldots x_n)$, welche r unabhängige *infinitesimale* Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ einer r-gliedrigen Gruppe zulässt, so gestattet dieselbe auch alle *endlichen* Transformationen der Gruppe. Bei unserer Gruppe bleibt daher jede einzelne der ∞^1 Mannigfaltigkeiten $\varphi = \text{const.}$ invariant d. h. jeder Punkt des Raumes $(x_1 \ldots x_n)$ bewegt sich auf einer solchen Mannigfaltigkeit. Man nennt in diesem Falle die Gruppe *intransitiv*. Dagegen heisst unsere Gruppe *transitiv*, wenn sie jeden Punkt des Raumes $(x_1 \ldots x_n)$ in jeden andern überführt, analytisch ausgedrückt, wenn die Gleichungen

$$X_1 f = 0 \ldots X_r f = 0$$

keine gemeinsame Lösung haben.

Eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen, mag sie nun endlich oder unendlich sein, heisst *transitiv*, wenn es keine Function giebt, welche die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe gestattet, im entgegengesetzten Falle heisst sie *intransitiv*.

Ein Gleichungensystem

$$\varphi_i(x_1 \ldots x_n) = 0 \qquad (i = 1 \ldots m)$$

oder, geometrisch ausgedrückt, eine Mannigfaltigkeit des Raumes

$(x_1 \ldots x_n)$ *gestattet die infinitesimale Transformation* Xf, *sobald alle Ausdrücke* $X(\varphi_i)$ *vermöge des Gleichungensystems verschwinden.*

Gestattet eine Function oder ein Gleichungensystem die zwei infinitesimalen Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$, so gestatten sie zugleich auch die Transformationen $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$ und $(X_1 X_2)$. *Hat man daher eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen, so bildet der Inbegriff aller in ihr enthaltenen Transformationen, welche eine bestimmte Function oder ein bestimmtes Gleichungensystem invariant lassen, selbst wieder eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen.*

Den Begriff der Primitivität, so wichtig er auch ist, übergehen wir hier, weil er im Folgenden keine Anwendung findet.

F. Jetzt wollen wir noch die Begriffe der *Zusammensetzung* und des *Isomorphismus* und was damit zusammenhängt kurz besprechen. Diess sind lauter Begriffe, welche bloss für die endlichen Transformationsgruppen eine Bedeutung haben (wenigstens vorläufig).

Es seien $X_1 f \ldots X_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Transformationsgruppe und demnach

$$(X_i X_k) = \sum_1^r c_{ikz} X_z f.$$

Besitzen irgend $m < r$ unabhängige infinitesimale Transformationen

$$Y_j f = \sum_1^r l_{kj} X_k f \qquad (j = 1 \ldots m)$$

unserer Gruppe die Eigenschaft, dass jedes $(Y_i Y_j)$ sich linear mit constanten Coefficienten durch $Y_1 f \ldots Y_m f$ allein ausdrückt:

$$(Y_i Y_j) = \sum_1^m g_{ijz} Y_z f,$$

so erzeugen die infinitesimalen Transformationen $Y_1 f \ldots Y_m f$ eine m-gliedrige *Untergruppe* der ersten Gruppe. Insbesondere heisst diese Untergruppe *invariant* (ausgezeichnet), wenn auch jedes $(X_i Y_j)$ sich durch die $Y_j f$ allein ausdrückt:

$$(X_i Y_j) = \sum_1^m h_{ijz} Y_z f,$$

wobei unter den h_{ijz} Constanten zu verstehen sind.

Kennt man die infinitesimalen Transformationen $X_k f$ und somit auch die Constanten c_{ikz}, so kann man alle Untergruppen der Gruppe $X_k f$ durch algebraische Operationen finden. Namentlich gestaltet sich die Bestimmung der *invarianten* Untergruppen sehr einfach; man braucht nur zu beachten, dass in einer invarianten Untergruppe, in

welcher die infinitesimale Transformation Yf vorkommt, auch alle Transformationen von der Form $(X_\varkappa Y)$ enthalten sein müssen.

Wir nennen das System der Constanten $c_{i\varkappa s}$ nach Lie einfach die *Zusammensetzung* der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$.

Die Jacobi'sche Identität

$$((X_i X_j) X_\varkappa) + ((X_j X_\varkappa) X_i) + ((X_\varkappa X_i) X_j) = 0,$$

welche zwischen drei beliebigen infinitesimalen Transformationen $X_i f$, $X_\varkappa f$, $X_j f$ besteht, liefert folgende Relationen zwischen den $c_{i\varkappa s}$:

$$\sum_1^r{}_s (c_{ijs}\, c_{s\varkappa\nu} + c_{j\varkappa s}\, c_{si\nu} + c_{\varkappa i s}\, c_{sj\nu}) = 0$$

$$(i, j, \varkappa, \nu = 1 \ldots r).$$

Soll daher ein System der $c_{i\varkappa s}$ die Zusammensetzung einer Gruppe darstellen, so muss es nothwendig die eben geschriebenen Relationen befriedigen. Sind umgekehrt diese Gleichungen erfüllt, so giebt es, wie Lie zeigt, auch stets r-gliedrige Gruppen, welche die betreffende Zusammensetzung haben. Lie giebt überdiess Methoden, um alle transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung aufzustellen.

Hat man zwei r-gliedrige Gruppen $X_1 f \ldots X_r f$ und $Y_1 f \ldots Y_r f$, zu welchen ein und dasselbe System der $c_{i\varkappa s}$ gehört:

$$(4) \qquad (X_i X_\varkappa) = \sum_1^r{}_s c_{i\varkappa s} X_s f, \quad (Y_i Y_\varkappa) = \sum_1^r{}_s c_{i\varkappa s} Y_s f,$$

so nennt man die beiden Gruppen *gleichzusammengesetzt* oder *holoedrisch isomorph.*

Andererseits sei zwar die Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ r-gliedrig, aber die Gruppe $Y_1 f \ldots Y_r f$ bloss m-gliedrig, so dass also unter den $Y_\varkappa f$ nur m von einander unabhängige Transformationen vorhanden sind. Bestehen dann die Gleichungen (4), so sagt man, dass die Gruppe $Y_\varkappa f$ mit der Gruppe $X_\varkappa f$ *meroedrisch isomorph* ist. Unter den eben gemachten Voraussetzungen sind $Y_1 f \ldots Y_r f$ durch $r - m$ von einander unabhängige Relationen von der Form

$$(5) \qquad \sum_1^r{}_\varkappa g_{\varkappa\mu}\, Y_\varkappa f = 0 \qquad (\mu = 1 \ldots r - m)$$

verknüpft. Der Ausdruck

$$\left(Y_i, \sum_1^r{}_\varkappa g_{\varkappa\mu}\, Y_\varkappa f\right) = \sum_1^r{}_s \sum_1^r{}_\varkappa g_{\varkappa\mu}\, c_{i\varkappa s}\, Y_s f$$

muss dann vermöge der Gleichungen (5) verschwinden d. h. es bestehen Gleichungen von der Form:

$$\left(Y_i, \sum_1^r{}^{\varkappa} g_{\varkappa\mu}\, Y_\varkappa f\right) = \sum_1^{r-m}{}^{\nu} h_{i\mu\nu} \sum_1^r{}^{\varkappa} g_{\varkappa\nu}\, Y_\varkappa f$$

und zwar müssen dieselben eine directe Folge der Gleichungen (4) sein. Daraus ergiebt sich, dass die infinitesimalen Transformationen

$$\sum_1^r{}^{\varkappa} g_{\varkappa\mu}\, X_\varkappa f \qquad (\mu = 1 \ldots r - m),$$

welche offenbar von einander unabhängig sind, eine $(r-m)$gliedrige invariante Untergruppe der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugen.

Aus dem Gesagten erkennt man leicht, *wie man die Zusammensetzungen aller Gruppen findet, welche mit einer vorgelegten r-gliedrigen Gruppe* $X_1 f \ldots X_r f$ *meroedrisch isomorph sind.*

Es seien

$$\sum_1^r{}^{\varkappa} g_{\varkappa\mu}\, X_\varkappa f \qquad (\mu = 1 \ldots r - m)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen einer $(r-m)$gliedrigen invarianten Untergruppe der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$. Zwischen den infinitesimalen Transformationen $Y_1 f \ldots Y_r f$ setze man die Relationen

$$\sum_1^r{}^{\varkappa} g_{\varkappa\mu}\, Y_\varkappa f = 0 \qquad (\mu = 1 \ldots r - m)$$

fest, welche etwa $Y_{m+1} f \ldots Y_r f$ durch die übrigen $Y_\varkappa f$ auszudrücken gestatten mögen. Setzt man die so gefundenen Werthe von $Y_{m+1} f \ldots Y_r f$ in die Relationen

$$(Y_i\, Y_\varkappa) = \sum_1^r{}^{s} c_{i\varkappa s}\, Y_s f \quad .$$

ein, so erhält man alle $(Y_i\, Y_\varkappa)$ durch $Y_1 f \ldots Y_m f$ ausgedrückt und bekommt somit die Zusammensetzung einer m-gliedrigen Gruppe $Y_1 f \ldots Y_m f$, welche offenbar mit der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ meroedrisch isomorph ist.

Auf diese Weise hat man nach und nach alle invarianten Untergruppen der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ durchzugehen.

Enthält eine Transformationsgruppe gar keine invarianten Untergruppen, so heisst sie *einfach*. Eine mit ihr meroedrisch isomorphe Gruppe kann dann keine infinitesimale Transformation enthalten d. h. sie besteht nur aus der identischen Transformation $x_i' = x_i$.

Nach diesen Vorbemerkungen, welche dazu bestimmt waren in die Theorie der Transformationsgruppen überhaupt einzuführen, schalten

wir noch einige allgemeine Bemerkungen über die vorliegende Abhandlung ein.

Es soll in dieser Abhandlung eine neue Methode entwickelt werden, vermittelst deren Definitionsgleichungen von Gruppen von infinitesimalen Transformationen bestimmt werden können.

Lie hat an mehreren Stellen der erwähnten Abhandlung „Ueber unendliche Gruppen" direct einige Definitionsgleichungen in der Ebene berechnet. Er verlangt einfach, dass mit ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 gleichzeitig auch

$$\xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial y} - \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \eta_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y},$$

$$\xi_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \xi_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial y}$$

ein Lösungensystem der betreffenden Differentialgleichungen ist, und erhält auf diese Weise Relationen, aus welchen sich die Coefficienten der Differentialgleichungen ermitteln lassen. Allerdings führt dieses Verfahren auf recht weitläufige Rechnungen (vgl. Ueber unendliche Gruppen § 6).

Die Methode, welche hier auseinandergesetzt werden soll, ist allgemeiner. Schon längst vermuthete ich, dass sie alle Definitionsgleichungen von Gruppen liefert, da überraschte mich Lie eines Tages mit einem Beweise dieser meiner Vermuthung. Leider muss ich auf eine Reproduction dieses Beweises verzichten, weil dieselbe zuviel Raum in Anspruch nehmen würde.

Natürlich werden wir fast nur solche Gruppen finden, welche schon aus den Lie'schen Untersuchungen bekannt sind. Das Interesse der nachfolgenden Entwickelungen kann daher in der Hauptsache nur in der Eigenthümlichkeit der Methode und ausserdem noch in der Form der Resultate liegen.

Lie betrachtet nämlich alle ähnlichen Gruppen als gleichberechtigt. Es kommt ihm nur darauf an, Normalformen für die verschiedenen Gruppentypen aufzustellen, soweit dieselben nicht durch Variabelnänderung in einander übergehen können. Er sucht immer den Repräsentanten jedes solchen Typus; mit dem Repräsentanten ist ja die ganze Schaar der ähnlichen, also aller Gruppen, welche dem Typus angehören, implicite gegeben.

Aber es kann seine Vortheile haben auch einmal einen andern Gesichtspunkt in den Vordergrund treten zu lassen. Wir werden daher keine Normalformen suchen, sondern auch die Gruppen, welche mit den Lie'schen Normalformen ähnlich sind, sämmtlich explicite angeben. Wir wünschen nicht die einfachsten Formen der Definitionsgleichungen zu kennen, wir verlangen vielmehr für jede Schaar von gleichberechtigten Gruppen die allgemeine Form der Definitionsgleichungen, aus welcher

dann jede einzelne Gruppe der Schaar durch Specialisirung erhalten wird.

Soviel über die Form, in welcher sich uns die Gruppen darstellen werden. Nebenbei werden wir aber noch einige Resultate für die Integration von Definitionsgleichungen gewinnen. Unter Umständen lässt sich nämlich a priori die Existenz gewisser Integrale erkennen; zur Aufstellung derselben werden wir Mittel angeben. Damit gelangen wir mehrfach zu denselben Integrationsvereinfachungen, welche Lie auf anderem Wege erreicht hat.

Aus leicht erkennbaren Gründen beginnen wir mit dem einfachsten Fall, wir betrachten zuerst die einfache Mannigfaltigkeit. Die Entwickelung der Theorie bietet hier die wenigsten Schwierigkeiten und lässt sich auch zu einem gewissen Abschluss bringen.

§ 1.

Allgemeines über die einfache Mannigfaltigkeit.

1. Der Gedankengang, welcher mich ursprünglich zu den nachstehenden Entwickelungen geführt hat, war kurz der folgende.

Denken wir uns irgend eine Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit vorgelegt und ausserdem alle mit ihr ähnlichen Gruppen aufgestellt.

Die ursprüngliche Gruppe wird durch eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^n\xi}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}\xi}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{d\xi}{dx} + a_n(x)\xi = 0$$

definirt. Ebenso wird sich auch der Inbegriff aller Gruppen, welche mit der ursprünglichen ähnlich sind, durch eine Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^n\xi}{dx^n} + B_1\frac{d^{n-1}\xi}{dx^{n-1}} + \cdots + B_{n-1}\frac{d\xi}{dx} + B_n\xi = 0$$

definiren lassen, nur dass in derselben die Coefficienten B von einer willkürlichen Function etwa $\alpha(x)$ und von deren Differentialquotienten abhängen.

Es liegt auf der Hand, dass die betreffende Schaar von Gruppen bei Einführung einer neuen Variabeln $x_1 = F(x)$ invariant bleibt; jede Gruppe der Schaar geht ja dabei in eine mit ihr ähnliche über und diese gehört ebenfalls der Schaar an. Da nun der Werth, welchen die Function $\alpha(x)$ besitzt, in (1) die einzelne Gruppe bestimmt und andererseits die einzelnen Gruppen bei Einführung der neuen Variablen x_1 unter einander vertauscht werden, muss $\alpha(x)$ in eine neue Function $\alpha_1(x_1)$ übergehen. Zwischen α, α_1, F und ihren Differentialquotienten

müssen also analytische Beziehungen bestehen, vermöge deren sich α_1 aus α und F bestimmen lässt.

Insbesondere kann der Fall eintreten, dass α_1 sich analytisch durch α und durch F mit seinen Differentialquotienten etwa bis zur n^{ten} Ordnung ausdrückt:

$$\alpha_1 = \chi(\alpha, F, F' \ldots F^{(n)});$$

wir wollen ausserdem noch annehmen, dass die Function χ keine willkürlichen Constanten enthält. Unter dieser Voraussetzung ist α_1 vollständig bestimmt, wenn α und F gegeben sind und ebenso ist umgekehrt α vollständig bestimmt, wenn man α_1 und F kennt.

Die Gleichungen

$$x_1 = F(x), \quad \alpha_1 = \chi(\alpha, F, F' \ldots F^{(n)}) \tag{2}$$

bilden nun eine *unendliche Transformationsgruppe*. Hat man nämlich:

$$x_2 = \Phi(x_1), \quad \alpha_2 = \chi(\alpha_1, \Phi, \Phi' \ldots \Phi^{(n)}),$$

so bekommt man $x_2 = \Phi(F(x))$ und also:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \chi(\alpha, \Phi(F), \Phi'(F)F' \ldots) \\ &= \chi(\alpha_1, \Phi, \Phi' \ldots \Phi^{(n)}), \end{aligned}$$

worin eben liegt, dass die Gleichungen (2) eine unendliche Gruppe darstellen.

Ebenso bestimmen auch die Gleichungen

$$x_1 = F(x), \quad \xi_1 = \xi F'(x), \quad \alpha_1 = \chi(\alpha, F, F' \ldots F^{(n)}) \tag{3}$$

eine unendliche Gruppe, bei welcher offenbar die Differentialgleichung (1) der oben besprochenen Schaar von Gruppen invariant bleibt.

Die identische Transformation der unendlichen Gruppe (2) erhalten wir für $x_1 = x$, denn dann bleibt ja jede einzelne Gruppe der Schaar (1) invariant; für $x_1 = x$ muss also auch $\alpha_1 = \alpha$ werden. Weiter ergeben sich die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (2), wenn man $x_1 = x + \varphi(x)\delta t$ setzt, unter δt eine infinitesimale Grösse verstanden. Dabei wird etwa:

$$\alpha_1 = \alpha + \Omega(\alpha, \varphi, \varphi' \ldots \varphi^{(n)})\delta t,$$

wo die Glieder zweiter und höherer Ordnung weggelassen sind. Die Function Ω verschwindet offenbar, wenn die willkürliche Function φ gleich Null gesetzt wird. Mit Anwendung der Lie'schen Bezeichnungsweise lassen sich nun die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (2) folgendermassen schreiben:

$$\varphi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \Omega(\alpha, \varphi, \varphi' \ldots \varphi^{(n)})\frac{\partial f}{\partial \alpha}. \tag{4}$$

Ist $x_1 = x + \varphi\,\delta t$, so wird

$$\xi_1 = \xi + \xi\varphi'\delta t;$$

die infinitesimalen Transformationen der unendlichen Gruppe (3) werden somit:

$$(5) \qquad \varphi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \xi\varphi'\frac{\partial f}{\partial \xi} + \Omega(\alpha, \varphi, \varphi' \ldots \varphi^{(n)})\frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Die Ausdrücke (4) und (5) stellen natürlich zwei unendliche Gruppen von infinitesimalen Transformationen dar und zwar lässt die zweite dieser beiden Gruppen die Differentialgleichung (1) invariant.

Was die Form der Function Ω anbetrifft, so ist leicht zu sehen, dass Ω in den $\varphi, \varphi' \ldots \varphi^{(n)}$ linear und homogen sein muss. Ist nämlich

$$\psi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \Omega(\alpha, \psi, \psi' \ldots \psi^{(n)})\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

eine zweite infinitesimale Transformation der Gruppe (4), so gehört auch jede Transformation von der Gestalt

$$(a\varphi + b\psi)\frac{\partial f}{\partial x} + (a\,\Omega(\alpha, \varphi \ldots) + b\,\Omega(\alpha, \psi \ldots))\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

der Gruppe an. Diese Transformation muss daher die Form

$$(a\varphi + b\psi)\frac{\partial f}{\partial x} + \Omega(\alpha, a\varphi + b\psi \ldots a\varphi^{(n)} + b\psi^{(n)})\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

besitzen und da ausserdem $\Omega(\alpha, \varphi \ldots)$ gleichzeitig mit φ verschwindet, so ergiebt sich, dass $\Omega(\alpha, \varphi \ldots)$ die Gestalt hat:

$$\Omega(\alpha, \varphi \ldots \varphi^{(n)}) = a_0\varphi + a_1\varphi' + \cdots + a_n\varphi^{(n)},$$

wo die Coefficienten a_i nur von α abhängen, aber auch keine willkürlichen Constanten enthalten.

2. Ich bemerkte bald, dass überhaupt zu jeder unendlichen Gruppe von infinitesimalen Transformationen, welche die Form (4) besitzt, eine Differentialgleichung von der Form (1) gehört, welche eine unendliche Schaar von Gruppen der einfachen Mannigfaltigkeit definirt. Für dieses Resultat, welches ich durch Rechnung gefunden hatte, erkannte Lie den inneren Grund. Wir geben zunächst den Lie'schen Gedankengang wieder.

Die infinitesimalen Transformationen

$$(6) \qquad \varphi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^n a_i(\alpha)\varphi^{(i)}\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

mit der willkürlichen Function $\varphi(x)$ mögen eine unendliche Gruppe bilden. Es sei ferner $\alpha(x)$ irgend eine beliebig wählbare Function von x. Lie sucht nun unter den infinitesimalen Transformationen (6) diejenigen auf, welche die Gleichung $\alpha - \alpha(x) = 0$ invariant lassen. Der Inbegriff aller dieser Transformationen muss eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen bilden (vgl. Einleitung unter E).

Wenn man die infinitesimale Transformation (6) auf den Ausd. $\alpha - \alpha(x)$ ausführt, so erhält man:

$$\sum_0^n{}_i \, a_i(\alpha)\, \varphi^{(i)} - \alpha'(x)\, \varphi .$$

Soll nun die Gleichung $\alpha - \alpha(x) = 0$ bei einer Transformation der Form (6) invariant bleiben, so muss der eben gefundene Ausdr vermöge $\alpha - \alpha(x) = 0$ verschwinden (vgl. Einleitung unter E) d. die Function φ muss eine Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_0^n{}_i \, a_i\big(\alpha(x)\big)\, \varphi^{(i)} - \alpha'(x)\, \varphi = 0$$

sein. Setzt man daher in (6) an die Stelle von φ die allgemeine Lösung der erhaltenen Differentialgleichung, so bekommt man die gewünschte Gruppe von infinitesimalen Transformationen.

Die gefundene Gruppe enthält die zwei Variabeln x und α. Wichtiger ist jedoch eine damit eng zusammenhängende Gruppe in der Variabeln x allein. Die Differentialgleichung für φ besitzt nämlich augenscheinlich die Eigenschaft, dass sich aus zweien ihrer Lösungen, etwa φ und ψ stets eine dritte Lösung von der Form $\varphi\psi' - \psi\varphi'$ zusammensetzen lässt. Versteht man daher unter φ die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung, so stellt auch $\varphi \frac{df}{dx}$ eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen dar. Diese Gruppe ist offenbar endlich und erzeugt daher auch eine endliche Transformationsgruppe. Also hat Lie ohne Weiteres den Satz:

Satz 1. *Stellt der Ausdruck*

$$\varphi(x)\, \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^n{}_i \, a_i(\alpha)\, \varphi^{(i)}\, \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

eine unendliche Gruppe von infinitesimalen Transformationen dar, so definirt die Differentialgleichung

$$\sum_0^n{}_i \, a_i(\alpha)\, \xi^{(i)} - \alpha'\, \xi = 0, \tag{7}$$

wenn darin für α irgend eine Function von x gesetzt wird, eine endliche Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit.

Die Art und Weise, in welcher Lie zu diesem Satze gelangt, lässt, wie man sieht, an Einfachheit und Kürze nichts zu wünschen übrig.

Mein ursprünglicher Beweis ging darauf aus, durch Rechnung zu beweisen, dass die Gleichung (7) eine Gruppe definirt. Der Beweis hat auch jetzt noch ein gewisses Interesse, namentlich wegen der

Endformel, welche sich ergiebt. Er mag deshalb hier noch seine Stelle finden.

Zur Abkürzung schreiben wir $U(\alpha, \varphi)$ für $\Sigma a_i(\alpha)\, \varphi^{(i)}$. Die unendliche Gruppe (6) nimmt dann die Form an

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + U(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Ist ferner

$$\psi \frac{\partial f}{\partial x} + U(\alpha, \psi) \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

eine andere infinitesimale Transformation der Gruppe, so gehört auch

$$(\varphi\psi' - \psi\varphi') \frac{\partial f}{\partial x} + \left\{ \varphi \sum_0^n{}_i \frac{\partial U(\alpha, \psi)}{\partial \psi^{(i)}} \psi^{(i+1)} - \psi \sum_0^n{}_i \frac{\partial U(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi^{(i)}} \varphi^{(i+1)} + \right.$$
$$\left. + U(\alpha, \varphi) \frac{\partial U(\alpha, \psi)}{\partial \alpha} - U(\alpha, \psi) \frac{\partial U(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha} \right\} \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

der Gruppe an (Einleitung unter C); der Coefficient, welchen $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ in dieser Transformation hat, muss daher die Form $U(\alpha, \varphi\psi' - \psi\varphi')$ besitzen.

Um den Ausdruck für $U(\alpha, \varphi\psi' - \psi\varphi')$ möglichst kurz schreiben zu können, führen wir folgende Bezeichnungen ein. Wir setzen:

$$\sum_0^n{}_i \frac{\partial U(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi^{(i)}} \varphi^{(i+1)} = \frac{d' U(\alpha, \varphi)}{dx}$$

und

$$\sum_0^n{}_i \frac{\partial U(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi^{(i)}} \varphi^{(i+1)} + \alpha' \frac{\partial U(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha} = \frac{dU(\alpha, \varphi)}{dx},$$

so dass also

$$\frac{d' U(\alpha, \varphi)}{dx} = \frac{dU(\alpha, \varphi)}{dx} - \alpha' \frac{\partial U(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha}$$

wird. Unter α' verstehen wir dabei den Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{dx}$ von α, indem wir x als unabhängige und α als abhängige Variable betrachten.

Nach diesen Festsetzungen bekommen wir die Identität:

$$U(\alpha, \varphi\psi' - \psi\varphi') \equiv \varphi \frac{d' U(\alpha, \psi)}{dx} - \psi \frac{d' U(\alpha, \varphi)}{dx} +$$
$$+ U(\alpha, \varphi) \frac{\partial U(\alpha, \psi)}{\partial \alpha} - U(\alpha, \psi) \frac{\partial U(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha},$$

oder nach einer einfachen Umformung:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} U(\alpha, \varphi\psi' - \psi\varphi') \equiv \varphi \frac{dU(\alpha, \psi)}{dx} - \psi \frac{dU(\alpha, \varphi)}{dx} + \\ \quad + \frac{\partial U(\alpha, \psi)}{\partial \alpha} \{ U(\alpha, \varphi) - \alpha' \varphi \} - \frac{\partial U(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha} \{ U(\alpha, \psi) - \alpha' \psi \}. \end{array} \right.$$

Subtrahiren wir endlich hiervon die Identität

$$\alpha'(\varphi\psi' - \psi\varphi') \equiv \alpha'\varphi\psi' + \alpha''\varphi\psi - \alpha'\psi\varphi' - \alpha''\psi\varphi,$$

so ergiebt sich die wichtige Formel:

$$(9)\quad \begin{cases} U(\alpha, \varphi\psi' - \psi\varphi') - \alpha'(\varphi\psi' - \psi\varphi') \\ \quad \equiv \varphi \frac{d}{dx}(U(\alpha,\psi) - \alpha'\psi) - \psi \frac{d}{dx}(U(\alpha,\varphi) - \alpha'\varphi) + \\ \quad + \frac{\partial U(\alpha,\psi)}{\partial\alpha}\{U(\alpha,\varphi) - \alpha'\varphi\} - \frac{\partial U(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}\{U(\alpha,\psi) - \alpha'\psi\}. \end{cases}$$

In dieser Formel liegt nun der Beweis des Satzes 1. Denken wir uns nämlich für α eine beliebige Function von x gesetzt und setzen wir voraus, dass $\xi = \varphi$ und $\xi = \psi$ zwei Lösungen der Differentialgleichung (7) sind, so verschwindet die rechte Seite von (9) identisch. Da in Folge dessen zugleich die linke Seite verschwindet, so ist auch $\varphi\psi' - \psi\varphi'$ eine Lösung von (7) und diess war zu beweisen.

3. *Wir werden jetzt zeigen, dass die Differentialgleichung*

$$(10)\qquad U(\alpha, \xi) - \alpha'\xi = 0$$

die unendliche Gruppe der infinitesimalen Transformationen

$$(11)\qquad \varphi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \xi\varphi'\frac{\partial f}{\partial \xi} + U(\alpha, \varphi)\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

gestattet.

Vom Lie'schen Standpunkte aus gestaltet sich der Beweis kurz wie folgt: Die Gleichung (10) definirt, wie wir oben sahen, diejenigen unter den infinitesimalen Transformationen

$$\chi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + U(\alpha, \chi)\frac{\partial f}{\partial \alpha},$$

welche die Gleichung $\alpha - \alpha(x) = 0$ invariant lassen, unter $\alpha(x)$ irgend welche Function von x verstanden. Nimmt nun $\alpha - \alpha(x) = 0$ bei Ausführung der infinitesimalen Transformation (11) oder:

$$(11')\quad x_1 = x + \varphi(x)\delta t, \quad \xi_1 = \xi + \xi\varphi'\delta t, \quad \alpha_1 = \alpha + U(\alpha, \varphi)\delta t$$

die Form $\alpha_1 - \alpha_1(x_1) = 0$ an, so müssen die durch (10) definirten infinitesimalen Transformationen sich in diejenigen Transformationen

$$\psi(x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + U(\alpha_1, \psi)\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}$$

verwandeln, welche $\alpha_1 - \alpha_1(x_1) = 0$ invariant lassen. Also geht die Gleichung (10) bei Ausführung der infinitesimalen Transformation (11') über in:

$$U(\alpha_1, \xi_1) - \alpha_1'\xi_1 = 0.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Mein älterer Beweis wird vielleicht den einen oder den anderen

Leser mehr befriedigen als der eben entwickelte. Mein Verfahren war einfach das folgende.

Den Variabeln x, ξ und α wurden die Incremente

$$\delta x = \varphi \delta t, \quad \delta \xi = \xi \varphi' \delta t, \quad \delta \alpha = U(\alpha, \varphi) \delta t$$

ertheilt und es war nunmehr das Increment von $U(\alpha, \xi) - \alpha' \xi$ zu berechnen.

Aus $d\alpha - \alpha' dx = 0$ ergab sich:

$$\delta \alpha' = \frac{d}{dx} \delta \alpha - \alpha' \frac{d}{dx} \delta x = \left(\frac{d}{dx} U(\alpha, \varphi) - \alpha' \varphi' \right) \delta t.$$

Ebenso wurde

$$\frac{\delta \xi'}{\delta t} = \xi \varphi'', \quad \frac{\delta \xi''}{\delta t} = \xi \varphi''' + \xi' \varphi'' - \xi'' \varphi' \text{ u. s. w.}$$

Durch die Bemerkung, dass sich schreiben liess:

$$\frac{\delta \xi}{\delta t} = \xi' \varphi + (\xi \varphi' - \varphi \xi'), \quad \frac{\delta \xi'}{\delta t} = \xi'' \varphi + \frac{d}{dx} (\xi \varphi' - \varphi \xi'),$$

$$\frac{\delta \xi''}{\delta t} = \xi'' \varphi + \frac{d^2}{dx^2} (\xi \varphi' - \varphi \xi'),$$

wurde man auf die Vermuthung geführt, dass allgemein die Formel

$$\frac{\delta \xi^{(i)}}{\delta t} = \xi^{(i+1)} \varphi + \frac{d^i}{dx^i} (\xi \varphi' - \varphi \xi')$$

gelten möchte. Wirklich erhielt man auch aus der Gleichung

$$d\xi^{(i)} - \xi^{(i+1)} dx = 0$$

wieder:

$$\frac{\delta \xi^{(i+1)}}{\delta t} = \xi^{(i+2)} \varphi + \xi^{(i+1)} \varphi' + \frac{d^{i+1}}{dx^{i+1}} (\xi \varphi' - \varphi \xi') - \xi^{(i+1)} \varphi'$$

$$= \xi^{(i+2)} \varphi + \frac{d^{i+1}}{dx^{i+1}} (\xi \varphi' - \varphi \xi'),$$

womit die Allgemeingültigkeit der vermutheten Formel nachgewiesen war.

Nunmehr konnte das gewünschte Increment berechnet werden. Da ξ und seine Differentialquotienten in $U(\alpha, \xi)$ nur linear und homogen vorkommen, ergab sich:

$$\frac{\delta}{\delta t} (U(\alpha, \xi) - \alpha' \xi) = \frac{d'}{dx} U(\alpha, \xi) \cdot \varphi + U(\alpha, \xi \varphi' - \varphi \xi') -$$

$$- \alpha' \xi \varphi' + U(\alpha, \varphi) \frac{\partial}{\partial \alpha} U(\alpha, \xi) - \xi \left(\frac{d}{dx} U(\alpha, \varphi) - \alpha' \varphi' \right).$$

Hier liess sich die rechte Seite vermittelst der Identität (8) umformen und man kam auf die einfache Formel:

$$(12) \qquad \frac{\delta}{\delta t} (U(\alpha, \xi) - \alpha' \xi) = \frac{\partial}{\partial \alpha} U(\alpha, \varphi) \{ U(\alpha, \xi) - \alpha' \xi) \}.$$

Diese Formel zeigte deutlich, dass die Gleichung

$$U(\alpha, \xi) - \alpha' \xi = 0$$

die infinitesimalen Transformationen (11) gestattet.

Wir haben also den Satz:

Satz 2. *Bilden die infinitesimalen Transformationen*

$$\varphi(x) \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^n a_i(\alpha) \varphi^{(i)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

eine unendliche Gruppe, so gestattet die Gleichung

$$\sum_0^n a_i(\alpha) \xi^{(i)} - \alpha' \xi = 0$$

die unendliche Gruppe von infinitesimalen Transformationen

$$\varphi(x) \frac{\partial f}{\partial x} + \xi \varphi' \frac{\partial f}{\partial \xi} + \sum_0^n a_i(\alpha) \varphi^{(i)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

4. Die Differentialgleichung (10) gestattet, wie wir eben gesehen haben, die infinitesimalen Transformationen

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\delta x}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\delta \xi}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \cdots + \frac{\delta \xi^{(n)}}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial \xi^{(n)}} + \frac{\delta \alpha}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\delta \alpha'}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial \alpha'} \\ \frac{\delta x}{\delta t} = \varphi(x), \quad \frac{\delta \xi}{\delta t} = \xi \varphi', \quad \frac{\delta \alpha}{\delta t} = U(\alpha, \varphi). \end{cases}$$

Im Raume der Variabeln $x, \xi \ldots \xi^{(n)}, \alpha, \alpha'$ haben wir uns die Gleichung (10) als eine Mannigfaltigkeit vorzustellen, welche bei den Transformationen (13) invariant bleibt, während ihre Punkte untereinander vertauscht werden. Es ist nun sehr gut denkbar, dass die Punkte dieser Mannigfaltigkeit sich ihrerseits in unendlich viele Mannigfaltigkeiten anordnen lassen, welche einzeln bei den Transformationen (13) invariant bleiben. Analytisch ausgedrückt heisst diess: es kann eine Function von $x, \xi \ldots \xi^{(n)}, \alpha, \alpha'$ existiren, welche bei Berücksichtigung der Gleichung (10) die Transformationen (13) gestattet. Denkt man sich etwa $\xi^{(n)}$ vermittelst der Gleichung (10) eliminirt, so handelt es sich einfach um die Existenz einer Function

$$\Omega(x, \xi, \xi' \ldots \xi^{(n-1)}, \alpha, \alpha'),$$

welche die Transformationen (13) zulässt.

Existirt eine solche Function Ω, *so stellt dieselbe gleich Constans gesetzt stets ein Integral der Gleichung* (10) *dar.* Diess werden wir jetzt beweisen.

Die Function $\Omega(x, \xi \ldots \alpha')$ ist nach Voraussetzung eine Lösung der Gleichung

$$(14)\quad \frac{\delta x}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\delta \xi}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial \xi}+\cdots+\frac{\delta \xi^{(n-1)}}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial \xi^{(n-1)}}+\frac{\delta \alpha}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{\delta \alpha'}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial \alpha'}=0.$$

Diese Gleichung zerlegt sich wegen der Willkürlichkeit von $\frac{\delta x}{\delta t}=\varphi(x)$ in eine Reihe von Differentialgleichungen, denn die Coefficienten von $\varphi, \varphi' \ldots \varphi^{(n+1)}$ müssen ja einzeln verschwinden. Da $\varphi^{(n+1)}$ einzig und allein in $\frac{\delta \alpha'}{\delta t}$ vorkommt, ergiebt sich sofort $\frac{\partial f}{\partial \alpha'}=0$, in den etwaigen Lösungen von (14) ist also jedenfalls α' nicht enthalten. Dagegen muss α nothwendig vorkommen. Wäre nämlich $\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$, so käme $\varphi^{(n)}$ bloss in $\frac{\delta \xi^{(n-1)}}{\delta t}$ vor, also müsste $\frac{\partial f}{\partial \xi^{(n-1)}}$ verschwinden. Ebenso wäre $\frac{\partial f}{\partial \xi^{(n-2)}}=0$ u. s. w., kurz die Gleichung (14) hätte nur die nichtssagende Lösung $f=$ const.

Es sei nun $\Omega(x, \xi \ldots \xi^{(n-1)}, \alpha)$ eine Lösung von (14) und also $\frac{\delta \Omega}{\delta t}$ identisch gleich Null. Mit Benutzung des früher gefundenen Ausdruckes für $\frac{\delta \xi^{(i)}}{\delta t}$ haben wir dann:

$$\frac{\delta \Omega}{\delta t}=\varphi\frac{d\Omega}{dx}-\varphi\alpha'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}+\sum_0^{n-1}{}_i\frac{\partial \Omega}{\partial \xi^{(i)}}\frac{d^i}{dx^i}(\xi\varphi'-\varphi\xi')+$$
$$+U(\alpha,\varphi)\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\equiv 0.$$

Setzen wir hierin $\varphi=\xi$, so kommt:

$$\xi\frac{d\Omega}{dx}+\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\{U(\alpha,\xi)-\alpha'\xi\}\equiv 0,$$

so dass also die Gleichung $\frac{d\Omega}{dx}=0$ sich von der Gleichung (10) nur um einen nicht verschwindenden Factor unterscheidet. Wirklich ist demnach $\Omega=$ const. ein Integral der Differentialgleichung (10):

Satz 3. *Bilden die infinitesimalen Transformationen*

$$\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+\xi\varphi'\frac{\partial f}{\partial \xi}+\sum_0^n{}_i a_i(\alpha)\varphi^{(i)}\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

eine unendliche Gruppe und ist $\Omega(x, \xi, \xi' \ldots \xi^{(n-1)}, \alpha)$ *eine Lösung der Differentialgleichung*

$$(15)\quad \frac{\delta x}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\delta \xi}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial \xi}+\cdots+\frac{\delta \xi^{(n-1)}}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial \xi^{(n-1)}}+\frac{\delta \alpha}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0,$$

$$\frac{\delta x}{\delta t}=\varphi,\quad \frac{\delta \xi}{\delta t}=\xi\varphi',\quad \frac{\delta \alpha}{\delta t}=\sum_0^n{}_i a_i(\alpha)\varphi^{(i)},$$

so ist

$$\Omega(x, \xi, \xi' \ldots \xi^{(n-1)}, \alpha) = \text{const.}$$

ein Integral der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$\sum_0^n a_i(\alpha)\, \xi^{(i)} - \alpha' \xi = 0\,.$$

Zum Schlusse noch eine Bemerkung, welche für das Folgende von Wichtigkeit ist. Wir werden nämlich zeigen, dass *man in der unendlichen Gruppe*

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + U(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

an Stelle von α die neue Variable

$$\alpha_1 = \omega(\alpha) + \pi(x) \tag{16}$$

einführen kann, ohne dass diess auf die Differentialgleichung

$$U(\alpha, \xi) - \alpha' \xi = 0$$

einen wesentlichen Einfluss hat. Die Functionen ω und π bedeuten dabei willkürliche Functionen ihrer Argumente.

Bei Einführung der neuen Variabeln α_1 nimmt unsere unendliche Gruppe die Form an:

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \{\varphi . \pi'(x) + U(\alpha, \varphi)\omega'(\alpha)\} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}.$$

Hieraus ergiebt sich nun die Differentialgleichung

$$\xi \pi'(x) + U(\alpha, \xi)\omega'(\alpha) - (\omega'(\alpha)\alpha' + \pi'(x))\xi = 0,$$

also bei Weglassung des Factors $\omega'(\alpha)$ wieder die alte Differentialgleichung

$$U(\alpha, \xi) - \alpha' \xi = 0.$$

Wir sehen daraus, dass zwei unendliche Gruppen von der Form

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + U(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha} \tag{17}$$

stets dieselbe Schaar von Gruppen der einfachen Mannigfaltigkeit liefern, wenn sie durch eine Transformation von der Form (16) mit einander ähnlich sind. *Wir werden in Folge dessen im nächsten Paragraphen, wo wir die verschiedenen unendlichen Gruppen* (17) *bestimmen, nicht alle diese Gruppen aufzustellen brauchen, sondern nur die einfachsten Normalformen aller verschiedenen Typen, welche nicht durch Transformationen von der Form* (16) *in einander übergeführt werden können.*

§ 2.

Die einzelnen Gruppen der einfachen Mannigfaltigkeit.

5. Zunächst wenden wir uns dazu, *alle unendlichen Gruppen von infinitesimalen Transformationen*

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + U(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

zu bestimmen.

Die allgemeine infinitesimale Transformation einer solchen Gruppe hat die Form:

$$Xf = \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + (a_0(\alpha)\varphi + a_1(\alpha)\varphi' + \cdots + a_n(\alpha)\varphi^{(n)}) \frac{\partial f}{\partial \alpha},$$

wo die Coefficienten Functionen von α sind aber keine willkürlichen Constanten enthalten. Führen wir für die infinitesimale Transformation $a_i \frac{\partial f}{\partial \alpha}$ allgemein das Symbol $A_i f$ ein, so erhalten wir:

$$Xf = \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^n{}_i A_i f \cdot \varphi^{(i)}.$$

Eine andere infinitesimale Transformation der Gruppe sei:

$$Yf = \psi \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^n{}_i A_i f \cdot \psi^{(i)}.$$

Wir bilden nun die Transformation (XY) oder wie wir in Zukunft kurz sagen wollen: wir *combiniren* die beiden Transformationen Xf und Yf mit einander. Die Transformation (XY) muss dann wieder der Gruppe angehören, also muss werden:

$$(1) \qquad (XY) = (\varphi\psi' - \psi\varphi') \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^n{}_i A_i f \frac{d^i}{dx^i} (\varphi\psi' - \psi\varphi').$$

Auf der andern Seite aber ergiebt sich bei directer Ausrechnung:

$$(2) \; X(Y(f)) - Y(X(f)) = (\varphi\psi' - \psi\varphi') \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^n{}_i A_i f (\varphi\psi^{(i+1)} - \psi\varphi^{(i+1)})$$
$$+ \sum_0^{n-1}{}_i \sum_{i+1}^n{}_x (A_i A_x)(\varphi^{(i)}\psi^{(x)} - \psi^{(i)}\varphi^{(x)}).$$

Die beiden Gleichungen (1) und (2) müssen übereinstimmen. Diese Forderung drückt sich durch eine Gleichung von der Form:

$$\sum_0^{n-1}{}_i \sum_{i+1}^n{}_x g_{ix} (\varphi^{(i)}\psi^{(x)} - \psi^{(i)}\varphi^{(x)}) = 0$$

aus, in welcher die g_{ix} von x unabhängig sind. Da aber φ und ψ vollkommen willkürlich sind, überzeugt man sich ohne Schwierigkeit, dass diese Gleichung nur dann bestehen kann, wenn alle g_{ix} verschwinden.

Um für den vorliegenden Fall die Ausdrücke g_{ix} zu berechnen, müssen wir zunächst die rechte Seite von (1) entwickeln. Mit Benutzung der bekannten Formeln

$$\frac{d^i}{dx^i}(\varphi\psi') = \varphi\psi^{(i+1)} + \frac{n}{1}\varphi'\psi^{(i)} + \frac{n(n-1)}{1.2}\varphi''\psi^{(i-1)} + \cdots$$

$$\frac{d^i}{dx^i}(\psi\varphi') = \qquad\qquad \varphi'\psi^{(i)} + \quad \frac{n}{1} \quad \varphi''\psi^{(i-1)} + \cdots$$

erhalten wir:

$$\frac{d^i}{dx^i}(\varphi\psi' - \psi\varphi') = \varphi\psi^{(i+1)} + (n-1)\varphi'\psi^{(i)} + \\ + \left(\frac{n(n-1)}{1.2} - n\right)\varphi''\psi^{(i-1)} + \cdots$$

und hieraus durch eine leichte Umordnung:

$$\frac{d^i}{dx^i}(\varphi\psi' - \psi\varphi') = \varphi\psi^{(i+1)} - \psi\varphi^{(i+1)} + (n-1)(\varphi'\psi^{(i)} - \psi'\varphi^{(i)}) + \\ + \left(\frac{n(n-1)}{1.2} - n\right)(\varphi''\psi^{(i-1)} - \psi''\varphi^{(i-1)}) + \cdots.$$

Diese Reihe schliesst jenachdem i die Form $2\nu - 1$ oder 2ν hat mit einem Gliede $\varphi^{(\nu-1)}\psi^{(\nu+1)} - \psi^{(\nu-1)}\varphi^{(\nu+1)}$ oder mit einem Gliede

$$\varphi^{(\nu)}\psi^{(\nu+1)} - \psi^{(\nu)}\varphi^{(\nu+1)}.$$

Machen wir jetzt nach Einsetzung des gefundenen Ausdrucks in (1) die Vergleichung der beiden Ausdrücke für $X(Y(f)) - Y(X(f))$, so finden wir zunächst, dass sich das Glied:

$$\sum_0^n{}_i A_i f(\varphi\psi^{(i+1)} - \psi\varphi^{(i+1)})$$

weghebt. Weiter bekommen wir:

$$(3)\qquad \begin{cases} (A_0 A_i) = 0 & (i = 1 \ldots n) \\ (A_1 A_i) = (i-1)A_i & (i = 2 \ldots n) \\ (A_2 A_{i-1}) = \left(\frac{i(i-1)}{1.2} - i\right)A_i & (i = 3 \ldots n). \end{cases}$$

Berücksichtigen wir noch, dass in (1) kein Glied $\varphi^{(\nu)}\psi^{(\pi)} - \psi^{(\nu)}\varphi^{(\pi)}$ vorkommt, in welchem die Summe $\nu + \pi$ die Zahl $n+1$ übersteigt, so haben wir:

$$(A_2 A_n) = (A_3 A_n) = \cdots = (A_{n-1} A_n) = 0 \qquad (n > 2).$$

Damit sind zwar keineswegs alle Relationen zwischen $A_0 f, A_1 f \ldots A_n f$ aufgestellt, allein wir werden sehen, dass die aufgestellten vollkommen genügen, um die infinitesimalen Transformationen $A_i f$ zu bestimmen.

6. *Am einfachsten ist natürlich der Fall* $n = 0$. Entweder ist dann $Af = 0$ oder es ist von Null verschieden. Bei der ersten Annahme erhalten wir die unendliche Gruppe

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x},$$

bei der zweiten können wir uns immer die Variable α so gewählt denken, dass $A_0 f$ die Form $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ annimmt. Auf diese Weise erhalten wir also die unendliche Gruppe:

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Allein diese ist von der eben gefundenen nicht wesentlich verschieden, denn führen wir $\alpha - x$ als neues α ein, so erhält auch sie die Form

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Jetzt können wir voraussetzen, dass n *grösser als Null ist* und dass $A_n f$ nicht verschwindet. *Wir werden zeigen, dass die Zahl* n *nicht grösser als* 3 *sein kann.*

Für $n > 2$ fanden wir oben $(A_{n-1} A_n) = 0$; da aber die infinitesimalen Transformationen $A_i f$ nur von der einen Variablen α abhängen, folgt aus $(A_{n-1} A_n) = 0$ sogleich $A_{n-1} = \lambda_{n-1} A_n$, wo λ_{n-1} eine Constante bedeutet. Wegen der Gleichungen (3) ist nun:

$$\begin{aligned}(A_1 A_{n-1}) &= (n-2) A_{n-1} = \lambda_{n-1}(n-2) A_n \\ &= \lambda_{n-1}(A_1 A_n) = \lambda_{n-1}(n-1) A_n,\end{aligned}$$

woraus, da $A_n \not\equiv 0$ ist, folgt $\lambda_{n-1} = 0$ das heisst $A_{n-1} = 0$.

Andererseits haben wir:

$$(A_2 A_{n-1}) = 0 = \left(\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - n\right) A_n,$$

eine Gleichung, welche nur für $n = 3$ bestehen kann, weil für $n > 3$ nothwendig A_n verschwinden müsste, was ausgeschlossen ist. *Demnach ist wirklich* 3 *der höchste Werth, welchen die Zahl* n *haben kann.*

Weiter ist $(A_0 A_n) = 0$, also $A_0 = \lambda_0 A_n$ und da ausserdem die Gleichungen

$$(A_1 A_0) = 0 = \lambda_0 (A_1 A_n) = \lambda_0 (n-1) A_n$$

bestehen, *so verschwindet* λ_0 *und somit auch* A_0 *immer, wenn* n *grösser als* 1 *ist.*

Wir müssen jetzt die Fälle $n = 1, 2, 3$ einzeln behandeln.

1. *Fall.* $n = 1$.

Es ist $A_0 = \lambda_0 A_1$; führen wir eine geeignete Function von neues α ein, so können wir $A_1 f$ auf die Form $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ bringen u kommen daher die unendliche Gruppe

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + (\lambda_0 \varphi + \varphi') \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Führen wir hier noch $\alpha - \lambda_0 x$ als neues α ein, so erscheint die in der Gestalt:

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi' \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

2. *Fall.* $n = 2$.

Wie wir oben sahen, ist:

$$A_0 = 0, \quad (A_1 A_2) = A_2.$$

Indem wir daher $A_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}$ wählen, ergiebt sich:

$$A_1 f = -(\alpha + \text{const.}) \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

oder wenn $\alpha +$ const. als neues α eingeführt wird:

$$A_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad A_1 f = -\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Die betreffende unendliche Gruppe ist daher:

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + (\varphi'' - \alpha \varphi') \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

3. *Fall.* $n = 3$.

Die oben gefundenen Relationen zwischen $A_0 f \ldots A_3 f$ sin

$$A_0 = A_2 = 0, \quad (A_1 A_3) = 2 A_3.$$

Setzen wir $A_3 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}$, so folgt

$$A_1 f = -(2\alpha + \text{const.}) \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

und indem wir die Constante wie beim zweiten Falle wegschaff

$$A_3 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad A_1 f = -2\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Also haben wir die folgende unendliche Gruppe:

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + (\varphi''' - 2\alpha \varphi') \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

7. In der vorangehenden Nummer haben wir gesehen, d *unendliche Gruppe von der Form*

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + U(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

sich durch geeignete Wahl von α auf eine der vier Formen:

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi\dfrac{\partial f}{\partial x}, & \varphi\dfrac{\partial f}{\partial x}+\varphi'\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} \\ \varphi\dfrac{\partial f}{\partial x}+(\varphi''-\alpha\varphi')\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}, & \varphi\dfrac{\partial f}{\partial x}+(\varphi'''-2\alpha\varphi')\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} \end{cases}$$

zurückführen lässt.

Nach dem in § 1 Nr. 2 bewiesenen Satze 1. stellt nun die Gleichung $U(\alpha,\xi)-\alpha'\xi=0$, wenn darin für α eine bestimmte Function von x gesetzt wird, immer die Definitionsgleichung einer Gruppe dar. Wenden wir diess auf die vorliegenden vier Gruppen (4) an, so bemerken wir zunächst, dass die Gruppe $\varphi\frac{\partial f}{\partial x}$ nur liefert $\alpha'\xi=0$ also $\xi=0$. Dagegen erhalten wir in den übrigen drei Fällen wirklich Gruppen, nämlich die folgenden:

$$(5)\quad \begin{cases} \xi'-\alpha'\xi & =0 \\ \xi''-\alpha\xi'-\alpha'\xi & =0 \\ \xi'''-2\alpha\xi'-\alpha'\xi & =0. \end{cases}$$

Auf eine dieser drei Formen lässt sich also jede Definitionsgleichung $U(\alpha,\xi)-\alpha'\xi=0$ *bringen, welche zu einer unendlichen Gruppe*

$$\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+U(\alpha,\varphi)\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

gehört.

Die drei Gruppentypen (5) sind, wie aus Lie's Untersuchungen bekannt ist, die *einzigen* der einfachen Mannigfaltigkeit.

Die Gleichung $\xi'-\alpha'\xi=0$ definirt die eingliedrigen Gruppen, welche mit der Gruppe $\frac{df}{dx}$ oder $x_1=x+a$ ähnlich sind. Die Gleichung $\xi''-\alpha\xi'-\alpha'\xi=0$ definirt die Gruppen, welche mit der Gruppe $\frac{df}{dx}, x\frac{df}{dx}$ oder $x_1=ax+b$ ähnlich sind. Endlich die Gleichung $\xi'''-2\alpha\xi'-\alpha'\xi=0$ definirt solche Gruppen, welche mit der allgemeinen projectivischen Gruppe $\frac{df}{dx}, x\frac{df}{dx}, x^2\frac{df}{dx}$ ähnlich sind.

Unsere Methode liefert uns demnach sämmtliche Gruppen der einfachen Mannigfaltigkeit. A priori klar war diess allerdings keineswegs und es müsste eigentlich untersucht werden, warum wir alle Gruppen erhalten haben. (Vgl. darüber das im letzten Theile der Einleitung gesagte.)

8. *Untersuchen wir jetzt, ob es uns mit Benutzung des Satzes* 3, § 1 Nr. 4 *gelingt Integrale der Definitionsgleichungen* (5) *aufzustellen.*

Wir gehen die drei Fälle einzeln durch, stellen jedesmal die Differentialgleichung (15) des § 1 auf und suchen ihre Integrale.

1. *Fall.* Die Gleichung

$$\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+\xi\varphi'\frac{\partial f}{\partial \xi}+\varphi'\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$$

zerfällt in die beiden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

Die einzige Lösung derselben ist $\xi e^{-\alpha}$, also ist $\xi e^{-\alpha} = \text{const.}$ das Integral der Differentialgleichung $\xi' - \alpha' \xi = 0$.

2. *Fall.* Die Gleichung

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \xi \varphi' \frac{\partial f}{\partial \xi} + \xi \varphi'' \frac{\partial f}{\partial \xi'} + (\varphi'' - \alpha \varphi') \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

zerlegt sich wie folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \xi \frac{\partial f}{\partial \xi'} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Man erhält hieraus ein Integral der Gleichung $\xi'' - \alpha \xi' - \alpha' \xi = 0$, nämlich $\xi' - \alpha \xi = \text{const.}$

3. *Fall.*

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \xi \varphi' \frac{\partial f}{\partial \xi} + \xi \varphi'' \frac{\partial f}{\partial \xi'} + (\xi \varphi''' + \xi' \varphi'' - \xi'' \varphi') \frac{\partial f}{\partial \xi''} + (\varphi''' - 2\alpha\varphi') \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

ergiebt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - \xi'' \frac{\partial f}{\partial \xi''} - 2\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

$$\xi \frac{\partial f}{\partial \xi'} + \xi' \frac{\partial f}{\partial \xi''} = 0, \quad \xi \frac{\partial f}{\partial \xi''} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Es findet sich ein Integral der Differentialgleichung $\xi''' - 2\alpha \xi' - \alpha' \xi = 0$ nämlich

$$\xi \xi'' - \frac{1}{2} \xi'^2 - \alpha \xi^2 = \text{const.}$$

Man verificirt in jedem einzelnen Falle leicht, dass man wirklich ein Integral der betreffenden Differentialgleichung vor sich hat.

Hier wird der geeignete Ort sein, noch etwas näher auf die Integrationstheorie der Gleichung $\xi''' - 2\alpha \xi' - \alpha' \xi = 0$ *einzugehen.* Ueber die beiden andern Definitionsgleichungen brauchen wir dagegen nichts weiter hinzuzufügen, da aus dem Gesagten schon hervorgeht, dass sie beide durch Quadraturen erledigt werden können.

Wir denken uns also die Differentialgleichung

$$\xi''' - 2\alpha \xi' - \alpha' \xi = 0 \tag{6}$$

vorgelegt und für α irgend eine gegebene Function von x eingesetzt. Ein Integral der Gleichung (6) kennen wir zwar schon, nämlich

$$\xi \xi'' - \frac{1}{2} \xi'^2 - \alpha \xi^2 = \text{const.},$$

allein dasselbe bringt uns zunächst weiter keinen Vortheil.

Die Gruppe, welche durch (6) definirt wird, ist einfach, denn sie ist gleichzusammengesetzt und zugleich ähnlich mit der allgemeinen

projectivischen Gruppe $\frac{df}{dx}$, $x\frac{df}{dx}$, $x^2\frac{df}{dx}$ der einfachen Mannigfaltigkeit. Die gesuchte Gruppe enthält daher ∞^1 zweigliedrige Untergruppen, welche nach dem früheren durch Differentialgleichungen von der Form

$$\xi'' - \beta(x)\xi' - \beta'(x)\xi = 0$$

definirt werden.

Wir wollen die allgemeine Definitionsgleichung dieser ∞^1 Untergruppen bestimmen. Zu dem Ende differentiiren wir die Gleichung $\xi'' - \beta\xi' - \beta'\xi = 0$ nach x:

$$\xi''' - \beta\xi'' - 2\beta'\xi' - \beta''\xi = 0$$

und eliminiren sodann ξ'':

$$\xi''' - (\beta^2 + 2\beta')\xi' - (\beta\beta' + \beta'')\xi = 0.$$

Diese Gleichung muss mit (6) übereinstimmen, es muss also β der Differentialgleichung

$$\beta' + \tfrac{1}{2}\beta^2 = \alpha \tag{7}$$

genügen.

Ist nun $\beta = \beta(x, \alpha)$ die allgemeine Lösung dieser Gleichung, so definirt $\xi'' - \beta(x, a)\xi' - \beta'(x)\xi = 0$ die erwähnten ∞^1 Untergruppen und ist zugleich offenbar ein Integral der Gleichung (6).

Jetzt könnten wir mit Hülfe des Integrals $\xi\xi'' - \frac{1}{2}\xi'^2 - \alpha\xi^2 = \text{const.}$ noch ein weiteres Integral finden; es ist aber bequemer und kommt übrigens auf dasselbe hinaus, wenn wir gleich von dem früher gefundenen Integrale der Gleichung $\xi'' - \beta\xi' - \beta'\xi = 0$ Gebrauch machen. Auf diese Weise erhalten wir ein Integral von (6) mit zwei willkürlichen Constanten:

$$\xi' - \beta(x, a)\xi = \text{const.}$$

Die Integration dieser Gleichung erfordert anscheinend Quadratur, kann aber ohne Quadratur geleistet werden. Diess zeigen uns die folgenden Betrachtungen, welche wir aber nur kurz andeuten wollen, weil dieselben oder wenigstens ganz ähnliche schon mehrfach von Lie angewendet worden sind.

In der dreigliedrigen Gruppe $\frac{df}{dx}$, $x\frac{df}{dx}$, $x^2\frac{df}{dx}$ und ebenso in jeder mit ihr gleichzusammengesetzten haben zwei zweigliedrige Untergruppen stets eine eingliedrige gemein und, wie sich zeigen lässt, ist auch jede eingliedrige Untergruppe in zwei zweigliedrigen enthalten. Diese Bemerkung können wir hier verwerthen.

Denken wir uns a und b in den beiden Gleichungen

$$\xi' - \beta(x, a)\xi = \text{const.}, \quad \xi' - \beta(x, b)\xi = \text{const.}$$

als feste aber doch willkürlich gewählte Constanten, so definiren diese beiden Gleichungen zusammengenommen die infinitesimale Transformation, welche zwei bestimmten zweigliedrigen Untergruppen der gesuchten Gruppe gemein ist.

Wir bekommen daher für diese infinitesimale Transformation den Ausdruck:

$$\xi = \frac{\text{const.}}{\beta(x, a) - \beta(x, b)} \cdot \tag{8}$$

Lassen wir aber hierin a und b variiren, so erhalten wir alle infinitesimalen Transformationen, welche zwei zweigliedrigen Untergruppen gemeinsam sind, also nach dem Obigen alle infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppe.

Die Gleichung (8) stellt mithin die allgemeine Lösung der Gleichung (6) dar. Diess kann man übrigens auch direct verificiren, indem man (8) differentiirt und vermittels der Gleichung (7), welcher $\beta(x, a)$ und $\beta(x, b)$ beide genügen, die Functionen β und die Constante c eliminirt.

Die Integration der Differentialgleichung 3. O. (6) *ist demnach unmittelbar durchführbar, wenn die Differentialgleichung 1. O.* (7) *vollständig integrirt ist.*

9. Es wurde schon oben einmal (vgl. Nr. 7) beiläufig erwähnt, dass *jede der drei Definitionsgleichungen*

$$\xi' - \alpha'\xi = 0, \quad \xi'' - \alpha\xi' - \alpha'\xi = 0, \quad \xi''' - 2\alpha\xi' - \alpha'\xi = 0 \tag{9}$$

eine unendliche Schaar von Gruppen definirt, welche unter einander ähnlich sind. Doch wurde diess damals geschlossen, indem wir uns auf Lie's Bestimmung der Gruppen in der einfachen Mannigfaltigkeit beriefen. Jetzt wollen wir auf diesen Punkt etwas näher eingehen.

Sollen alle Gruppen, welche durch die Differentialgleichung

$$U(\alpha, \xi) - \alpha'\xi = 0 \tag{10}$$

definirt werden, unter einander ähnlich sein, so ist es zunächst nothwendig, dass jede Gruppe dieser Schaar bei Einführung einer neuen Variabeln $x_1 = F(x)$ an Stelle von x wieder in eine Gruppe der Schaar übergeht; ausserdem muss aber noch jede Gruppe der Schaar in jede andere übergeführt werden können.

Machen wir in (10) die Substitution $x_1 = F(x)$ und entsprechend $\xi_1 = \xi F'(x)$, so erhalten wir eine Gleichung von der Form:

$$\sum_0^n B_i(\alpha, F, F' \ldots)\xi_1^{(i)} - \frac{\alpha'}{F'}\xi_1 = 0, \tag{11}$$

wo $\xi_1^{(i)}$ für $\frac{d^i\xi_1}{dx_1^i}$ geschrieben ist. Soll nun jede Gruppe wieder in eine

Gruppe der Schaar übergehen, so muss diese letzte Gleichung, wenn man ihre Coefficienten durch die neue Variable x_1 ausdrückt, die Form

$$U(\alpha_1, \xi_1) - \alpha_1' \xi_1 = 0$$

erhalten können, unter α_1 eine Function von x_1 verstanden. Diese Forderung giebt eine oder mehrere Gleichungen zur Bestimmung von α_1 und α_1' als Functionen von $\alpha, \alpha', F, F' \ldots$.

Sehen wir zu, wie sich die Sache bei den drei verschiedenen Definitionsgleichungen (9) *gestaltet.*

Wir finden zunächst:

$$\xi = \frac{\xi_1}{F'}, \qquad \xi' = \xi_1' - \xi_1 \frac{F''}{F'^2}$$

$$\xi'' = \xi_1'' F' - \xi_1' \frac{F''}{F'} - \xi_1 \frac{F'F''' - 2F''^2}{F'^3}$$

$$\xi''' = \xi_1''' F'^2 - \xi_1' \frac{2F'F''' - 3F''^2}{F'^2} - \xi_1 \frac{d}{dx} \frac{F'F''' - 2F''^2}{F'^3}.$$

Bilden wir unter Zugrundelegung dieser Formeln zu jeder der drei Differentialgleichungen (9) die entsprechende Gleichung (11) und verlangen, dass die drei auf diese Weise gefundenen Gleichungen bezüglich mit

$$\xi_1' - \alpha_1' \xi_1 = 0, \quad \xi_1'' - \alpha_1 \xi_1' - \alpha_1' \xi_1 = 0, \quad \xi_1''' - 2\alpha_1 \xi_1' - \alpha_1' \xi_1 = 0$$

identisch werden, so erhalten wir Folgendes:

1. *Fall.*

$$\alpha_1' = \frac{\alpha'}{F'} + \frac{F''}{F'^2}$$

also, da $\alpha_1' F' = \frac{d\alpha_1}{dx}$ ist:

$$(12) \qquad x_1 = F(x), \quad \xi_1 = \xi F'(x), \quad \alpha_1 = \alpha + l F' + \text{const.}$$

In den beiden übrigen Fällen ergeben sich je zwei Gleichungen, von denen wir aber jedesmal nur die eine aufzustellen brauchen, weil die andere aus ihr durch Differentiation hervorgeht. Es wird im 2. *Falle*:

$$(13) \qquad x_1 = F(x), \quad \xi_1 = \xi F'(x), \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{F'} + \frac{F''}{F'^2}$$

und im 3. *Falle*:

$$(14) \qquad x_1 = F(x), \quad \xi_1 = \xi F'(x), \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{F'^2} + \frac{F'F''' - \frac{3}{2}F''^2}{F'^4}.$$

Verstehen wir hier unter $F(x)$ eine willkürliche Function von x, so haben wir offenbar in jedem dieser drei Fälle eine unendliche Gruppe von endlichen Transformationen, welche die betreffende Differentialgleichung (9) invariant lassen. Die einzelnen Gruppen, welche eine

solche Differentialgleichung für die verschiedenen Werthe der Functionen $\alpha(x)$ definirt, werden dabei unter einander vertauscht.

In jedem der drei Fälle können wir ferner für α eine beliebige Function $\alpha(x)$ und für α_1 eine beliebige Function $\alpha_1(x_1)$ setzen und erhalten dann jedesmal eine Differentialgleichung zur Bestimmung von $F(x)$. Daraus schliessen wir, dass z. B. vermöge der unendlichen Gruppe (13) jede beliebige Gruppe $\xi'' - \alpha(x)\xi' - \alpha'(x)\xi = 0$ in jede beliebige andere Gruppe $\xi_1'' - \alpha_1(x_1)\xi_1' - \alpha_1'(x_1)\xi_1 = 0$ übergeführt werden kann und ebenso in den beiden übrigen Fällen. Diess aber war eben zu beweisen.

Substituiren wir in (13) für α eine *bestimmte* Function $\alpha(x)$ und für α_1 dieselbe Function von x_1 nämlich $\alpha(x_1)$, so bekommen wir für F die Differentialgleichung

$$\alpha(x_1) = \frac{\alpha(x)}{F'} + \frac{F''}{F'^2}. \tag{15}$$

Dieselbe definirt alle Transformationen $x_1 = F(x)$, welche die Gleichung $\xi'' - \alpha(x)\xi' - \alpha'(x)\xi = 0$ in $\xi_1'' - \alpha(x_1)\xi_1' - \alpha'(x_1)\xi_1 = 0$ verwandeln. Es ist klar, dass alle Transformationen $x_1 = F(x)$ von dieser Beschaffenheit eine endliche Gruppe bilden. Um die infinitesimalen Transformationen derselben zu finden, setzen wir $x_1 = F(x) = x + \xi\delta t$, dann wird

$$\alpha(x_1) = \alpha(x) + \alpha'(x)\xi\delta t$$

und aus (15) ergiebt sich für ξ die Differentialgleichung:

$$\xi'' - \alpha(x)\xi' - \alpha'(x)\xi = 0. \tag{16}$$

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x_1}{dx^2} + \alpha(x)\frac{dx_1}{dx} - \alpha(x_1)\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2 = 0$$

definirt also die endlichen Gleichungen $x_1 = F(x)$ derjenigen Gruppe deren infinitesimale Transformationen durch die Gleichung (16) defi nirt werden.

Ebenso erkennen wir, dass die Differentialgleichung

$$\frac{dx_1}{dx}\frac{d^3x_1}{dx^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2x_1}{dx^2}\right)^2 + \alpha(x)\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2 - \alpha(x_1)\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^4 = 0$$

die endlichen Gleichungen der Gruppe

$$\xi''' - 2\alpha(x)\xi' - \alpha'(x)\xi = 0 \tag{17}$$

definirt.

Auf das Verhältniss der Differentialgleichung $\xi' - \alpha'(x)\xi = 0$ zu der unendlichen Gruppe (12) wollen wir nicht eingehen, um nicht zu weitläufig zu werden. Dagegen wollen wir über die beiden Gruppen (13) und (14) noch eine kurze Bemerkung machen.

Die Gleichungen dieser Gruppen ergaben sich oben ohne Integration. Die Kenntniss dieser Gleichungen gestattet uns aber die in Nr. 8 aufgestellten Integrale der beiden Differentialgleichungen (16) und (17) ohne Integration zu finden.

Wir werden den Beweis nur andeuten. Das Integral der Gleichung (17) zum Beispiel hatte die Form

$$\xi\xi'' - \tfrac{1}{2}\xi'^2 - \alpha\xi^2 = \text{const.},$$

wo die Function links die unendliche Gruppe von infinitesimalen Transformationen

$$\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + \xi\varphi'\frac{\partial f}{\partial \xi} + (\varphi''' - 2\alpha\varphi')\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

gestattet. Diese Function muss nun auch die unendliche Gruppe von endlichen Transformationen (14) gestatten und man muss daher aus den Gleichungen (14) mit Hinzunahme der Ausdrücke für $\xi_1'\xi_1''$ eine Gleichung von der Form

$$\xi_1\xi_1'' - \tfrac{1}{2}\xi_1'^2 - \alpha_1\xi_1^2 = \xi\xi'' - \tfrac{1}{2}\xi'^2 - \alpha\xi^2$$

erhalten, wenn man φ und seine Differentialquotienten eliminirt. Diess ist auch wirklich der Fall.

Ebenso erhält man aus (13) leicht:

$$\xi_1' - \alpha_1\xi_1 = \xi' - \alpha\xi.$$

Damit sind die beiden Integrale in der That ohne Integration gefunden.

§ 3.

Allgemeine Entwickelungen für die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.

10. Wir wenden uns dazu die Betrachtungen der Nummern 2 und 3 des § 1 für die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit durchzuführen. Doch werden wir uns jetzt etwas kürzer fassen können.

In den Variabeln $x_1 \ldots x_n$, $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ möge

$$\sum_1^n{}_i \varphi_i\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa \Omega_\varkappa\left(\alpha_1\cdots\alpha_m,\ \varphi_1\cdots\varphi_n,\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2}\cdots\right)\frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}$$

eine unendliche Gruppe von infinitesimalen Transformationen darstellen. Unter den φ_i verstehen wir dabei willkürliche Functionen von $x_1 \ldots x_n$; die $\Omega_\varkappa$ enthalten ausser $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ noch die φ_i nebst ihren Differentialquotienten bis zu einer gewissen Ordnung. Ausserdem setzen wir noch voraus, dass die Functionen $\Omega_\varkappa$ keine willkürlichen Constanten enthalten und daher vollständig bestimmt sind, wenn die φ_i gegeben sind;

endlich möge noch $\Omega_1 = \cdots = \Omega_m = 0$ werden, wenn alle φ_i schwinden.

Nehmen wir eine zweite infinitesimale Transformation der obi Gruppe hinzu, etwa:

$$\sum_1^n{}_i \psi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa \Omega_\varkappa \left(\alpha_1 \cdots \alpha_m,\ \psi_1 \cdots \psi_n,\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \cdots\right) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa},$$

so muss auch

$$\sum_1^n{}_i (a\varphi_i + b\psi_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa \left(a\Omega_\varkappa(\alpha, \varphi) + b\,\Omega_\varkappa(\alpha, \psi)\right) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}$$

der Gruppe angehören; die Coefficienten der $\frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}$ müssen daher unter den gemachten Voraussetzungen die Form $\Omega_\varkappa(\alpha, a\varphi + b\psi)$ erhalten können. Daraus schliessen wir, dass die Functionen $\Omega_\varkappa$ in den φ_i und deren Differentialquotienten linear und homogen sind.

Wie früher setzen wir zur Abkürzung

$$\Omega_\varkappa \left(\alpha_1 \ldots \alpha_m,\ \varphi_1 \ldots \varphi_n,\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots\right) = U_\varkappa(\alpha, \varphi).$$

Unter den infinitesimalen Transformationen

$$(1) \qquad \sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}$$

suchen wir nun diejenigen, welche das Gleichungensystem

$$(2) \qquad \alpha_1 - \alpha_1(x_1 \ldots x_n) = 0 \ldots \alpha_m - \alpha_m(x_1 \ldots x_n) = 0$$

invariant lassen. Der Inbegriff aller dieser Transformationen — wenn es überhaupt solche giebt — bildet dann, wie wir wissen, eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen.

Soll das Gleichungensystem (2) die infinitesimalen Transformationen (1) gestatten, so müssen die Ausdrücke

$$U_\varkappa(\alpha, \varphi) - \sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_\varkappa(x_1 \ldots x_n)$$

bei der Substitution $\alpha_\varkappa = \alpha_\varkappa(x_1 \ldots x_n)$ verschwinden d. h. $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ müssen die m Differentialgleichungen

$$(3) \qquad U_\varkappa(\alpha, \varphi) - \sum_1^n{}_i \alpha_{\varkappa i} \varphi_i = 0 \qquad (\varkappa = 1 \ldots m)$$

befriedigen. In denselben ist für $\alpha_\varkappa$ die Function $\alpha_\varkappa(x_1 \ldots x_n)$ ein-

zusetzen; $\alpha_{\varkappa i}$ ist zur Abkürzung für $\frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial x_i}$ geschrieben. Nehmen wir einstweilen an, dass die Gleichungen (3) wirklich Lösungen besitzen. Setzen wir dann in (1) an Stelle von $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ die allgemeinsten Lösungen von (3) ein, so erhalten wir eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen in den Variabeln $x_1 \ldots x_n$, $\alpha_1 \ldots \alpha_m$.

Die Gleichungen (3) definiren aber auch eine Gruppe in den Variabeln $x_1 \ldots x_n$ allein und diese letztere ist es, welche uns hier interessirt. Denn haben wir zwei Lösungensysteme $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, $\psi_1 \ldots \psi_n$ dieser Gleichungen, so ist offenbar auch

$$\sum_1^n{}_i \left(\varphi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} - \psi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) \qquad (j = 1 \ldots n)$$

ein Lösungensystem.

Das System der Definitionsgleichungen

$$U_\varkappa(\alpha, \xi) - \sum_1^n{}_i \alpha_{\varkappa i} \xi_i = 0 \qquad (\varkappa = 1 \ldots m) \tag{3'}$$

gestattet nun die unendliche Gruppe der infinitesimalen Transformationen

$$\sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_j \xi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}, \tag{4}$$

welche ausführlich geschrieben lauten:

$$x_i' = x_i + \varphi_i(x_1 \ldots x_n)\delta t, \quad \xi_i' = \xi_i + \sum_1^n{}_j \xi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \delta t, \tag{4'}$$

$$\alpha_\varkappa' = \alpha_\varkappa + U_\varkappa(\alpha, \varphi)\delta t.$$

Um diess zu beweisen, erinnern wir zunächst daran, dass die Gleichungen (3') bei der Substitution $\alpha_\varkappa = \alpha_\varkappa(x_1 \ldots x_n)$ diejenigen unter den infinitesimalen Transformationen (1) definiren, welche das Gleichungensystem $\alpha_\varkappa - \alpha_\varkappa(x_1 \ldots x_n) = 0$ invariant lassen. Geht nun dieses Gleichungensystem bei Ausführung der Transformationen (4') über in $\alpha_\varkappa' - \alpha_\varkappa'(x_1' \ldots x_n') = 0$, so müssen die durch (3') definirten Transformationen sich in diejenigen Transformationen (1) verwandeln, welche das System der Gleichungen $\alpha_\varkappa' - \alpha_\varkappa'(x_1' \ldots x_n') = 0$ invariant lassen. Mit andern Worten die Gleichungen (3') nehmen vermöge der Transformationen (4') die Form an:

$$U_\varkappa(\alpha', \xi') - \sum_1^n{}_i \alpha_{\varkappa i}' \xi_i' = 0 \quad (\varkappa = 1 \ldots m).$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Die bisherigen Resultate zusammenfassend können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz 4. *Bestimmt der Ausdruck*

$$\sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}$$

eine unendliche Gruppe von infinitesimalen Transformationen und bedeuten dabei die $U_\varkappa$ Functionen von $\alpha_1 \ldots \alpha_m$, welche ausserdem linear und homogen von $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ und ihren Differentialquotienten abhängen; ist es ferner möglich für $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ solche Functionen von $x_1 \ldots x_n$ zu wählen, dass die m Differentialgleichungen für $\xi_1 \ldots \xi_n$:

$$U_\varkappa(\alpha, \xi) - \sum_1^n{}_\nu \alpha_{\varkappa\nu} \xi_\nu = 0 \qquad (\varkappa = 1 \ldots m)$$

ein integrables System bilden, so definirt dieses System eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen in den Variabeln $x_1 \ldots x_n$. Ueberdiess gestattet das betreffende System von Differentialgleichungen die unendliche Gruppe von infinitesimalen Transformationen:

$$\sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_j \xi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}.$$

11. Während wir in der vorigen Nummer dem von Lie gegebenen Gedankengang folgten, wollen wir jetzt noch kurz bei meinem ursprünglichen Beweise des Satzes 4 verweilen.

Dass die Gleichungen (3') eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen definiren, bewies ich folgendermassen.

Die beiden infinitesimalen Transformationen

$$\sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa},$$

$$\sum_1^n{}_i \psi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \psi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}$$

werden mit einander combinirt. Die resultirende Transformation muss dann wieder der unendlichen Gruppe (1) angehören und daher die Form besitzen:

$$\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_j \left(\varphi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} - \psi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa \left(\alpha, \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa};$$

dabei wird unter $U_\varkappa \left(\alpha, \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ der Ausdruck verstanden,

welcher aus $U_x(\alpha, \varphi)$ durch die Substitution von

$$\sum_1^n{}_j \left(\varphi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} - \psi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)$$

an Stelle von φ_i hervorgeht. Ferner möge noch $\frac{\partial}{\partial x_i} U_x(\alpha, \varphi)$ den partiellen Differentialquotienten von $U_x(\alpha, \varphi)$ nach x_i bedeuten, soweit x_i in den φ_j und den α_x vorkommt, dagegen $\frac{\partial'}{\partial x_i} U_x(\alpha, \varphi)$ den Differentialquotienten nach x_i, soweit dasselbe in den φ_j vorkommt, so dass also die Gleichung besteht:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} U_x(\alpha, \varphi) = \sum_1^m{}_\mu \alpha_{\mu i} \frac{\partial}{\partial \alpha_\mu} U_x(\alpha, \varphi) + \frac{\partial'}{\partial x_i} U_x(\alpha, \varphi).$$

Nach diesen Festsetzungen können wir den Ausdruck berechnen, welcher sich bei der besprochenen Combination für $U_x\left(\alpha, \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ ergiebt. Es wird identisch:

$$U_x\left(\alpha, \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \equiv \sum_1^n{}_i \left(\varphi_i \frac{\partial'}{\partial x_i} U_x(\alpha, \psi) - \psi_i \frac{\partial'}{\partial x_i} U_x(\alpha, \varphi)\right) +$$
$$+ \sum_1^m{}_j \left\{ U_j(\alpha, \varphi) \frac{\partial}{\partial \alpha_j} U_x(\alpha, \psi) - U_j(\alpha, \psi) \frac{\partial}{\partial \alpha_j} U_x(\alpha, \varphi) \right\}.$$

In etwas anderer Gestalt lautet diese Gleichung:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} U_x\left(\alpha, \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \equiv & \sum_1^n{}_i \left(\varphi_i \frac{\partial U_x(\alpha, \psi)}{\partial x_i} - \psi_i \frac{\partial U_x(\alpha, \varphi)}{\partial x_i}\right) + \\ & + \sum_1^m{}_j \left\{ \frac{\partial U_x(\alpha, \psi)}{\partial \alpha_j} \left(U_j(\alpha, \varphi) - \sum_1^n{}_\nu \alpha_{j\nu} \varphi_\nu\right) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial U_x(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha_j} \left(U_j(\alpha, \psi) - \sum_1^n{}_\nu \alpha_{j\nu} \psi_\nu\right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Subtrahiren wir endlich hiervon die Identität

$$\sum_1^n{}_\varkappa \alpha_{\varkappa\nu} \sum_1^n{}_\lambda \left(\varphi_\lambda \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_\lambda} - \psi_\lambda \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\lambda}\right)$$
$$\equiv \sum_1^n{}_i \left\{ \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_1^n{}_\nu \alpha_{\varkappa\nu} \psi_\nu\right) - \psi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_1^n{}_\nu \alpha_{\varkappa\nu} \varphi_\nu\right) \right\},$$

so kommt die identische Gleichung:

$$(5')\quad \left\{\begin{aligned} & U_x\Big(\alpha,\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)-\sum_1^n{}_\nu\,\alpha_{x\nu}\sum_1^n{}_\lambda\Big(\varphi_\lambda\frac{\partial\psi_\nu}{\partial x_\lambda}-\psi_\lambda\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\lambda}\Big)\\ &\quad=\sum_1^n{}_i\Big\{\varphi_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(U_x(\alpha,\psi)-\sum_1^n\alpha_{x\nu}\psi_\nu\Big)-\\ &\quad-\psi_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(U_x(\alpha,\varphi)-\sum_1^n\alpha_{x\nu}\varphi_\nu\Big)\Big\}+\\ &\quad+\sum_1^m{}_j\Big\{\frac{\partial}{\partial\alpha_j}U_x(\alpha,\psi)\Big(U_x(\alpha,\varphi)-\sum_1^n\alpha_{x\nu}\varphi_\nu\Big)\\ &\quad-\frac{\partial}{\partial\alpha_j}U_x(\alpha,\varphi)\Big(U_x(\alpha,\psi)-\sum_1^n\alpha_{x\nu}\psi_\nu\Big)\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichung (5′) zeigt es klar, dass das System von D tialgleichungen (3′) ein System von Definitionsgleichungen da Ein weiteres Eingehen hierauf dürfte überflüssig sein.

Noch bleibt zu zeigen, dass das System (3′) die infinites Transformationen (4) gestattet. Um diess zu beweisen, ertheil den Variabeln x_i, ξ_i und α_x die Incremente:

$$\delta x_i=\varphi_i\delta t,\qquad \delta\xi_i=\sum_1^n{}_j\,\xi_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\,\delta t,\qquad \delta\alpha_x=U_x(\alpha,\varphi)\delta t$$

und haben nun das entsprechende Increment von $U_x(\alpha,\xi)$ — zu berechnen.

Setzen wir

$$\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n}}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_n^{\nu_n}}\,\xi_i=\xi_i^{(\nu_1\cdots\nu_n)},$$

so gilt die allgemeine Formel:

$$\frac{\delta\xi_i^{(\nu_1\cdots\nu_n)}}{\delta t}=\sum_1^n{}_j\frac{\partial\xi_i^{(\nu_1\cdots\nu_n)}}{\partial x_j}\varphi_j+\sum_1^n{}_j\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n}}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_n^{\nu_n}}\Big(\xi_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}-\varphi_j\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}$$

bei deren sehr einfachem Beweise wir uns nicht aufhalten Aus der Gleichung

$$d\alpha_x-\sum_1^n{}_\nu\,\alpha_{x\nu}\,dx_\nu=0$$

ergiebt sich ausserdem für das Increment von $\alpha_{x\nu}$ der Ausdruck

$$\frac{\delta\alpha_{x\nu}}{\delta t}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}U_x(\alpha,\varphi)-\sum_1^n{}_\pi\,\alpha_{x\pi}\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu}.$$

Nunmehr können wir das gewünschte Increment berechnen. Da $U_\varkappa(\alpha, \xi)$ in den ξ und deren Differentialquotienten linear und homogen ist, erhalten wir:

$$\frac{\delta}{\delta t}\Big(U_\varkappa(\alpha,\xi)-\sum_1^n \alpha_{\varkappa\nu}\xi_\nu\Big)=\sum_1^n \varphi_\pi \frac{\partial}{\partial x_\pi} U_\varkappa(\alpha,\xi)+U_\varkappa\Big(\alpha,\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\varphi\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)+$$

$$+\sum_1^m U_j(\alpha,\varphi)\frac{\partial}{\partial\alpha_j}U_\varkappa(\alpha,\xi)-\sum_1^n \alpha_{\varkappa\nu}\sum_1^n \xi_\pi\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\pi}-$$

$$-\sum_1^n \xi_\nu\Big(\frac{\partial}{\partial x_\nu}U_\varkappa(\alpha,\varphi)-\sum_1^n \alpha_{\varkappa\pi}\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu}\Big).$$

Hieraus aber ergiebt sich durch Benutzung der Identität (5) die einfache Formel:

$$(6)\quad \frac{\delta}{\delta t}\Big(U_\varkappa(\alpha,\xi)-\sum_1^n \alpha_{\varkappa\nu}\xi_\nu\Big)=\sum_1^m \frac{\partial}{\partial\alpha_j}U_\varkappa(\alpha,\varphi)\Big\{U_j(\alpha,\xi)-\sum_1^n \alpha_{j\nu}\xi_\nu\Big\}.$$

Diese Gleichung sagt eben aus, dass das System der Gleichungen (3') die infinitesimalen Transformationen (4) gestattet.

12. Ein System, welches aus Differentialgleichungen s^{ter} und niedrigerer Ordnung besteht, ist *unbeschränkt* integrabel, wenn es bei ein- und mehrmaliger Differentiation und nachheriger Combination der erhaltenen Gleichungen keine neue Differentialgleichung von s^{ter} oder geringerer Ordnung ergiebt.

Ist ein vorgelegtes System von Differentialgleichungen nicht unbeschränkt integrabel, so müssen vermittels der angedeuteten Operationen neue Differentialgleichungen hinzugefügt werden, bis es schliesslich zu einem unbeschränkt integrablen Systeme vervollständigt ist; erst wenn diess geschehen, kann man die eigentliche Untersuchung des Systems beginnen. Wir wollen uns deshalb die Definitionsgleichungen einer Gruppe immer in der Gestalt eines unbeschränkt integrablen Systems vorgelegt denken.

Im Allgemeinen wird natürlich das System

$$(7)\qquad U_\varkappa(\alpha,\xi)-\sum_1^n \alpha_{\varkappa\nu}\xi_\nu=0 \qquad (\varkappa=1\ldots m),$$

welches etwa Differentialquotienten von den ξ bis zur s^{ten} Ordnung enthalten möge, nicht unbeschränkt integrabel sein, so lange unter $\alpha_1\ldots\alpha_m$ vollkommen willkürliche Functionen von $x_1\ldots x_n$ verstanden werden. Durch Differentiation und Combination ergeben sich vielmehr in den meisten Fällen neue Gleichungen s^{ter} und niedrigerer Ordnung. Wenn wir aber verlangen, dass unser System (7) unbeschränkt integrabel

ist, müssen diese neuen Gleichungen eine Folge des Systems (7) werden; sie müssen somit identisch bestehen, wenn vermittels der Gleichungen (7) irgend m von den Grössen $\xi_i, \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} \cdots$ eliminirt werden. In den Gleichungen, welche wir nach Ausführung dieser Elimination erhalten, müssen daher die Coefficienten aller noch vorkommenden $\xi_i, \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} \cdots$ verschwinden.

Diess giebt eine Anzahl Relationen zwischen den $\alpha_\varkappa$ und ihren Differentialquotienten:

$$(8) \qquad \chi_\varkappa(\alpha_1 \ldots \alpha_m, \alpha_{11}, \alpha_{12} \ldots \alpha_{111} \ldots) = 0 \quad (\varkappa = 1,2 \ldots).$$

Solcher Relationen denken wir uns gerade so viele aufgestellt, dass sie ein unbeschränkt integrables System bilden, vermöge dessen das System (7) unbeschränkt integrabel ist. Vorausgesetzt wird dabei freilich, dass diess überhaupt möglich ist.

Die Differentialgleichungen (8) definiren alle Functionen $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ der Variabeln $x_1 \ldots x_n$, welche in (7) eingesetzt ein unbeschränkt integrables System ergeben; die Gleichungen (8) sind daher die Integrabilitätsbedingungen des Systems (7).

Es liegt äusserst nahe zu vermuthen, dass die Integrabilitätsbedingungen (8) bei den infinitesimalen Transformationen

$$(9) \qquad \sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}$$

invariant bleiben, ebenso wie das System (7) bei den infinitesimalen Transformationen

$$(10) \qquad \sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\nu \xi_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}.$$

Wir werden einen Beweis dafür, dass diess wirklich der Fall ist, wenigstens andeuten.

Zunächst steht fest, dass ein unbeschränkt integrables System von Differentialgleichungen bei jeder Variabelnänderung in ein ebensolches System übergeht. Führen wir daher in (7) die neuen Variabeln

$$\bar{x}_i = \omega_i(x_1 \ldots x_n), \quad \bar{\xi}_i = \sum_1^n{}_\nu \xi_\nu \frac{\partial \omega_i}{\partial x_\nu} \quad (i = 1 \ldots n)$$

ein und bilden sodann aus den erhaltenen Differentialgleichungen in derselben Weise wie oben die Integrabilitätsbedingungen, so erhalten wir ein unbeschränkt integrables System von Differentialgleichungen für $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ und dieses System muss bei Wiedereinführung der

ursprünglichen Variabeln x_i mit den Integrabilitätsbedingungen (8) algebraisch äquivalent sein.

Wir führen jetzt in die Gleichungen (7) die neuen Variabeln

$$\bar{x}_i = x_i + \varphi_i\,\delta t, \quad \bar{\xi}_i = \xi_i + \sum_1^n{}_\nu\, \xi_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu}\cdot \delta t \quad (i = 1 \ldots n)$$

ein. Definiren wir ausserdem noch die Functionen $\bar{\alpha}_\varkappa$ durch die Gleichungen

$$\bar{\alpha}_\varkappa = \alpha_\varkappa + U_\varkappa(\alpha, \varphi)\,\delta t \quad (\varkappa = 1 \ldots m)$$

und erinnern uns daran, dass das System (7) die infinitesimalen Transformationen (10) gestattet, so erkennen wir, dass dieses System in den neuen Variabeln die Gestalt

$$U_\varkappa(\bar{\alpha}, \bar{\xi}) - \sum_1^n{}_\nu\, \bar{\alpha}_{\varkappa\nu}\bar{\xi}_\nu = 0 \qquad (\varkappa = 1 \ldots m)$$

annimmt.

Die neuen Integrabilitätsbedingungen werden daher:

$$\chi_\varkappa(\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_m,\ \bar{\alpha}_{11} \ldots \bar{\alpha}_{111} \ldots) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots)$$

oder bei der Rückkehr zu den alten Variabeln:

$$\chi_\varkappa(\alpha_1 \cdots \alpha_m,\ \alpha_{11} \cdots) + \frac{\delta}{\delta t}\chi_\varkappa(\alpha_1 \cdots \alpha_m,\ \alpha_{11} \cdots)\,\delta t = 0.$$

Dieselben müssen nach dem Obigen mit dem Systeme der Gleichungen $\chi_\varkappa = 0$ algebraisch äquivalent sein, es müssen also alle Ausdrücke

$$\frac{\delta}{\delta t}\chi_\varkappa(\alpha_1 \ldots \alpha_m,\ \alpha_{11} \ldots)$$

vermöge $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0 \ldots$ verschwinden. Das heisst aber nichts anderes, als dass die Integrabilitätsbedingungen (8) die infinitesimalen Transformationen (9) gestatten und das wurde eben behauptet.

Die Differentialgleichungen

$$(11) \qquad \begin{cases} U_\varkappa(\alpha, \xi) - \sum_1^n{}_\nu\, \alpha_{\varkappa\nu}\,\xi_\nu = 0 & (\varkappa = 1 \ldots m) \\ \chi_j(\alpha_1 \ldots \alpha_m,\ \alpha_{11} \ldots) = 0 & (j = 1, 2 \ldots) \end{cases}$$

bilden demnach zusammengenommen ein unbeschränkt integrables System, welches die unendliche Gruppe (10) *gestattet. Dieses System definirt eine unendliche Schaar von Gruppen*, denn jedes System von Functionen $\alpha_\varkappa$, welches die Gleichungen $\chi_j = 0$ befriedigt, ergiebt, wie wir wissen, in (11) eingesetzt die Definitionsgleichungen einer Gruppe von infinitesimalen Transformationen.

Interpretiren wir die Gleichungen (11) im Raume der Variabeln

$x_i, \xi_i, \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} \cdots, \alpha_\varkappa, \alpha_{\varkappa\nu} \cdots$, so erhalten wir eine Mannigfaltigkeit, welche bei den infinitesimalen Transformationen (10) invariant bleibt, vorausgesetzt, dass dieselben durch Mitnahme der Differentialquotienten $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} \cdots, \alpha_{\varkappa\nu} \cdots$ erweitert worden sind. Die Punkte der betreffenden Mannigfaltigkeit werden dagegen unter einander vertauscht und es kann dabei vorkommen, dass sich diese Punkte in Schaaren von unendlich vielen einzeln invarianten Mannigfaltigkeiten anordnen.

Analytisch ausgesprochen heisst diess: es ist denkbar, dass man zu den Differentialgleichungen (11) noch eine oder mehrere Differentialgleichungen s^{ter} oder niedrigerer Ordnung

$$\Omega\left(x_i, \xi_i, \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa}, \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_\varkappa \partial x_j} \cdots \alpha_\varkappa, \alpha_{\varkappa\nu} \cdots\right) = \text{const.}$$

hinzufügen kann, derart, dass alles zusammengenommen ein System von Differentialgleichungen bildet, welches bei der unendlichen Gruppe (10) invariant bleibt.

Erinnern wir uns der analogen Entwickelungen, welche wir in § 1 Nr. 4 für die einfache Mannigfaltigkeit gegeben haben, so kommen wir sofort auf den Gedanken, dass jede solche Gleichung $\Omega = \text{const.}$ ein Integral des Systems (11) ist. Allein die Beweismethode, deren wir uns an dem angeführten Orte bedient haben, lässt uns hier im Stich; sie reicht nicht aus, um zu zeigen, dass $\Omega = \text{const.}$ wirklich ein Integral ist. Man wird diess sofort sehen, wenn man die dortigen Formeln verallgemeinert, was gar keine Schwierigkeit hat.

Einen Beweis für die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Vermuthung zu finden, ist mir noch nicht gelungen. Doch will ich nicht unterlassen zu bemerken, dass in allen Beispielen, welche ich durchgerechnet habe, die Gleichungen $\Omega = \text{const.}$ Integrale des Systems (11) sind. —

Noch wollen wir eines Umstandes kurz Erwähnung thun, den wir am Schlusse von § 1 für die einfache Mannigfaltigkeit etwas ausführlicher besprochen haben. Es ist diess die Thatsache, dass es auf die Differentialgleichungen (3′) keinen wesentlichen Einfluss hat, wenn man in die unendliche Gruppe (1) an Stelle von $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ die neuen Variabeln

$$(12) \qquad \alpha'_\varkappa = \omega_\varkappa(\alpha_1 \ldots \alpha_m) + \pi_\varkappa(x_1 \ldots x_n) \qquad (\varkappa = 1 \ldots m)$$

einführt, unter den $\omega_\varkappa$ und $\pi_\varkappa$ willkürliche Functionen ihrer Argumente verstanden. Diess auch hier ausführlich zu beweisen, dürfte kaum nöthig sein. Doch musste die Sache erwähnt werden, weil wir in den nächsten Paragraphen die unendliche Gruppe (1) immer durch

eine Transformation von der Form (12) auf eine möglichst einfache Gestalt gebracht denken. In den betreffenden Fällen sind übrigens die Functionen π_x immer gleich Null.

§ 4.

Einige Specialuntersuchungen für die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.

13. *Zuerst werden wir solche unendliche Gruppen*

$$\sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_x U_x(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_x}$$

betrachten, bei welchen in den U_x nur Differentialquotienten erster Ordnung der φ_i vorkommen. Der Einfachheit wegen wollen wir noch voraussetzen, dass $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ selbst nicht auftreten.

Verstehen wir unter den $A_{ix} f$ infinitesimale Transformationen in $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ allein, so können wir die betreffenden Gruppen schreiben:

$$(1) \qquad Xf = \sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_x A_{ix} f \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_x}.$$

Durch Combination mit

$$Yf = \sum_1^n{}_i \psi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_x A_{ix} f \frac{\partial \psi_i}{\partial x_x}$$

erhalten wir daher die infinitesimale Transformation

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} (XY) = &\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\nu \left(\varphi_\nu \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu} - \psi_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \\ &+ \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_x \sum_1^n{}_\nu A_{ix} f \left(\varphi_\nu \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_\nu \partial x_x} - \psi_\nu \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\nu \partial x_x} \right) + \\ &+ \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_x \sum_1^n{}_\mu \sum_1^n{}_\nu (A_{ix}, A_{\mu\nu}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_x} \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_\nu}. \end{aligned} \right.$$

Diese Transformation muss aber wieder der Gruppe (1) angehören und in Folge dessen auf die Form

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} (XY) = &\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\nu \left(\varphi_\nu \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu} - \psi_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \\ &+ \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_x \sum_1^n{}_\nu A_{ix} f \frac{\partial}{\partial x_x} \left(\varphi_\nu \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu} - \psi_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \right) \end{aligned} \right.$$

gebracht werden können.

Vergleichen wir beide Ausdrücke mit einander, so bemerken w dass eine ganze Reihe Glieder sich ohne Weiteres weghebt. Die V gleichung der übrig bleibenden Ausdrücke wird aber dadurch erschwe dass in (3) drei Summenzeichen stehen, in (2) dagegen vier.

Diesem Uebelstande können wir abhelfen, indem wir auch in (vier Summenzeichen einführen. Setzen wir nämlich fest, dass $\varepsilon_{\nu\nu}$ d Werth 1 hat, während $\varepsilon_{\mu\nu}$ immer verschwindet, sobald μ und ν v einander verschieden sind, so können wir das betreffende Glied v (3) in der Form

$$\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_x \sum_1^n{}_\mu \sum_1^n{}_\nu \varepsilon_{\mu\nu} A_{ix} \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \right)$$

darstellen oder noch anders:

$$\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_x \sum_1^n{}_\mu \sum_1^n{}_\nu (\varepsilon_{i\nu} A_{\mu x} - \varepsilon_{\mu x} A_{i\nu}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_x} \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_\nu}.$$

Nunmehr können wir die Vergleichung mit dem entsprechende Ausdruck in (2) wirklich durchführen. Beachten wir dabei, dass di φ_i und ψ_i vollkommen willkürlich sind und dass jedes Produc $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_x} \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_\nu}$ unter den vier Summen nur ein einziges Mal vorkommt, s finden wir die Relationen:

$$(4) \qquad (A_{ix} A_{\mu\nu}) = \varepsilon_{i\nu} A_{\mu x} - \varepsilon_{\mu x} A_{i\nu}.$$

Es lässt sich a priori einsehen, dass die eben erhaltenen Werthe der Ausdrücke $(A_{ix} A_{\mu\nu})$ die Jacobi'sche Identität

$$(5) \qquad \big((A_{ix} A_{\mu\nu}) A_{\pi\varrho}\big) + \big((A_{\mu\nu} A_{\pi\varrho}) A_{ix}\big) + \big((A_{\pi\varrho} A_{ix}) A_{\mu\nu}\big) = 0$$

befriedigen. Denken wir uns nämlich aus den drei infinitesimalen Transformationen Xf, Yf und

$$Zf = \sum_1^n{}_i \chi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_x A_{ix} f \frac{\partial \chi_i}{\partial x_x}$$

den Ausdruck

$$(6) \qquad \big((X\,Y)\,Z\big) + \big((Y\,Z)\,X\big) + \big((Z\,X)\,Y\big),$$

welcher identisch verschwinden muss, gebildet, so erkennen wir, dass derselbe nur vermöge der Gleichungen (5) verschwindet.

Beachten wir aber weiter, dass z. B. $(X\,Y)$ vermöge (4) die Form (3) erhält und dass sich $((X\,Y)\,Z)$ in ähnlicher Weise ausdrückt, so sehen wir, dass der Ausdruck (6) auch vermöge (4) identisch verschwindet, was nach dem Vorangehenden nur möglich ist, wenn die Gleichungen (5) eine Folge von (4) sind.

Daraus folgt (vgl. Einl. F), dass die n^2 infinitesimalen Transformationen $A_{ix}f$ eine endliche Gruppe erzeugen, deren Zusammensetzung durch die Relationen (4) bestimmt ist. Dass es übrigens Gruppen giebt, welche die Relationen (4) befriedigen, hätten wir in dem vorliegenden einfachen Falle kürzer erkennen können. Setzen wir nämlich $A_{ix}f = -x_i \frac{\partial f}{\partial x_x}$, so werden die Gleichungen (4) erfüllt und wir finden daher, dass die infinitesimalen Transformationen $A_{ix}f$ eine mit der Gruppe $x_i \frac{\partial f}{\partial x_x}$ isomorphe Gruppe erzeugen müssen. Die Gruppe $x_i \frac{\partial f}{\partial x_x}$ aber enthält n^2 Parameter und ist die allgemeine lineare homogene Gruppe der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit; die endlichen Gleichungen dieser Gruppe sind:

$$x_i' = \sum_1^n x \, a_{ix} x_x \qquad (i = 1 \ldots n).$$

Die Gruppe der $A_{ix}f$ ist mit der Gruppe $x_i \frac{\partial f}{\partial x_x}$ entweder holoedrisch oder meroedrisch isomorph. Den Fall des holoedrischen Isomorphismus wollen wir bei Seite lassen, da seine Behandlung zu weitläufig werden möchte. *Dagegen wollen wir diejenigen Gruppen bestimmen, welche mit der Gruppe* $x_i \frac{\partial f}{\partial x_x}$ *meroedrisch isomorph sind und dabei die geringste mögliche Anzahl von Variabeln enthalten.*

Die allgemeine lineare homogene Gruppe $x_i \frac{\partial f}{\partial x_x}$ enthält nur die beiden invarianten Untergruppen

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_x}, \; x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - x_x \frac{\partial f}{\partial x_x} \; (i \neq x); \qquad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Nach dem in der Einleitung unter F gesagten findet man daher auch nur zwei verschiedene Arten von Gruppen $A_{ix}f$, welche mit der Gruppe $x_i \frac{\partial f}{\partial x_x}$ meroedrisch isomorph sind. Zwischen den infinitesimalen Transformationen $A_{ix}f$ dieser beiden Arten von Gruppen bestehen bezüglich folgende Relationen:

$$A_{ix} = 0 \; (i \neq x), \quad A_{11} = A_{22} = \cdots = A_{nn}; \quad A_{11} + \cdots + A_{nn} = 0.$$

Im ersten Falle bleibt also überhaupt nur eine einzige infinitesimale Transformation übrig; die einfachste Gruppe ergiebt sich, wenn eine einzige Variable α transformirt wird. Man kann dann setzen

$$A_{11} = \cdots = A_{nn} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

und erhält so folgende Form der unendlichen Gruppe (1):

$$\sum_1^n \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

und daraus bekommt man die Definitionsgleichung:

$$(7) \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \xi_1 - \cdots - \frac{\partial \alpha}{\partial x_n} \xi_n = 0.$$

Diese Differentialgleichung, in welcher α als ganz beliebige Function von $x_1 \ldots x_n$ zu betrachten ist, definirt eine Schaar von unendlichen Gruppen, welche unter einander ähnlich sind (vgl. Chr. Videnskabss. Forh. 1883, Nr. 12, pag. 18ff., wo Lie diess für zwei Variabeln x und y beweist). Setzt man in (7) speciell $\alpha = 0$, so kommt man auf die unendliche Gruppe, welche alle Volumina des Raumes $x_1 \ldots x_n$ invariant lässt.

Den zweiten Fall wollen wir nur andeutungsweise behandeln. Von den n^2 infinitesimalen Transformationen A_{ix} sind da nur $n^2 - 1$ unabhängig, etwa:

$$A_{ix} (i \neq x), \quad A_{11} \ldots A_{n-1,n-1}.$$

Es zeigt sich, dass diese $(n^2 - 1)$gliedrige Gruppe mit der allgemeinen projectivischen Gruppe

$$(8) \qquad \frac{\partial f}{\partial y_i}, \; y_i \frac{\partial f}{\partial y_x}, \; y_i \sum_1^{n-1} y_j \frac{\partial f}{\partial y_j} \qquad (i, x = 1 \ldots n-1)$$

der $(n-1)$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $y_1 \ldots y_{n-1}$ gleichzusammengesetzt ist. Berücksichtigt man aber einen Satz von Lie (Ann. Bd. XXV pag. 132), so erkennt man, dass es in weniger als $n-1$ Variabeln keine $(n^2 - 1)$gliedrige Gruppe von dieser Zusammensetzung giebt, während dagegen in $n-1$ Variabeln alle derartigen Gruppen mit der Gruppe (8) ähnlich sind. Bei der näheren Untersuchung ergiebt sich, dass die Gruppe $A_{ix} (i \neq x)$, $A_{11} \ldots A_{n-1,n-1}$ in $n-1$ Variabeln $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ auf zwei wesentlich verschiedene Weisen die Form (8) erhalten kann; entweder nämlich ist:

$$A_{in} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad A_{ni} = -\alpha_i \sum_1^{n-1} \alpha_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}, \quad A_{ix} = \alpha_x \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$$

oder es ist:

$$A_{in} = \alpha_i \sum_1^{n-1} \alpha_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}, \quad A_{ni} = -\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad A_{ix} = -\alpha_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_x}.$$

Für A_{nn} ergeben sich dabei bezüglich die Werthe:

$$A_{nn} = -\sum_1^{n-1} \alpha_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}, \quad A_{nn} = \sum_1^{n-1} \alpha_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}.$$

Die zwei unendlichen Gruppen (1), welche diesen beiden Möglichkeiten entsprechen, sind:

$$\sum_1^n \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} + \sum_1^{n-1}\sum_1^{n-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\varkappa} \alpha_\varkappa \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} -$$
$$- \sum_1^{n-1} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \alpha_i \sum_1^{n-1} \alpha_\varkappa \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \sum_1^{n-1} \alpha_\varkappa \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa},$$

$$\sum_1^n \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_1^{n-1} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} - \sum_1^{n-1}\sum_1^{n-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\varkappa} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} +$$
$$+ \sum_1^{n-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \alpha_i \sum_1^{n-1} \alpha_\varkappa \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \sum_1^{n-1} \alpha_\varkappa \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}.$$

Hieraus bekommt man endlich die beiden Systeme von Definitionsgleichungen

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_n} + \sum_1^{n-1} \alpha_\varkappa \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} - \alpha_i \left(\dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_n} + \sum_1^{n-1} \alpha_\varkappa \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_\varkappa} \right) - \sum_1^n \alpha_{i\nu} \xi_\nu = 0 \\ (i = 1 \ldots n-1), \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_i} + \sum_1^{n-1} \alpha_\varkappa \dfrac{\partial \xi_\varkappa}{\partial x_i} - \alpha_i \left(\dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_n} + \sum_1^{n-1} \alpha_\varkappa \dfrac{\partial \xi_\varkappa}{\partial x_n} \right) + \sum_1^n \alpha_{i\nu} \xi_\nu = 0 \\ (i = 1 \ldots n-1). \end{cases}$$

Die Gleichungen (9) definiren die unendliche Gruppe aller infinitesimalen Transformationen, welche das Pfaff'sche Gleichungensystem

$$dx_i - \alpha_i dx_n = 0 \qquad (i = 1 \ldots n-1)$$

invariant lassen. Die Gleichungen (10) definiren die unendliche Gruppe aller infinitesimalen Transformationen, welche die Pfaff'sche Gleichung

$$dx_n + \sum_1^{n-1} \alpha_i dx_i = 0$$

invariant lassen.

14. *Jetzt zur Betrachtung solcher Gruppen*

$$\sum_1^n \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m U_\varkappa(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa},$$

in welchen die $U_\varkappa$ Differentialquotienten 1. und 2. Ordnung der enthalten, während die φ_i selbst nicht darin vorkommen.

Wir schreiben diese infinitesimalen Transformationen in der Form

$$(11)\quad \sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa A_{i\varkappa} f \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\varkappa} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa \sum_1^n{}_j A_{i\varkappa j} f \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\varkappa \partial x_j}.$$

Dabei verstehen wir unter den $A_{i\varkappa} f$ und $A_{i\varkappa j} f$ infinitesimale Transformationen in den Variabeln $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ allein und setzen ausserdem fest, dass $A_{i\varkappa j} f$ gleich $A_{ij\varkappa} f$ sein soll, dass also jeder Differentialquotient $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\varkappa \partial x_j}$ mit dem Factor $2 A_{i\varkappa j} f$ auftritt, sobald $\varkappa$ und j von einander verschieden sind.

Combiniren wir nun die infinitesimale Transformation

$$\sum_1^n{}_i \psi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa A_{i\varkappa} f \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\varkappa} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa \sum_1^n{}_j A_{i\varkappa j} f \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_\varkappa \partial x_j}$$

mit der obigen, so müssen wir bekommen:

$$(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\nu \left(\varphi_\nu \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu} - \psi_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu}\right) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \\ \displaystyle + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa \sum_1^n{}_\nu A_{i\varkappa} f \frac{\partial}{\partial x_\varkappa} \left(\varphi_\nu \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu} - \psi_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu}\right) + \\ \displaystyle + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa \sum_1^n{}_j \sum_1^n{}_\nu A_{i\varkappa j} f \frac{\partial^2}{\partial x_\varkappa \partial x_j} \left(\varphi_\nu \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu} - \psi_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu}\right). \end{cases}$$

Durch directe Combination kommt ein anderer Ausdruck, welcher mit dem eben geschriebenen identisch sein muss. Vergleichen wir beide, so fällt uns zunächst auf, dass alle Glieder, in welchen φ_ν oder ψ_ν selbst vorkommen, sich wegheben. Ferner ergiebt sich wie in der vorigen Nummer

$$(A_{i\varkappa} A_{\mu\nu}) = \varepsilon_{i\nu} A_{\mu\varkappa} - \varepsilon_{\mu\varkappa} A_{i\nu};$$

endlich schliessen wir noch, dass stets

$$(A_{i\varkappa j} A_{\mu\nu\pi}) = 0$$

ist, denn in (12) kommt ein Glied von der Form

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\varkappa \partial x_j} \frac{\partial^2 \psi_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\pi} - \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_\varkappa \partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\pi}$$

nicht vor.

Was übrig bleibt, ist die Gleichung:

$$(13)\quad \begin{cases} \sum_1^n \sum_1^n \sum_1^n \sum_1^n \sum_1^n (A_{ix} A_{\mu\nu\pi}) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_x} \frac{\partial^2 \psi_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\pi} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x_x} \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\pi} \right) \\ = \sum_1^n \sum_1^n \sum_1^n \sum_1^n \sum_1^n A_{ixj} \left\{ \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_x} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_\nu \partial x_j} - \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_x} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\nu \partial x_j} + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_\nu \partial x_x} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\nu \partial x_x} - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2 \psi_\nu}{\partial x_x \partial x_j} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x_x \partial x_j} \right) \right\}. \end{cases}$$

Um hier die Vergleichung zu erleichtern, führen wir wieder die Grössen ε_{ix} ein und können so die rechte Seite von (13) in etwas veränderter Gestalt folgendermassen schreiben:

$$(14)\quad \begin{cases} \sum_1^n \sum_1^n \sum_1^n \sum_1^n \sum_1^n \{ \varepsilon_{i\nu} A_{\mu x \pi} + \varepsilon_{i\pi} A_{\mu \nu x} - \\ \qquad - \varepsilon_{\mu x} A_{i\nu\pi} \} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_x} \frac{\partial^2 \psi_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\pi} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x_x} \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\pi} \right). \end{cases}$$

Ueber den Ausdruck (14) bemerken wir, dass jedes Glied

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_x} \frac{\partial^2 \psi_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\pi} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x_x} \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\pi},$$

wenn ν und π verschieden sind, zweimal vorkommt aber beide Male mit demselben Factor; dagegen kommt das Glied nur einmal vor, wenn ν und π gleich sind. Dieselbe Bemerkung lässt sich über die linke Seite von (13) machen. Da nun die φ_i und ψ_i vollkommen willkürlich sind, finden wir aus (13) und (14) die Formel

$$(A_{ix} A_{\mu\nu\pi}) = \varepsilon_{i\nu} A_{\mu x \pi} + \varepsilon_{i\pi} A_{\mu\nu x} - \varepsilon_{x\mu} A_{i\nu\pi},$$

welche allgemein gilt, gleichgültig, ob ν und π verschieden oder einander gleich sind.

Die infinitesimalen Transformationen $A_{ix}f$, $A_{ixj}f$ müssen demnach folgende Relationen befriedigen:

$$(15)\quad \begin{cases} (A_{ix} A_{\mu\nu}) = \varepsilon_{i\nu} A_{\mu x} - \varepsilon_{\mu x} A_{i\nu}, \quad (A_{ixj} A_{\mu\nu\pi}) = 0 \\ (A_{ix} A_{\mu\nu\pi}) = \varepsilon_{i\nu} A_{\mu x \pi} + \varepsilon_{i\pi} A_{\mu\nu x} - \varepsilon_{x\mu} A_{i\nu\pi}. \end{cases}$$

Auf Grund solcher Ueberlegungen, wie wir sie in der vorigen Nummer durchgeführt haben, ist es hier a priori klar, dass die Relationen (15) die Jacobi'sche Identität befriedigen und dass es daher Gruppen giebt, welche die Zusammensetzung (15) haben.

Ebenso wie in der vorigen Nummer handelt es sich auch jetzt wieder darum, in den Variabeln $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ Gruppen aufzustellen, welche die Zusammensetzung (15) oder eine damit meroedrisch isomorphe Zusammensetzung besitzen.

Die einfachsten Gruppen von dieser Beschaffenheit werden wir später (§ 5) wenigstens für die Ebene vollständig aufstellen. Dagegen wollen wir jetzt noch in voller Allgemeinheit das Problem behandeln, die Zusammensetzungen aller Gruppen zu bestimmen, welche mit der Zusammensetzung (15) meroedrisch isomorph sind. Wie schon früher bemerkt (vgl. Einl. F), müssen wir dazu erst die invarianten Untergruppen der Gruppe $A_{ix}f$, $A_{ixj}f$ von der Zusammensetzung (15) aufstellen.

15. Zuvörderst werden wir diejenigen invarianten Untergruppen der Gruppe $A_{ix}f$, $A_{ixj}f$ von vornherein ausschliessen, welche alle Transformationen $A_{ixj}f$ enthalten. Diese Untergruppen würden nämlich offenbar nur solche meroedrisch isomorphe Gruppen liefern, welche wir schon in Nr. 13 bestimmt haben.

Enthält ferner eine invariante Untergruppe Transformationen von der Form

$$\sum_1^n \sum_1^n \alpha_{ix} A_{ix} + \sum_1^n \sum_1^n \sum_1^n \alpha_{ixj} A_{ixj}$$

und verschwinden nicht alle α_{ix}, so müssen offenbar alle auftretenden Ausdrücke $\Sigma\Sigma\alpha_{ix}A_{ix}$ in der Gruppe der A_{ix} eine invariante Untergruppe bilden. Diese Ausdrücke besitzen daher eine der beiden Formen

$$A_{11} + \cdots + A_{nn}; \quad A_{ix}, \; A_{ii} - A_{xx} \; (i \neq x),$$

wenn nicht etwa alle n^2 A_{ix} vorhanden sind.

In jedem dieser drei Fälle giebt es eine oder mehrere Transformationen von der Form

$$S = \sum_1^n \alpha_i A_{ii} + \sum_1^n \sum_1^n \sum_1^n \beta_{ixj} A_{ixj},$$

also enthält die invariante Untergruppe auch die folgenden Transformationen:

$$(S, A_{\mu\nu\pi}) = (\alpha_\nu + \alpha_\pi - \alpha_\mu) A_{\mu\nu\pi}.$$

Da man aber in jedem der drei Fälle die Factoren α_μ, α_ν, α_π so wählen kann, dass der Ausdruck $\alpha_\nu + \alpha_\pi - \alpha_\mu$ nicht verschwindet, giebt es in der invarianten Untergruppe die Transformation $A_{\mu\nu\pi}$ und, da μ, ν, π willkürlich sind, überhaupt alle diese Transformationen. Solche Untergruppen gehören aber in die Reihe der ausgeschlossenen.

Uebrig bleiben also nur diejenigen invarianten Untergruppen, deren Transformationen aus den $A_{\mu\nu\pi}$ allein gebildet sind.

Es sei

$$\sum_1^n \sum_1^n \sum_1^n \alpha_{\mu\nu\pi} A_{\mu\nu\pi} \tag{16}$$

eine Transformation einer Gruppe von dieser Art. Indem wir zweimal hintereinander mit A_{11} combiniren, erhalten wir die folgenden beiden infinitesimalen Transformationen, welche ebenfalls der invarianten Untergruppe angehören:

$$2\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\sum_{1}^{n}{}_{\pi}\alpha_{\mu 1\pi}A_{\mu 1\pi}-\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\sum_{1}^{n}{}_{\pi}\alpha_{1\nu\pi}A_{1\nu\pi},$$

$$2\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\sum_{1}^{n}{}_{\pi}\alpha_{\mu 1\pi}A_{\mu 1\pi}+2\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\alpha_{\mu 11}A_{\mu 11}-4\sum_{1}^{n}{}_{\pi}\alpha_{11\pi}A_{11\pi}+$$

$$+\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\sum_{1}^{n}{}_{\pi}\alpha_{1\nu\pi}A_{1\nu\pi}.$$

Durch Subtraction der oberen Transformation von der unteren finden wir von dem Factor 2 abgesehen:

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\sum_{1}^{n}{}_{\pi}\alpha_{1\nu\pi}A_{1\nu\pi}+\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\alpha_{\mu 11}A_{\mu 11}-2\sum_{1}^{n}{}_{\pi}\alpha_{11\pi}A_{11\pi}$$

oder zusammengezogen:

$$\sum_{2}^{n}{}_{\nu}\sum_{2}^{n}{}_{\pi}\alpha_{1\nu\pi}A_{1\nu\pi}+\sum_{2}^{n}{}_{\mu}\alpha_{\mu 11}A_{\mu 11}$$

und durch abermalige Combination mit A_{11}:

$$-\sum_{2}^{n}{}_{\nu}\sum_{2}^{n}{}_{\pi}\alpha_{1\nu\pi}A_{1\nu\pi}+2\sum_{2}^{n}{}_{\mu}\alpha_{\mu 11}A_{\mu 11}.$$

Folglich enthält unsere Untergruppe auch die Transformationen:

$$\sum_{2}^{n}{}_{\mu}\alpha_{\mu 11}A_{\mu 11},\qquad\sum_{2}^{n}{}_{\nu}\sum_{2}^{n}{}_{\pi}\alpha_{1\nu\pi}A_{1\nu\pi}.$$

Bei Combination mit A_{22} ergiebt sich

$$-\alpha_{211}A_{211},\qquad 2\sum_{2}^{n}{}_{\pi}\alpha_{12\pi}A_{12\pi}$$

und endlich bei Combination des letzten Ausdrucks mit A_{33}

$$2\alpha_{123}A_{123}.$$

Es ist klar, dass man auf diese Weise überhaupt alle Glieder $\alpha_{\mu\nu\pi}A_{\mu\nu\pi}$ herleiten kann, in welchen μ weder gleich ν noch gleich π ist.

Giebt es daher in einer der gesuchten invarianten Untergruppen eine Transformation (16), *in welcher nicht alle* $\alpha_{\mu\nu\pi}$ $(\nu, \pi \gtrless \mu)$ *gleich*

Null sind, so kommt in dieser Untergruppe jedenfalls eine Transformation $A_{\mu\nu\pi}\,(\nu, \pi \gtrless \mu)$ *vor* und wir behaupten *alle.*

Zunächst sei die Zahl n, welche wir nebenbei bemerkt immer mindestens gleich 2 voraussetzen, grösser als 2 und in dem vorhandenen $A_{\mu\nu\pi}$ sei auch $\nu \neq \pi$, nennen wir es etwa A_{123}. Wir bilden:

$$(A_{ix}A_{123}) = \varepsilon_{i2}A_{1x3} + \varepsilon_{i3}A_{12x} - \varepsilon_{x1}A_{i23}$$

und setzen darin $i = 3$, $x = 2$; dabei ergiebt sich A_{122}, welches ebenfalls der invarianten Untergruppe angehört. Unter allen Umständen können wir daher voraussetzen, dass in dem auftretenden $A_{\mu\nu\pi}$ ν gleich π ist; wir nennen es deshalb A_{122} und brauchen nunmehr auch die Beschränkung $n > 2$ nicht aufrecht zu erhalten.

Nun gehört mit A_{122} auch die Transformation

$$(A_{ix}A_{122}) = 2\varepsilon_{i2}A_{12x} - \varepsilon_{x1}A_{i22}$$

der invarianten Untergruppe an. Wählen wir daher $x = 1$, $i \gtrless 2$, so bekommen wir alle $A_{i22}\,(i \gtrless 2)$; ferner ergiebt $x > 1$, $i = 2$ alle $A_{12x}\,(x > 1)$ und, da wir alle $A_{i22}\,(i \gtrless 2)$ haben, erhalten wir überhaupt alle $A_{i2x}\,(i \gtrless x,\ i \gtrless 2)$. Wie wir oben A_{i22} aus A_{123} herleiteten, können wir jetzt aus A_{i2x} alle $A_{jxx}\,(j \gtrless x)$ herleiten. Endlich liefert uns noch die Gleichung:

$$(A_{ix}, A_{\mu\nu\nu}) = 2\varepsilon_{i\nu}A_{\mu\nu x} - \varepsilon_{x\mu}A_{i\nu\nu} \qquad (\mu \gtrless \nu)$$

bei der Substitution $i = \nu$, $x \gtrless \mu$ alle $A_{\mu\nu x}\,(\mu \gtrless \nu,\ x)$, wie wir behauptet hatten; überdiess aber erhalten wir bei der Substitution $i = \nu$, $x = \mu$ noch:

$$2A_{\mu\mu\nu} - A_{\nu\nu\nu}\ (\mu \gtrless \nu).$$

Man kann unmittelbar verificiren, dass die infinitesimalen Transformationen

$$A_{\mu\nu\pi},\ A_{\mu\mu\mu} - 2A_{\nu\nu\mu}\ (\nu,\ \pi \gtrless \mu) \tag{17}$$

eine invariante Untergruppe von der gesuchten Art bilden. Gäbe es nun eine invariante Untergruppe, in welcher alle Transformationen (17) und ausserdem noch andere vorhanden wären, so müsste dieselbe eine Transformation

$$\sum_1^n{}^{\mu}\, \gamma_\mu A_{\mu\mu\mu}$$

enthalten, wo nicht alle γ_μ verschwänden. Wäre hier etwa $\gamma_1 \neq 0$, so erhielte man durch Combination mit A_{11} sofort A_{111}, also träten alle $A_{\mu\mu 1}$ auf und, weil

$$(A_{1\mu}\,A_{\mu\mu}) = A_{\mu\mu\mu} - A_{1\mu 1} \quad (\mu > 1)$$

ist, enthielte die Gruppe alle $A_{\mu\mu\mu}$ u. s. w. kurz überhaupt alle $A_{\mu\nu\pi}$, was ausgeschlossen ist.

Jetzt sind noch diejenigen invarianten Untergruppen zu bestimmen, welche nur solche Transformationen (16) *enthalten, in denen alle* $\alpha_{\mu\nu\pi}(\nu, \pi \gtrless \mu)$ *gleich Null sind.* Jede Transformation einer solchen Gruppe hat die Form:

$$\sum_1^n{}_\mu \sum_1^n{}_\pi \alpha_{\mu\mu\pi} A_{\mu\mu\pi}.$$

Durch Combination mit $A_{\varkappa\varkappa}$ bekommen wir

$$\sum_1^n{}_\pi \alpha_{\varkappa\varkappa\pi} A_{\varkappa\varkappa\pi} + \sum_1^n{}_\mu \alpha_{\mu\mu\varkappa} A_{\mu\mu\varkappa} - \sum_1^n{}_\pi \alpha_{\varkappa\varkappa\pi} A_{\varkappa\varkappa\pi}$$

oder zusammengezogen:

$$\sum_1^n{}_\mu \alpha_{\mu\mu\varkappa} A_{\mu\mu\varkappa}.$$

Die Combination mit $A_{i\varkappa}(i \gtrless \varkappa)$ ergiebt:

$$\alpha_{ii\varkappa} A_{i\varkappa\varkappa} - \alpha_{\varkappa\varkappa\varkappa} A_{i\varkappa\varkappa},$$

da aber $A_{i\varkappa\varkappa}$ nicht vorkommt, muss

$$\alpha_{ii\varkappa} = \alpha_{\varkappa\varkappa\varkappa} = \alpha_\varkappa$$

werden. Die $\alpha_\varkappa$ dürfen offenbar nicht alle verschwinden, also enthält unsere Untergruppe sicher eine Transformation von der Form

$$\sum_1^n{}_\mu A_{\mu\mu\pi};$$

bilden wir jetzt noch $(\varkappa \gtrless \pi)$:

$$\left(A_{\pi\varkappa}, \sum_1^n{}_\mu A_{\mu\mu\pi}\right) = A_{\pi\varkappa\pi} + \sum_1^n{}_\mu A_{\mu\mu\varkappa} - A_{\varkappa\varkappa\pi},$$

so erkennen wir, dass unsere Untergruppe die n Transformationen

$$\sum_1^n{}_\mu A_{\mu\mu\nu} \quad (\nu = 1 \ldots n) \tag{18}$$

enthält. Mehr kann sie nach dem Vorhergehenden nicht enthalten. Wirklich bestätigt man leicht, dass die infinitesimalen Transformationen (18) eine invariante Untergruppe bilden.

Damit sind alle invarianten Untergruppen gefunden, welche nicht zu den ausgeschlossenen gehören; es sind nur die *zwei* (17) und (18). *Deshalb erhalten wir auch nur zwei Arten von Gruppen, welche eine*

mit (15) *meroedrisch isomorphe Zusammensetzung haben. Die Art ist durch die Gleichungen*

$$A_{\mu\nu\pi} = 0, \quad A_{\mu\mu\mu} - 2A_{\nu\nu\mu} = 0 \quad (\nu, \pi \neq \mu) \tag{19}$$

charakterisirt, die zweite durch die Gleichungen

$$A_{11\pi} + A_{22\pi} + \cdots + A_{nn\pi} = 0 \quad (\pi = 1 \ldots n). \tag{20}$$

Die einfachsten Gruppen, welche diesen Zusammensetzungen entsprechen, wollen wir, wie gesagt, nur für die *Ebene* vollständig aufstellen (vgl. § 5), *doch soll wenigstens der Fall* (19) *allgemein behandelt werden.*

Von den infinitesimalen Transformationen $A_{\mu\nu\pi}$ sind da nur n unabhängig, etwa $A_{111} \ldots A_{nnn}$ und es bestehen nach (15) die Gleichungen

$$(A_{i\varkappa}\, A_{\pi\pi\pi}) = 2\varepsilon_{i\pi}\, A_{\pi\varkappa\pi} - \varepsilon_{\pi\pi}\, A_{i\pi\pi}.$$

Da wir $A_{i\pi\pi} = \varepsilon_{i\pi} A_{\pi\pi\pi}$ setzen können, wird:

$$(A_{i\varkappa}\, A_{\pi\pi\pi}) = \varepsilon_{i\pi}\,(2A_{\pi\varkappa\pi} - \varepsilon_{\pi\varkappa}\, A_{\pi\pi\pi}),$$

woraus sich bei näherer Betrachtung der beiden Fälle $\varkappa \neq \pi$ und $\varkappa = \pi$ die Formel

$$(A_{i\varkappa}\, A_{\pi\pi\pi}) = \varepsilon_{i\pi}\, A_{\pi\pi\pi}$$

ergiebt.

Der einfachste Fall ist nun der, dass die Zahl m der Variabeln α gleich n und dass die n-gliedrige Gruppe $A_{111} \ldots A_{nnn}$ transitiv ist. Wir können dann die Variabeln $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ so wählen, dass

$$A_{\pi\pi\pi} = 2A_{\nu\nu\pi} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_\pi} \quad (\pi = 1 \ldots n)$$

wird. Aus den Gleichungen

$$\left(\sum_1^n{}^i A_{ii},\ A_{\pi\pi\pi}\right) = A_{\pi\pi\pi}$$

erhalten wir nunmehr

$$\sum_1^n{}^i A_{ii} = -\sum_1^n{}^i (\alpha_i + c_i)\,\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$$

oder, indem wir die $\alpha_i + c_i$ als neue α_i einführen:

$$\sum_1^n{}^i A_{ii} = S = -\sum_1^n{}^i \alpha_i\,\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}.$$

Auf der andern Seite kommt:

$$A_{i\varkappa} = -\alpha_i\,\frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa} + \sum_1^n{}^\nu h_{i\varkappa\nu}\,\frac{\partial f}{\partial \alpha_\nu};$$

da aber $(A_{ix}, S) = 0$ ist, müssen alle $h_{ix\nu}$ verschwinden und es wird einfach

$$A_{ix} = -\alpha_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_x}.$$

Die betreffende unendliche Gruppe (1) hat die Form:

$$(21) \quad \sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_x \left\{ \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x_\nu \partial x_x} - \sum_1^n{}_i \alpha_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_x} \right\} \frac{\partial f}{\partial \alpha_x};$$

sie liefert die Definitionsgleichungen:

$$(22) \quad \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial^2 \xi_\nu}{\partial x_\nu \partial x_x} - \sum_1^n{}_i \alpha_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_x} - \sum_1^n{}_\pi \alpha_{x\pi} \xi_\pi = 0 \quad (x = 1 \ldots n).$$

Als Bedingungen für die unbeschränkte Integrabilität dieses Systems erhält man $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Gleichungen, nämlich $\alpha_{ix} = \alpha_{xi}$ oder $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_x} = \frac{\partial \alpha_x}{\partial x_i}$, so dass also eine Function $\alpha(x_1 \ldots x_n)$ existirt, durch welche sich die α_i in der Form $\alpha_i = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}$ ausdrücken. Es lässt sich leicht direct verificiren, dass die Integrabilitätsbedingungen $\alpha_{ix} = \alpha_{xi}$ $(i, x = 1 \ldots n)$ die unendliche Gruppe (21) gestatten.

§ 5.

Drei wichtige Gruppen der Ebene.

16. Die unendliche Gruppe (1) des § 4 schreiben wir in der Ebene folgendermassen:

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi(x,y) \frac{\partial f}{\partial x} + \psi(x,y) \frac{\partial f}{\partial y} + Af\,\varphi_x + Bf\,\varphi_y + Cf\,\psi_x + Df\,\psi_y + \\ + Ef\,\varphi_{xx} + 2Ff\,\varphi_{xy} + Gf\,\varphi_{yy} + Hf\,\psi_{xx} + 2If\,\psi_{xy} + Kf\,\psi_{yy}. \end{cases}$$

Zwischen den infinitesimalen Transformationen $Af \ldots Kf$ bestehen hier nach § 4 Formeln (15) die Relationen:

$$(2) \quad \begin{cases} (AB) = (BD) = -B,\ (AC) = (CD) = C, \\ (AD) = 0,\ (BC) = D - A, \\ E = (AE),\ 2F = (BE) = 2(DF), \\ 2G = 2(BF) = (DG) = -2(AG) = -2(BK), \\ 2H = 2(CJ) = (AH) = -2(DH) = -2(CE), \\ 2J = (CK) = 2(AJ),\ K = (DK), \\ (CF) = E - J,\ (BJ) = K - F,\ (BH) = 2J - E,\ (CG) = 2F - K, \\ (AF) = (AK) = (BG) = (CH) = (DE) = (DJ) = 0. \end{cases}$$

Ausserdem sind E, F, G, H, J, K paarweise vertauschbar. Für das Folgende ist es endlich noch von Vortheil die Relationen:

$$(3) \qquad (A+D, E) = E \cdots (A+D, K) = K$$

anzumerken.

Nach den Untersuchungen in Nr. 15 des vorhergehenden Paragraphen haben wir drei Fälle zu unterscheiden. Von den sechs infinitesimalen Transformationen $E \ldots K$, welche offenbar selbst eine Gruppe erzeugen, können nämlich entweder zwei oder vier oder es können endlich auch alle sechs von einander unabhängig sein. Im ersten Falle bestehen die Relationen:

$$G = 0,\ H = 0,\ 2J - E = 0,\ 2F - K = 0,$$

im zweiten die Relationen

$$E + J = 0,\ F + K = 0$$

(vgl. § 4 Formeln (19) und (20)).

Wir nehmen bei jedem dieser drei Fälle an, dass es ebensoviele Variabeln $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ giebt als unabhängige unter den infinitesimalen Transformationen $E \ldots K$. Ferner setzen wir voraus, dass diese unabhängigen infinitesimalen Transformationen eine transitive Gruppe bilden.

I. Den ersten der drei angegebenen Fälle haben wir für n Variabeln schon am Schlusse des vorigen Paragraphen erledigt. Deshalb können wir uns hier in der Ebene darauf beschränken, die betreffenden Definitionsgleichungen anzugeben. Dieselben lauten:

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi_{xx} + \eta_{xy} - \alpha\xi_x - \beta\eta_x - \alpha_x\xi - \alpha_y\eta = 0, \\ \xi_{xy} + \eta_{yy} - \alpha\xi_y - \beta\eta_y - \beta_x\xi - \beta_y\eta = 0, \end{cases}$$

wo die Functionen α und β der Integrabilitätsbedingung $\alpha_y - \beta_x = 0$ genügen müssen. Von den Differentialgleichungen (4) kann man ohne Weiteres ein Integral angeben, nämlich:

$$\xi_x + \eta_y - \alpha\xi - \beta\eta = \text{const.};$$

zu demselben könnten übrigens auch noch unsere Betrachtungen in Nr. 12 des § 3 führen. Ueber die Gruppen (4) vergleiche man sonst Lie, Unendliche continuirliche Gruppen § 6 Nr. 14 und § 8 Nr. 22.

II. Fall. Eliminiren wir E und K vermöge der Relationen $E+J=0$, $F+K=0$, so erhalten wir aus (2):

$$(5) \qquad \begin{cases} (AF) = 0, & (AG) = -G, & (AH) = 2H, & (AJ) = J, \\ (BF) = G, & (BG) = 0, & (BH) = 3J, & (BJ) = -2F \\ & & \text{u. s. w.} & \end{cases}$$

Die vier unabhängigen Variabeln in den infinitesimalen Transformationen F, G, H, J mögen $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ heissen. Wir wählen dieselben so, dass

$$F = -K = \frac{\partial f}{\partial \lambda}, \quad G = \frac{\partial f}{\partial \mu}, \quad H = \frac{\partial f}{\partial \nu}, \quad J = -E = \frac{\partial f}{\partial \varrho}$$

wird. Nun zeigen die Relationen (3), dass $A + D$ bei geeigneter Wahl der Variabeln die Form:

$$A + D = -\lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} - \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} - \nu \frac{\partial f}{\partial \nu} - \varrho \frac{\partial f}{\partial \varrho}$$

erhalten kann; die Gleichungen (5) aber ergeben weiter:

$$(6)\quad \begin{cases} A = \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} - 2\nu \frac{\partial f}{\partial \nu} - \varrho \frac{\partial f}{\partial \varrho}, & B = 2\varrho \frac{\partial f}{\partial \lambda} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \mu} - 3\nu \frac{\partial f}{\partial \varrho}, \\ C = -3\mu \frac{\partial f}{\partial \lambda} - \varrho \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2\lambda \frac{\partial f}{\partial \varrho}, & D = -\lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} - 2\mu \frac{\partial f}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial f}{\partial \nu}. \end{cases}$$

Nach den gewöhnlichen Regeln (vgl. § 3 Nr. 10, Satz 4) finden wir daher die vier Definitionsgleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} 2\xi_{xy} - \eta_{yy} + 2\varrho\xi_y - 3\mu\eta_x - \lambda\eta_y - \lambda_x\xi - \lambda_y\eta = 0, \\ \xi_{yy} + \mu\xi_x - \lambda\xi_y - 2\mu\eta_y - \mu_x\xi - \mu_y\eta = 0, \\ \eta_{xx} - 2\nu\xi_x - \varrho\eta_x + \nu\eta_y - \nu_x\xi - \nu_y\eta = 0, \\ 2\eta_{xy} - \xi_{xx} - \varrho\xi_x - 3\nu\xi_y + 2\lambda\eta_x - \varrho_x\xi - \varrho_y\eta = 0. \end{cases}$$

Die Integrabilitätsbedingungen dieses Systems erhält man erst nach zweimaliger Differentiation. Hat man ein System Functionen $\lambda, \mu, \nu, \varrho$, welches den Integrabilitätsbedingungen genügt, so definiren die Gleichungen (7) eine Gruppe, welche mit der allgemeinen projectivischen Gruppe der Ebene ähnlich ist. Die Definitionsgleichungen der letzteren erhält man aus (7) durch die Substitution $\lambda = \mu = \nu = \varrho = 0$, nämlich:

$$2\xi_{xy} - \eta_{yy} = 0, \quad \xi_{yy} = 0, \quad \eta_{xx} = 0, \quad 2\eta_{xy} - \xi_{xx} = 0.$$

III. Fall. Wir haben jetzt sechs unabhängige Variabeln, etwa $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ und können setzen:

$$E = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad F = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \beta}, \quad G = \frac{\partial f}{\partial \gamma}, \quad H = \frac{\partial f}{\partial \delta}, \quad J = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}, \quad K = \frac{\partial f}{\partial \zeta}.$$

Durch geeignete Wahl der Variabeln können wir ferner erreichen, dass

$$A + D = -\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \cdots + \zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)$$

wird, und finden dann aus den Gleichungen (2):

$$A = -\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \gamma} - 2\delta \frac{\partial f}{\partial \delta} - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon},$$

$$B = \delta \frac{\partial f}{\partial \alpha} + (\varepsilon - \alpha) \frac{\partial f}{\partial \beta} + (\zeta - 2\beta) \frac{\partial f}{\partial \gamma} - \delta \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} - 2\varepsilon \frac{\partial f}{\partial \zeta},$$

$$C = -2\beta \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \gamma \frac{\partial f}{\partial \beta} + (\alpha - 2\varepsilon) \frac{\partial f}{\partial \delta} + (\beta - \zeta) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \zeta},$$

$$D = -\beta \frac{\partial f}{\partial \beta} - 2\gamma \frac{\partial f}{\partial \gamma} + \delta \frac{\partial f}{\partial \delta} - \zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta}.$$

Also ergeben sich die sechs Definitionsgleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} \xi_{xx} - \alpha\xi_x + \delta\xi_y - 2\beta\eta_x - \alpha_x\xi - \alpha_y\eta = 0, \\ \xi_{xy} + (\varepsilon-\alpha)\xi_y - \gamma\eta_x - \beta\eta_y - \beta_x\xi - \beta_y\eta = 0, \\ \xi_{yy} + \gamma\xi_x + (\zeta-2\beta)\xi_y - 2\gamma\eta_y - \delta_x\xi - \delta_y\eta = 0 \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Da in (8) alle Differentialquotienten von einer gewissen Ordnung — hier die von der zweiten — bestimmt sind, braucht man bloss einmal zu differentiiren, um die Integrabilitätsbedingungen aufstellen zu können. Man bekommt die vier:

$$(9)\quad \begin{cases} \alpha_y - \beta_x = \zeta_x - \varepsilon_y = \gamma\delta - \beta\varepsilon, \\ \beta_y - \gamma_x = \beta(\beta-\zeta) + \gamma(\varepsilon-\alpha), \\ \varepsilon_x - \delta_y = \delta(\beta-\zeta) + \varepsilon(\varepsilon-\alpha). \end{cases}$$

Dieselben bilden ein unbeschränkt integrables System, welches, wie wir wissen die unendliche Gruppe (1) gestattet.

Jedes System von Functionen $\alpha \ldots \zeta$, welches die Gleichungen (9) befriedigt, liefert in (8) eingesetzt die Definitionsgleichungen einer Gruppe, welche mit der allgemeinen linearen Gruppe der Ebene ähnlich ist. Die Definitionsgleichungen der letzteren ergeben sich für $\alpha = \beta = \cdots \zeta = 0$, nämlich:

$$\xi_{xx} = \xi_{xy} = \xi_{yy} = 0, \quad \eta_{xx} = \eta_{xy} = \eta_{yy} = 0.$$

Die Gleichungen (8) und (9) zusammengenommen bilden ein unbeschränkt integrables System mit den Unbekannten $\xi, \eta, \alpha \ldots \zeta$. Von diesem Systeme lassen sich die folgenden beiden Integrale angeben:

$$(10)\quad \begin{cases} \xi_x + \eta_y - (\alpha+\varepsilon)\xi - (\beta+\zeta)\eta = \text{const.}, \\ (\xi_x - \alpha\xi - \beta\eta)(\eta_y - \varepsilon\xi - \zeta\eta) - (\xi_y - \beta\xi - \gamma\eta)(\eta_x - \delta\xi - \varepsilon\eta) = \text{const.} \end{cases}$$

Zur Aufstellung derselben führen die Betrachtungen in § 3 Nr. 12.

17. *Zum Schlusse noch einige wenige Bemerkungen über die Integration des Systems* (7).

Wir denken uns $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ als gegebene Functionen von x, y und setzen voraus, dass bei Einsetzung dieser Werthe das System (7) unbeschränkt integrabel wird; es definirt dann also eine gewisse Gruppe, welche mit der allgemeinen projectivischen Gruppe der Ebene ähnlich ist.

Unterwerfen wir $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ den Gleichungen:

$$(11)\qquad \gamma = \mu, \ \delta = \nu, \ 2\beta - \zeta = \lambda, \ 2\varepsilon - \alpha = \varrho,$$

so wird (7) eine Folge der Gleichungen (8). Wenn wir daher $\alpha \ldots \zeta$ in allgemeinster Weise so bestimmen, dass die Gleichungen (11) erfüllt sind und das System (8) unbeschränkt integrabel wird, müssen die Gleichungen (8) ein System Integralgleichungen von (7) darstellen.

Damit das System (8) unbeschränkt integrabel wird, müssen $\alpha \ldots \varepsilon$ die Bedingungen (9) befriedigen; indem wir daher α, γ, δ, ζ aus (9) vermöge der Gleichungen (11) eliminiren, erhalten wir zur Bestimmung von β und ε die Differentialgleichungen:

$$(12) \qquad \begin{cases} 2\varepsilon_y - \beta_x - \varrho_y = 2\beta_x - \varepsilon_y - \lambda_x = \mu\nu - \beta\varepsilon, \\ \beta_y = \mu_x + \beta(\lambda - \beta) + \mu(\varrho - \varepsilon), \\ \varepsilon_x = \nu_y + \nu(\lambda - \beta) + \varepsilon(\varrho - \varepsilon). \end{cases}$$

Auf dieselben Differentialgleichungen kommt Lie in seiner Abhandlung „Classification und Integration u. s. w. III", Archiv for Math. og Naturvid. Bd. VIII, pag. 373ff. (vgl. insbesondere die Gleichungen (3) und (4) daselbst). Aber die Formulirung des ganzen Integrationsproblems ist bei Lie eine wesentlich verschiedene, deshalb hat auch seine Ableitung der Differentialgleichungen (12) mit der von uns gegebenen keine directen Berührungspunkte.

Das System (12) ist äquivalent mit einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung 3. O. (vgl. Lie, a. a. O. pag. 376); ist diese letztere vollständig integrirt, so erhält man $\alpha \ldots \zeta$ als Functionen von x, y ausgedrückt und die Substitution dieser Werthe in (8) ergiebt ein System Integralgleichungen von (7). Die vollständige Erledigung des Integrationsproblems bietet jetzt keine Schwierigkeiten mehr und lässt sich ohne Integration durchführen. Wir wollen darauf nicht eingehen, sondern nur noch bemerken, dass sich dabei die Integrale (10) sehr vortheilhaft verwerthen lassen. —

Leipzig, im Juni 1885.

Ueber die Geometrie der Kegelschnitte, insbesondere deren Charakteristikenproblem.

Von

E. Study in Leipzig.

Bei der grundlegenden Bedeutung, welche das Bézout'sche Theorem für die meisten geometrischen Untersuchungen besitzt, war es natürlich, dass die Geometer, sobald sie überhaupt anfingen, neben den früher allein untersuchten Curven und Oberflächen auch zusammengesetztere Gebilde in den Kreis ihrer Betrachtung zu ziehen, danach strebten, jenes mächtige Werkzeug auf das neu erschlossene Arbeitsfeld mit sich zu nehmen, also den Bézout'schen Satz auf jene Gebilde auszudehnen, beziehungsweise sein Analogon aufzusuchen.

Eine der ersten und wichtigsten Verallgemeinerungen, welche so die Bézout'sche Fragestellung erfuhr, bezog sich auf *Systeme von Curven und Oberflächen.*

Es war, allgemein zu reden, das Problem: „*Diejenigen Curven oder Flächen eines (algebraischen) Systems solcher Gebilde anzugeben, welche gegebenen Bedingungen genügen*"; oder, mit anderen Worten: „*Mehrere in ihren Dimensionen einander auf geeignete Weise ergänzende Systeme von Curven oder Flächen gleicher Art zum Durchschnitt zu bringen*", d. h. die Gleichung anzugeben, von deren Lösung die Auffindung derselben in letzter Instanz abhängt, oder doch wenigstens den Grad der Gleichung, die Anzahl der Lösungen oder die Ordnung des Lösungssystems zu bestimmen.

Der erste, welcher die letztere Aufgabe — in der es sich also lediglich um eine Erweiterung der Bezout'schen Sätze handelte — in ihrer Allgemeinheit angriff, oder doch anzugreifen glaubte, war de Jonquières.

Seine Beantwortung der Frage bezog sich allerdings nur auf einen besonderen Fall — den er noch für den allgemeinen ansah —, man

kann ihr aber, mit Bezugnahme auf eine der Folgezeit geläufig gewordene Anschauungsweise, einen generellen Ausdruck geben, dahin lautend, *dass diese erweiterte Aufgabe noch in das Gebiet des Bézout'schen Theorems selbst fällt.*

Da nämlich beispielsweise alle ebenen Curven n^{ter} Ordnung eine lineare Mannichfaltigkeit bilden, und man diese auf eine lineare Punktmannichfaltigkeit ein-eindeutig beziehen kann, so ist die Frage ohne Weiteres auf Bézout's originale Problemstellung zurückführbar.

Mit Rücksicht auf die vorhergenannte Aufgabe wird also, zufolge der ursprünglichen Auffassung de Jonquières', jedes System von Curven derselben Ordnung in der Ebene durch *eine einzige* Zahl charakterisirt, den „*Index*" des Systems, welcher der Ordnung etwa einer Raumcurve oder einer Fläche analog ist; und man erhält die Anzahl der mehreren Systemen von geeigneten Dimensionen gemeinsamen Curven, indem man das Product ihrer Indices bildet.

Dieser Standpunkt zeigt nun offenbar den Bézout'schen Sätzen gegenüber nichts eigentlich Neues; die Theorie der Systeme algebraischer Curven selbst aber lässt er in einem falschen Lichte erscheinen, wie man schon daraus erkennen kann, dass man von hier zu Unterscheidungen gelangt, die in der Natur jener Gebilde nicht begründet sind.

Es beruht dies auf der Auszeichnung des Punktes als Raumelement. Eine Curve ist aber nicht allein Ort von Punkten; und man wird etwa ein Kegelschnittsystem nicht nur als ein System von Curven zweiter *Ordnung,* also von Punktcurven betrachten dürfen, sondern man wird dasselbe ebensowohl als ein System von Curven zweiter *Classe* aufzufassen haben, d. h. als ein System von Oertern für gerade Linien.

Ein und dasselbe Gebilde erhält aber in beiden Fällen verschiedene analytische Darstellungen und zugleich verschiedene Indices; man muss daher, wenn man sich nicht in Widersprüche verwickeln will, beide Standpunkte streng auseinanderhalten*), wozu im Begriffe des Kegelschnittes kein Grund liegen kann.

Es bedeutete mithin einen grossen Fortschritt in dieser Theorie, als Chasles gegen de Jonquières geltend machte, dass von der Gesammtzahl jener Lösungen gewisse in Abzug zu bringen seien, welche

*) Während man nämlich zuerst zwei Curven als identisch ansah, wenn sie Punkt für Punkt übereinstimmten, hat man sie jetzt als identisch zu betrachten, wenn ihre Tangenten dieselben sind. Das eine ist aber nicht immer eine Folge des anderen, nämlich bei ausgearteten Curven nicht; und dadurch eben unterscheiden sich jene beiden Auffassungsweisen, dass man in jedem Falle *andere* ausgeartete Curven noch mit zu dem System rechnet. In beiden Fällen begeht man offenbar einen Act der Willkür; ihn zu vermeiden, ohne — wie es geschehen ist — in einen ähnlichen Fehler zu verfallen, ist das punctum saliens bei diesem Problem.

den Bedingungen der Aufgabe zwar *selbstverständlich, aber doch nicht eigentlich* genügten*).

Suchte man nämlich beispielsweise die Zahl der Curven 2. O. eines einfach ausgedehnten Systems, welche eine beliebig gegebene Curve berühren, so erhielt man, wenn sich doppelt zählende Gerade unter den Kegelschnitten des Systems befanden, dieselben immer mit als Lösungen der Aufgabe.

Diese ausgearteten Kegelschnitte erfüllten aber die Bedingungen des Problems offenbar in ganz anderer Weise als die übrigen, im Allgemeinen nicht ausgearteten Kegelschnitte der Reihe, welche jene Curve berühren im gewöhnlichen Sinne des Wortes, und waren daher, da man sich nur für die letzteren interessirte, nicht mitzuzählen.

So gewendet, war die Frage nun nicht mehr so leicht allgemein zu behandeln, wie in der früheren Fassung; doch hatte Chasles die Antwort wenigstens für Systeme von Kegelschnitten einer und derselben Ebene durch *Induction* gefunden: Er stellte den Satz auf, *dass die Zahl der Kegelschnitte, in welchen sich ein einfach- und ein vierfach-ausgedehntes System durchdringen, durch einen Ausdruck von der Form*

$$\alpha\mu + \beta\nu$$

angegeben werde, worin α, β, μ, ν Zahlen sind, von welchen μ und ν für das erste System „charakteristisch" und von dem zweiten ganz unabhängig sind, während für α und β das Umgekehrte gilt.

Aus dieser Formel leitete Chasles noch eine zweite ab, welche die Zahl der Kegelschnitte, in welchen sich fünf beliebige, vierfach ausgedehnte Systeme treffen, als eine lineare Funktion der beiden *„Charakteristiken" α, β* eines jeden derselben angab, und Cremona fügte der Chasles'schen eine ähnlich gebaute Formel hinzu, welche sich auf die Gegenüberstellung eines zweifach und eines dreifach ausgedehnten Systems bezog, die nun nicht mehr Durchschnitte von drei, bezüglich zwei vierfach ausgedehnten Systemen zu sein brauchten. (Alles dieses in den Comptes Rendus des Jahres 1864.)

Obwohl nun diese Sätze um ihrer merkwürdigen Form, ihrer Allgemeinheit und grossen Fruchtbarkeit willen das lebhafteste Interesse der Geometer erregten, und man dieselben nicht allein in zahlreichen Beispielen bestätigt fand (besonders bei Berührungsaufgaben), sondern auch — freilich nur mit sehr beschränktem Erfolg — den Versuch machte, dieselben auf höhere Gebilde auszudehnen, so erschien doch erst nach Verlauf von fast einem Decennium eine Abhandlung, welche die *Allgemeingiltigkeit* wenigstens *des Chasles'schen*

*) Ich drücke mich mit Absicht so unbestimmt aus, da — was zu bemerken für das Folgende wesentlich ist — scharfe Definitionen damals in der That nicht gegeben wurden.

Satzes zu beweisen unternahm, aus der Feder von Clebsch (Math. Annalen Bd. 6 (1873) S. 1), worauf dann bald mehrere andere Beweisversuche folgten.

Das Resultat dieser Untersuchung, die mit Hilfe der Methoden der Invariantentheorie geführt wurde, ist bekanntlich nicht richtig.

Da diese Einleitung natürlich nicht darauf ausgehen kann, die Entwickelung der umfangreichen, fast von Anfang an schon mit einem eigenen Namen bezeichneten „Theorie der Charakteristiken" genau zu verfolgen, sondern nur soviel aus derselben hervorheben will, als dem Verfasser zur Motivirung seiner eigenen Bestrebungen nothwendig erscheint, so ist hier nicht der Ort, die Leistungen Clebsch's und seiner Nachfolger zu zergliedern. Doch müssen wir einen Umstand näher in's Auge fassen, der von nun an immer deutlicher hervortritt, und für die Auslegung des Chasles'schen Satzes in der Folge massgebend geworden ist. Es vollzog sich nämlich, fast unmerklich, eine Verschiebung der ursprünglichen Problemstellung — so unmerklich, dass dieselbe sogar von ihren Urhebern nicht beachtet worden zu sein scheint.

Den entscheidenden Schritt in dieser Richtung that Clebsch in der eben erwähnten Abhandlung, indem er derselben einen Begriff der „eigentlichen Lösung" zu Grunde legte, der bis dahin noch nicht hervorgetreten war. Die Veranlassung hierzu gab die im Vergleich zu den früheren Arbeiten abstracte Natur seiner Untersuchung.

Wir haben schon angedeutet, dass die älteren Autoren sich bei ihrer Abscheidung gewisser Arten von Lösungen mehr durch einen richtigen Tact, als durch scharfe Begriffe hatten leiten lassen. Bei den von ihnen behandelten besonderen Classen von Aufgaben lehrte der Augenschein (s. obiges Beispiel), welche von den durch das Bézout'sche Theorem, resp. durch das sogenannte „Correspondenzprincip" gelieferten Lösungen zu entfernen, bezüglich als „eigentliche" beizubehalten waren; man wandte daher einer genauen, alle denkbaren Fälle umfassenden Definition dieser letzteren wenig Aufmerksamkeit zu, oder gab vielmehr gar keine Definition, da man kein Bedürfniss nach einer solchen empfand.

Will man aber eine in besonderen Fällen anschauungsmässig behandelte Aufgabe in voller Allgemeinheit erledigen, so muss man von der Anschauung zu Begriffen übergehen und logische Deductionen an Stelle der Berufung auf den Augenschein setzen, die nicht selten auch im einzelnen Falle, wo sie auszureichen scheint, doch nur das stille Bekenntniss enthält, dass man sich der wahren Gründe nicht vollkommen klar bewusst ist. Man hat zu diesem Behufe diejenigen Eigenschaften der betreffenden Gebilde, deren Vorhandensein man als die nothwendige und ausreichende Bedingung ansieht für das Bestehen jener

anderen Eigenschaften, welche den geometrischen Satz vorstellen, von den übrigen zu trennen, welche man als Consequenzen jener oder nur als durch die zufällige Erscheinungsform des allgemeinen Satzes bedingt betrachtet. Die ersteren muss man zum Range von Definitionen erheben und zur Grundlage der Beweisführung machen.

Diese Operation vollzieht Jeder, der eine Verallgemeinerung vornimmt, mit Absicht oder auch unwillkürlich. Da sie in der Hauptsache nur in der klareren Auffassung des für einen Satz Wesentlichen besteht, so ist zur Ausführung derselben nicht nothwendig, dass sie als ein Fortschritt des Gedankens in das Bewusstsein fällt. Es kann eintreten, dass der Schnitt, welcher Wesentliches von Zufälligem trennen soll, an der falschen Stelle geführt wird, und dass die angestrebte Schärfe der Definition doch nicht ganz erreicht wird.

Dies alles traf nun im vorliegenden Falle zu, wo es sich darum handeln musste, das „offenbar" zu analysiren, welchem zufolge nur gewisse Lösungen als eigentliche angesehen werden durften.

Es wird zwar bei Clebsch, wie bei seinen Nachfolgern, der Chaslessche Satz immer noch in der alten Weise ausgesprochen: Es wird schlechthin von Kegelschnitten geredet, welche eine gegebene Bedingung erfüllen, und eine Definition für das Erfülltsein einer Bedingung wird dem Satze nicht vorangestellt, wiewohl eine solche hinsichtlich der ausgearteten Kegelschnitte nicht überflüssig ist.

Betrachten wir aber den Beweisgang jener Abhandlung, so sehen wir, dass ihr Verfasser ausschliesslich die *beweglichen* Curven als die eigentlichen Lösungen des Problems betrachtete, so dass wir also hier eine bestimmtere Auffassung des Satzes vor uns haben, als man dem Wortlaute nach vermuthen sollte.

Es bedarf dies noch einer kurzen Erläuterung.

Während in den bis dahin behandelten Classen von Aufgaben bei Zusammenstellung eines einfach und eines vierfach ausgedehnten Systems die „uneigentlichen" Lösungen ihren Ort in dem ersteren System unverändert beibehielten, wenn man die relative Lage beider Systeme durch collineare Transformation des einen änderte (vgl. wieder obiges Beispiel), hatten die anderen volle Beweglichkeit, was sich analytisch dadurch kund gab, dass die ersteren die das vierfach ausgedehnte System darstellende Bedingungsgleichung identisch befriedigten, die letzteren nicht.

Hierin erblickte Clebsch offenbar einen wesentlichen Unterschied beider Arten von Lösungen*) und dem entsprechend war seine Auf-

*) Den scheinbar näher liegenden Umstand, dass die uneigentlichen Lösungen ausgeartete Curven sind, für diese Unterscheidung zu benutzen, ging nicht an, da unter Umständen auch Lösungen ausarten können, die ganz sicher den Cha-

fassung des Chasles'schen Satzes. *Damit aber, dass der Begriff der eigentlichen Lösung* (ein Wort, das Clebsch übrigens nicht gebraucht) *ausschliesslich an die Beweglichkeit derselben geknüpft wurde, war dieser Satz selbst, wenn auch nicht dem Wortlaut, so doch dem Sinne nach schärfer als zuvor gefasst, gleichzeitig aber war etwas in die Formulirung der zu demselben führenden Problemstellung hineingetragen, das ursprünglich nicht darin gelegen hatte.*

Dass man aber hiermit nicht mehr genau den Chasles'schen Satz selbst vor sich hatte, sondern nur eine einseitige Ansicht desselben, neben der vielleicht auch noch andere denkbar sind, wurde übersehen. Dieser scheinbar geringfügige Umstand hat später dazu geführt, dass der Chasles'sche Satz als vollständig falsch bezeichnet worden ist.

Die nach Clebsch's Abhandlung erschienenen Untersuchungen können wir hier nur kurz berühren, da es uns nur auf die Auffassung der Problemstellung und des Chasles'schen Theorems ankommt, und die Folgezeit in dieser Richtung einen wesentlichen Fortschritt nicht gemacht hat. Es verharren diese Arbeiten nämlich entweder auf dem früheren Standpunkt — lassen also auch implicite keinen schärferen Begriff der eigentlichen Lösungen erkennen (was nicht auffallend erscheinen kann, da ein solcher auch bei Clebsch nur verdeckt eingeführt worden war), oder sie betrachten, wie die von Clebsch, nur die beweglichen Lösungen als die eigentlichen. In beiden Fällen war das Ergebniss die Formel von Chasles.

Herr Halphen hat das Verdienst, die in der letzterwähnten Richtung gewonnenen Resultate — die einzigen ihm in exacter Formulirung vorliegenden — als unrichtig nachgewiesen und verbessert zu haben. Herr Halphen richtet zwar seine Angriffe gegen den Chasles'schen Satz im Allgemeinen, ohne einschränkenden Zusatz (zuerst in den Comptes Rendues vom 4. Sept. 1876), er hat aber offenbar nur die an die Beweglichkeit der Lösungen geknüpfte Fassung desselben im Auge. In der That zeigt sein Beispiel nur, *dass die Zahl der beweglichen, zwei Systemen erster und vierter Dimension gemeinsamen Curven unter Umständen kleiner sein kann, als die Chasles'sche Zahl.*

---

rakter von eigentlichen haben. — In seinem Beweise benutzt Clebsch ausser collinearen Aenderungen auch solche, welche wesentliche Constante des vierfach ausgedehnten Systems betreffen. Es kann nicht geleugnet werden, dass durch die auf nicht gerechtfertigten Voraussetzungen beruhende Hereinziehung solcher Aenderungen einige Unklarheit in den Begriff der Beweglichkeit bei Clebsch kommt. Wir dürfen aber, da die entgegengesetzte Annahme geradezu absurd ist, doch nicht zweifeln, dass Clebsch im Grunde nur die collinearen Aenderungen im Auge gehabt habe (wie denn auch die späteren Autoren nur solche in Betracht zogen), und haben also in der Herbeiziehung wesentlicher Constantenänderungen nur einen, in diesem Falle allerdings nicht unschädlichen Ueberfluss zu erblicken.

In späteren Aufsätzen gab Herr Halphen für die richtige Zahl der beweglichen Lösungen zwar keinen geschlossenen Ausdruck an wie der Chasles'sche war (was überhaupt nicht möglich ist), aber doch ein einfaches Verfahren, dieselbe zu bestimmen. Die Chasles'sche Formel erwies sich also in diesem Sinne nicht als allgemeingiltig; doch gibt es, wie Herr Halphen gleichfalls zeigte, eine grosse Classe von Fällen, in denen dieselbe keiner Reduction bedürftig ist. (Journal de l'Ecole normale polytechnique. 1878. t. 45.)

Dies ist im Wesentlichen noch der gegenwärtige Standpunkt der Sache.

Es hatte also — wenn ich nun zusammenfassen darf — *Chasles erkannt, dass nicht alle von de Jonquières angegebenen Curven als eigentliche Lösungen der Aufgabe zu betrachten seien, zwei Systeme von Curven zum Durchschnitt zu bringen. Er hatte ferner einen Ausdruck für die Zahl dieser eigentlichen Lösungen in dem Falle aufgestellt, wo ein einfach- und ein vierfach ausgedehntes Kegelschnittsystem einander gegenüberstehen, nicht aber zugleich eine hinreichende Definition derselben gegeben. Seit Clebsch wurde dann der von Chasles ausgesprochene Satz so aufgefasst, dass man als die in demselben beibehaltenen, eigentlichen Lösungen die beweglichen betrachtete. Herr Halphen hat gezeigt, dass der Ausdruck für die Zahl dieser letzteren Lösungen nicht allgemein die Chasles'sche Formel ist.*

Aus dem bisher Gesagten geht einerseits hervor, dass die Deutung des Chasles'schen Satzes, welche das Hauptgewicht auf die Beweglichkeit der Lösungen legte, keine glückliche war; andrerseits aber auch, dass die gegen diesen Satz gerichteten Angriffe im Grunde nicht ihn selbst, sondern eben nur jene besondere Auffassung treffen.

Man kann daher die Frage aufwerfen, ob man den Satz von Chasles nicht auf eine andere Art interpretiren kann, welche demselben eine ausnahmslos giltige Deutung verleiht.

Nachzuweisen, dass dem in der That so ist, ist der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit.

Die Veranlassung zur Entstehung derselben gab zum Theil die Bemerkung, dass die an die Beweglichkeit geknüpfte Definition der beizubehaltenden Lösungen eine *willkürliche* ist. Betrachtet man ja auch sonst in der Geometrie z. B. einen Schnittpunkt einer Curve und einer Oberfläche darum nicht weniger als einen Schnittpunkt, weil er etwa durch gewisse Bedingungen an einen gegebenen Punkt, oder eine feste Curve gebunden ist. *Dagegen ist es sonst allgemein üblich, eine*

*Gebilde, von dem es zweifelhaft sein kann, ob es zu einer gegebenen Mannichfaltigkeit gehört oder nicht, dann und nur dann zu derselben zu rechnen, wenn es sich (durch analytische Fortsetzung) aus unzweifelhaft dieser Mannichfaltigkeit angehörigen Gebilden stetig ableiten lässt.**)

Nähert man sich nun einem in eine Doppellinie ausgearteten Kegelschnitte in einer einfach ausgedehnten Kegelschnittreihe, so geht der Kegelschnitt, im Begriffe auszuarten, nicht schlechthin in jene Doppellinie über, sondern er plattet sich zuvor ab, und es entstehen auf der doppelt überdeckten Geraden zwei getrennte oder zusammenfallende Verzweigungspunkte. Erst mit diesen zusammen kann die ausgeartete Curve als ein vollständiger Kegelschnitt angesehen werden. Auf jeder doppelt überdeckten Geraden liegen aber ∞^2 Punktepaare, deren jedes mit ihr zusammen einen ausgearteten Kegelschnitt vorstellt; und von allen diesen Kegelschnitten werden wir, dem eben ausgesprochenen Princip gemäss, nur einen einzigen zu dem gegebenen System rechnen dürfen.

Dies ist auch die allgemein verbreitete Anschauung. Dass man aber dieselbe Betrachtung auch auf mehrfach ausgedehnte Kegelschnittsysteme anwenden müsse, scheint nicht anerkannt zu sein. Die Ursache dieser Inconsequenz glaube ich in Folgendem zu finden.

Es liege etwa ein vierfach ausgedehntes Kegelschnittsystem vor, welches eine Doppellinie enthält. Dann wird man sich dieser Doppellinie in dreifach unendlich vielen Fortschreitungsrichtungen (Kegelschnittbüscheln) nähern können, die in erster Annäherung dem gegebenen System angehören. Jede derselben führt durch Grenzübergang zu einem Punktepaar der Doppellinie, und man erhält auf diese Weise, da es nur ∞^2 solcher Punktepaare gibt, *im Allgemeinen* — so scheint es wenigstens — jedes Punktepaar noch unendlich oft.

Es erscheint also beinahe selbstverständlich, dass ein vierfach ausgedehntes Kegelschnittsystem zugleich mit einer Doppellinie alle Kegelschnitte enthält, die in Punktepaare dieser Geraden ausgeartet sind,

---

*) So allein nämlich erhält man allgemein giltige Sätze.

Man lässt z. B. eine Gerade, welche durch einen Doppelpunkt einer ebenen Curve geht, im Allgemeinen nicht als eine Tangente derselben gelten, weshalb man von der Erniedrigung der Classe einer Curve durch das Auftreten von Doppelpunkten spricht. Hat man dagegen in einer einfach ausgedehnten Reihe von Curven, unter welchen sich einzelne Curven mit Doppelpunkt befinden, diejenigen Curven zu bestimmen, welche eine gegebene Gerade berühren, und geht diese Gerade durch einen solchen isolirten Doppelpunkt, so wird man diesen Umstand als zufällig ansehen, und die zugehörige Curve sehr wohl als eine Berührungscurve der Geraden betrachten — nicht aber hinwiederum solche Curven, welche zu Doppelpunkten gehören, die in einer ganzen Reihe von Curven des Systems angehörenden Doppelpunkten liegen — Alles aus dem im Texte angegebenen Grunde.

es scheint die ganze Grenzbestimmung überflüssig zu sein, und was das Charakteristikenproblem anlangt, so scheint keine andere Formulirung desselben übrig zu bleiben, als die an die Beweglichkeit der Lösungen geknüpfte.

Es ist aber schon an einfachen Beispielen (worunter das schon mehrfach herbeigezogene System aller Kegelschnitte, welche eine gegebene Curve berühren) zu sehen, dass dies nicht richtig ist.

Man erhält vielmehr *gerade im allgemeinen Falle*, trotzdem man sich jener Doppellinie aus ∞^3 Richtungen nähern kann, doch nur ∞^1 verschiedene Grenzlagen.

Stellt man nun ein einfach- und ein vierfach ausgedehntes Kegelschnittsystem zusammen, von welchen das erstere eine Doppellinie enthält, so wird diese im Allgemeinen auch in dem letzteren System enthalten sein; es entsteht durch die bezüglichen Grenzübergänge im ersten Falle ein einziges Punktepaar auf der Geraden, im zweiten eine Reihe von ∞^1 solchen, unter welchen das erste im Allgemeinen sich nicht befindet. *Dieses Punktepaar wird man also nicht als eine beiden Systemen gemeinsame Curve ansehen dürfen.*

Bringt man nun die nach Abzug aller derartigen Vorkommnisse noch übrig bleibenden, nun beiden Systemen wirklich gemeinsamen Curven mit der richtigen Multiplicität in Anschlag, so wird ihre Gesammtzahl durch die Chasles'sche Formel angegeben — man erhält also eine ebenso einfache, als ungesuchte Deutung des Chasles'schen Satzes.*)

Die Bestimmung der Multiplicität einer Lösung im einzelnen Falle bedarf natürlich einer eingehenden Untersuchung.

Was nun die Durchführung der Untersuchung anlangt, so wäre es nicht schwierig gewesen, die hier entwickelten geometrischen Sätze ohne allen analytischen Apparat abzuleiten, unter blosser Zuhilfenahme des Bézout'schen Theorems und ausgehend von der geometrisch evidenten Thatsache, dass ein Kegelschnitt vollkommen bestimmt ist, sobald er entweder als irreducible Curve oder als Punktepaar oder als Linienpaar gegeben vorliegt.

Ich habe es aber vorgezogen, die Aufgabe als einen Gegenstand der *Formentheorie* zu behandeln, *da, nachdem die früheren Versuche als gescheitert angesehen werden müssen, diese allein — nicht nur wegen des gegenwärtigen Zustandes der Wissenschaft, sondern auch aus innerer Gründen — die Möglichkeit der Verallgemeinerung des Problems a*

*) Es zeigt sich, dass diese Lösungen unter Umständen nur zum Theil be weglich sind. Die Angabe der Zahl dieser Curven, der „eigentlichen Lösungen" Clebsch's ist dann das, was Clebsch angestrebt und Herr Halphen ausge führt hat. —

Formen von beliebig hoher Ordnung zeigt, es also wünschenswerth erscheinen muss, auch die quadratischen Formen bereits in dieses erweiterte Gesichtsfeld zu rücken.

Betrachtet man zwei algebraische Formen oder Systeme solcher als identisch, wenn sie in ihren sämmtlichen*) covarianten Bildungen übereinstimmen, wobei man sich diejenigen, welche für die vorliegenden besonderen Formen identisch verschwinden, als durch Grenzübergänge bestimmt denkt — wie dies im § 1 in etwas allgemeinerer Weise näher ausgeführt ist — so wird man eine zwei oder mehreren Systemen zugleich angehörige Form, bei welcher sich die Uebereinstimmung nicht auf alle covarianten Bildungen erstreckt, als jenen Systemen nicht *wirklich*, sondern höchstens *scheinbar* zugleich angehörig anzusehen haben — scheinbar nämlich, insofern man nur einen Theil der covarianten Bildungen im Auge hat.

Die Bestimmung der Zahl der beiden Systemen wirklich gemeinsamen Formen, bei welchen also alle covarianten Bildungen übereinstimmen, ist dann die Aufgabe, welche ich (im engeren Sinne, vgl. § 1) als das „*Charakteristikenproblem algebraischer Formen*" bezeichnen zu dürfen glaube, da sie in dem besonderen Falle, der hier zur Behandlung kommt, ebenso wie die an die Beweglichkeit der Lösungen geknüpfte Problemstellung eine schärfere Fassung der von Chasles so bezeichneten Aufgabe vorstellt, und wirklich zu dem Resultate Chasles' hinführt.

Die Lösung dieser allgemeinen Aufgabe, für deren Behandlung die des Charakteristikenproblems der quadratischen Formen ungeachtet der einfachen Structur ihres Formensystems als Prototyp gelten kann, geschieht, wenn wir von besonderen Classen von Systemen von Formen absehen, die bei Formen von höherer als der zweiten Ordnung zu wesentlich verwickelteren Aufgaben führen, in zwei Schritten:

Bei dem ersten handelt es sich um eine unmittelbare Verallgemeinerung des Bézout'schen Problems, von welcher jedoch immer nur besondere Fälle in Betracht kommen.

Der Inhalt der Fragestellungen dieser Art, deren Gesammtheit man vielleicht passend als das „Charakteristikenproblem der Punktmannichfaltigkeiten" bezeichnen könnte, lässt sich etwa so ausdrücken:

„Mehrere derselben algebraischen Mannichfaltigkeit angehörende Punktmannichfaltigkeiten, deren Dimensionen einander in geeigneter Weise ergänzen, schneiden sich im Allgemeinen in einer endlichen Zahl von Punkten. Wie gross ist diese Zahl? und wie viele Schnitt-

*) Es ist nämlich in den höheren Fällen kein Grund mehr vorhanden, warum man in dieser Hinsicht einzelne Covarianten — wie etwa diejenige, welche die Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten darstellt — vor den anderen auszeichnen soll.

punkte werden absorbirt, wenn jene Mannichfaltigkeiten im besondere Falle unendlich viele Punkte gemein haben?"

Erst bei dem zweiten Schritt tritt die Bedeutung in Kraft, welch man jenen Mannichfaltigkeiten, als von Systemen algebraischer Formen gebildet, beilegt: es kommt zu dem ersten Problem die der Theorie jener Systeme, als einem besonderen Zweige der Algebra eigenthümliche Fragestellung hinzu:

„Wann eine gegebene Form mehreren Systemen wirklich, oder nur scheinbar zugleich angehört?"

Sind diese beiden Aufgaben in hinreichender Allgemeinheit erledigt, und damit auch das Charakteristikenproblem — was immer möglich sein muss, gleichviel, wie gross die Zahl der vorhandenen Invarianten ist —, so gesellt sich zu ihnen in besonderen Fällen ein drittes Problem: Die Frage nach der Gruppirung der erhaltenen Lösungen im einzelnen Falle. Hierher gehört dann vor Allem die Frage nach den Reductionen, welche die Beweglichkeit der Lösungen erleiden kann.

Bei Aufgaben der letzteren Art würde dann der ältere Begriff der „eigentlichen" Lösungen zur Geltung gelangen. Ich habe aber, um Missverständnissen vorzubeugen, dieses Wort ganz fallen lassen, spreche also nur von „scheinbaren" und „wirklichen" Lösungen, von welchen dann die letzteren weiterhin nach ihrer Beweglichkeit classificirt werden mögen.

Die hier gegebene Behandlung des Charakteristikenproblems der Kegelschnitte würde etwas kürzer ausgefallen sein, wenn wir uns, den Satz von Chasles als Ziel vor Augen, streng auf die Beibringung derjenigen Hilfsmittel beschränkt hätten, welche zur Erreichung desselben unbedingt nothwendig waren.

Es kann aber nicht der Zweck der Wissenschaft sein, irgend eine vereinzelte Wahrheit so kurz als möglich darzulegen: sie strebt vielmehr, ausgedehntere Gebiete, diese aber mit einer möglichst geringen Gesammtarbeit sich zu unterwerfen.

Daher sind bei der folgenden Untersuchung solche Sätze, welche nach meiner Meinung zu den elementaren Grundlagen einer jeden Theorie der Kegelschnittsysteme gehören, einer etwas ausführlicheren Behandlung unterzogen worden, als nöthig gewesen wäre, wenn dieselben als blosse Hilfssätze und Durchgangspunkte hätten dastehen sollen; so dass diese Darstellung, wie auch durch die Wahl des Titels angedeutet, vielleicht in der Hauptsache als eine auf die Geometrie der Kegelschnitte im Allgemeinen bezügliche Betrachtung anzusehen ist, von welcher eine Anwendung auf das Charakteristikenproblem gemacht wird.

Was nun die bei einer Untersuchung dieser Art anzuwendenden Methoden anlangt, so schien mir die principielle und ausschliessliche Anwendung der Processe des sogenannten symbolischen Rechnens vor den anderen Verfahrungsarten der analytischen Geometrie den Vorzug zu verdienen.

Denn jene Methode allein genügt, richtig aufgefasst — was in dieser ohnehin schon ungewöhnlich umfangreichen Einleitung allerdings nicht auseinandergesetzt werden kann — der gewiss berechtigten Forderung, zur Ableitung ihrer Wahrheiten keiner willkürlich eingeführten und daher überflüssigen Hilfsgrössen, wie Coordinaten sind, zu bedürfen*) — wiewohl eine flüchtige Betrachtung den entgegengesetzten Eindruck hervorbringen mag.

Indem dieselbe sich nur projectiver Processe bedient (deren jedem eine, aus der bisherigen Begründung dieser Theorie freilich nicht ersichtliche geometrische Bedeutung innewohnt), *und daher niemals in die Lage kommt, die invariante Natur ihrer Bildungen nachträglich beweisen zu müssen, vereinigt sie allein, so lange sie aus diesem Kreise von Operationen grundsätzlich niemals heraustritt, den Hauptvorzug der synthetischen Geometrie — nämlich keinen überflüssigen Schritt zu thun — mit dem Vortheil der analytischen Methode — der Darstellung der geometrischen Gebilde durch Gleichungen;* ja es lässt sich zeigen, dass ihr materieller Inhalt sich mit dem der synthetischen Geometrie deckt, soweit man letztere auf linear ausführbare Constructionen beschränkt; wobei sie aber vor der Schwesterdisciplin das voraus hat, dass sie allgemeine Methoden besitzt, deren Zulänglichkeit a priori bekannt ist, und dieselbe — was nicht gering anzuschlagen ist — durch die von vorn herein gegebene streng systematische Gruppierung des Stoffes übertrifft.

Ausserdem aber — und *dies allein würde hinreichen, die hohe Bedeutung jener, von Seiten der eigentlichen Geometer, wie ich glaube, nicht hinreichend gewürdigten Methode darzuthun* — ist die principielle Anwendung jener invarianten Processe das einzige Mittel, welches die Gleichungen der geometrischen Gebilde in der denkbar allgemeinsten und zugleich einfachsten Form darzustellen im Stande ist, da sie nicht mehr als das Nothwendige und Wesentliche zum Ausdruck bringt. Die gewöhnlichen Methoden können eine ähnliche Einfachheit bloss unter Verzichtleistung auf Allgemeinheit erreichen, nämlich durch

*) H. Grassmann's grossartige Schöpfung ist zwar auch frei von Coordinaten, ist dafür aber von dem Begriffe des Maasses wesentlich abhängig, und daher für die Zwecke der projectiven Geometrie, wiewohl allen anderen Methoden, ausser der symbolischen, überlegen, dennoch nicht die geeignete Methode. Das eigentliche Gebiet für die Anwendungen der Ausdehnungslehre ist die Mechanik, in der sie ja auch ihren Ursprung genommen hat.

Einführung specieller Coordinatensysteme, d. h. durch einen sachlich ganz unbegründeten Kunstgriff, und auch das nur in sehr einfachen Fällen.

Was die Bezeichnung jener Processe betrifft, so habe ich mich der in Deutschland üblichen „symbolischen" Schreibart angeschlossen, weil diese am leichtesten zu handhaben ist, wiewohl in theoretischer Hinsicht Cayley's, sowie besonders die aus Grassmann's Lückenausdrücken entspringende Bezeichnungsweise gewisse Vorzüge besitzen.

Eine Abweichung von der gebräuchlichen Darstellung habe ich mir nur insofern gestattet, als ich nicht, wie es gewöhnlich geschieht, Coordinaten etwa eines Punktes als Veränderliche ansehe, sondern im Sinne Grassmann's, diesen Punkt selbst; so dass, wenn in § 3 ein Punkt als „Parameter" einer Mannichfaltigkeit von fünf Dimensionen eingeführt wird, bei Anwendung der Coordinatenmethode die sechs homogenen Coordinaten dieses Punktes als eben so viele unabhängige (homogene) Parameter zu betrachten wären.

Die hier zu Grunde gelegte, in dieser Gestalt zuerst von Herrn Stroh („Zur Theorie der Combinanten", Math. Annalen Bd. XXII S. 393 u. ff.) benutzte Parameterdarstellung linearer Mannichfaltigkeiten von Formen derselben Ordnung ist übrigens nicht, wie es vielleicht den Anschein hat, als ein willkürlicher Kunstgriff, sondern nur als der naturgemässe Ausdruck der Thatsache anzusehen, dass diese Formen in doppelter Hinsicht Gegenstand der Betrachtung werden: im vorliegenden Falle erscheint der Kegelschnitt einmal als Ort von Punkten oder Linien in der Ebene — wobei also diese als veränderlich angesehen werden — das andere Mal als Element der ganzen, von allen Kegelschnitten der Ebene gebildeten Mannichfaltigkeit — wobei der Kegelschnitt selbst veränderlich gedacht wird.

Man hat das hiermit berührte Verhältniss bisher so dargestellt, dass man die Coefficienten der Gleichung des Kegelschnittes (ich bleibe bei dem concreten Falle, wiewohl die Sache natürlich allgemeine Geltung hat) unmittelbar als homogene Coordinaten eines Punktes im senären Gebiete (Raum von fünf Dimensionen) deutete. Gegen ein solches Verfahren, einen so bedeutenden Fortschritt seine erste Einführung auch repräsentiren mochte, ist aber u. A. einzuwenden, dass die rein projective Auffassung von *Coefficienten* einer Kegelschnittgleichung nichts weiss, dass bei seiner Anwendung die senär-invarianten Bildungen nicht, wie doch zu verlangen ist, auch formal als solche hervortreten, und dass es bei weitergehenden Untersuchungen bald genug die nöthige Einfachheit vermissen lässt — wie es denn überhaupt der selben Kritik unterliegt, wie der Gebrauch des Coordinatenrechnen im Allgemeinen.

Die doppelte Auffassung selbst aber ist bei Untersuchungen, wi

die vorliegende, kaum zu umgehen. Denn die sogenannte „*Abbildung auf die Punkte eines höheren Raumes*", deren einfachster analytischer Ausdruck jene Parameterdarstellung ist, dient nicht allein wesentlich zur klareren Auffassung bekannter Dinge*), indem sie den wirklich vorhandenen Analogien mit Verhältnissen der gewöhnlichen Geometrie auch in der Form ihrer Sätze Rechnung trägt, sondern sie führt auch auf neue Wahrheiten, die zu entdecken auf anderem Wege sehr schwer gewesen sein würde, schon darum, weil ihre blosse Aussprache bei Verzichtleistung auf jene Analogie ausserordentlich verwickelt werden würde.**)

Es wäre daher, selbst auf dem Felde der rein synthetischen Methode, Pedanterie, wenn man aus metaphysischen Gründen, wie dem: „dass man sich höhere Räume nicht vorstellen könne, und mithin auch nicht von einer „Geometrie" (als etwas wesentlich auf der Anschauung Beruhendem) in solchen Räumen sprechen dürfe", auf solche Vortheile verzichten wollte, oder wenn man den an sich vollkommen berechtigten Satz dagegen in's Feld führen wollte, „dass man sich die Verhältnisse der ebenen Geometrie auch müsse klar machen können, ohne aus der Ebene hinauszutreten" — da ja ein solches Hinaustreten lediglich in der Ausdrucksweise stattfindet, während die begrifflichen Operationen, für die man unnöthiger Weise neue Namen erfinden müsste, wollte man jenen Analogien aus dem Wege gehen, dadurch natürlich nicht geändert werden, dass man „Punkt" statt „Kegelschnitt" sagt.

---

*) Wie mannichfache Abwege würden nicht in der Charakteristikentheorie vermieden worden sein, wenn man von ihr einen ausgiebigeren Gebrauch hätte machen wollen!

**) Hierher gehören z. B. die meisten der Sätze, welche von der (hier mit T bezeichneten) quadratischen Transformation handeln, die in der Geometrie der Kegelschnitte eine ausgezeichnete Stellung einnimmt.

Hinsichtlich der Kegelschnitte wurde die in Rede stehende Abbildung zuerst von Cayley betrachtet („On the curves, which satisfy given conditions" Phil. Trans. 1868 vol. 158), der jedoch die Doppelnatur derselben nicht hervorhob. Die Kenntniss des Umstandes, dass mit jener Abbildung der Curven n^{ter} Ordnung zugleich eine Abbildung der Curven n^{ter} Classe verbunden sei, verdanken wir vorzüglich den Untersuchungen der Herren Rosanes und Reye (s. besonders die Darstellung dieser Theorie bei H. Grassmann: „Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren und den Zusammenhang algebraischer Gebilde" in Crelle's Journal Bd. 84, S. 273).

Neuerdings wurde dieselbe Abbildung der Kegelschnitte einer Ebene auf geometrischem Wege mit grosser Ausführlichkeit untersucht von Herrn Veronese (Le superficie omaloide ecc. Atti della R. A. dei Lincei, serie 3ª, vol. XIX, 1884) und fast gleichzeitig von Herrn Segre („Considerazioni intorno alla geometria delle coniche" ecc. Atti delle Scienze di Torino, vol. XX, 1885). Die geometrischen Resultate von § 3 und § 4 der vorliegenden Arbeit sind in jenen zumeist bereits enthalten.

Ich glaube sogar, nicht zu weit zu gehen, wenn ich in der Aufstellung und *zwiefachen* geometrischen Interpretation des vollständigen Formensystems der ternär-quadratischen, senär-linearen Form, welche jene Parameterdarstellung vermittelt, die Fundamentalaufgabe der Geometrie der Kegelschnitte erblicke.*)

Die Betrachtung derartiger Formen besitzt aber auch ein selbstständiges Interesse: Formen, die Veränderliche verschiedener von einander unabhängiger Gebiete enthalten, sind ebenso wie die Connexe Clebsch's als elementare *Grundgebilde* der Geometrie anzusehen; und zwar sind sie die allgemeinsten Objecte, welche den Methoden der Formentheorie unterworfen sind. Von geometrischer Seite haben sich einige derselben, besonders solche, welche mehrere Arten von Veränderlichen linear enthalten, und unter dem Namen der Systeme projectiver Erzeugungsarten von Curven oder Oberflächen bekannt sind, schon vor längerer Zeit der Betrachtung aufgedrängt, und sind neuerdings immer mehr in den Vordergrund getreten; auch lassen sich wohl eine Reihe von Untersuchungen, bei denen es weniger augenfällig ist, auf das Studium derartiger Formen zurückführen.

Die Algebra stellt dieselben von vorn herein als selbstständige Gebilde hin, welche, den Curven oder Flächen gleichwerthig, eine principielle Berücksichtigung verdienen, gleichgiltig ob sie zu bereits Bekanntem hinleiten, oder nicht. Sie eröffnen der Geometrie ein noch kaum betretenes, überraschend ergiebiges Arbeitsfeld, welches ohne allzugrosse Mühe die merkwürdigsten Resultate ernten lässt.

Zum Theil wegen der veränderten Fassung des Charakteristikenproblems, zum Theil wegen der eben entwickelten methodischen Anschauungen des Verfassers hat von älteren, dem Gegenstande nach mit der vorliegenden zusammenhängenden Untersuchungen ausser einer eleganten, von Herrn Halphen eingeführten und von Herrn Schubert zu einem eigenthümlichen Calcül ausgebildeten symbolischen Schreibart für diese Betrachtung beinahe Nichts verwerthet werden können; es sind daher auch keine anderen Vorkenntnisse zum Studium derselben erforderlich, als die der Grundlagen der symbolischen Methode.**)

---

*) Die Bedeutung, welche dieser Form in der Theorie der Kegelschnitte zukommt, kann man am besten aus dem Umstande ermessen, dass man — wie hier beiläufig erwähnt werden mag — das volle Formensystem beliebig vieler ternärer quadratischer Formen angeben kann, sobald man für diese Form ein endliches, vollständiges System aufgestellt hat. Aehnliches gilt natürlich von allen analogen Parameterdarstellungen.

**) Diese sind entwickelt in den folgenden Abhandlungen:

Clebsch „*Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen*". Crelle's Journal Bd. 59, woselbst der Fundamentalsatz *κατ' ἐξοχήν* dieser Theorie auf-

Um dies zu ermöglichen, ist das Wenige, das aus älteren Darstellungen herübergenommen werden konnte, hier reproducirt worden. Es war im Wesentlichen nur die bereits von Chasles angegebene Zurückführung des auf mehr als zwei Kegelschnittsysteme bezüglichen Charakteristikenproblems auf die zwei Systeme betreffende Aufgabe.

1.

Das Charakteristikenproblem.

Wir gehen nun dazu über, die Aufgabe, um welche es sich handeln soll, genauer festzustellen, und zwar allgemein für beliebige algebraische Formen mit beliebig vielen Veränderlichen desselben Gebietes oder verschiedener Gebiete.

Wir nehmen an, es befinde sich in einem System algebraischer Formen, welches durch das Verschwinden gewisser Invarianten und Covarianten definirt ist, deren Gesammtheit wir mit A bezeichnen wollen, eine Form, für welche gewisse andere covariante Bildungen B verschwinden.

Dann wird die Gesammtheit der zu dem System (A) gehörigen Formen, für welche $B = 0$ ist, eine Mannichfaltigkeit von niedrigerer Dimension bilden, als das — als irreducibel angenommene — System (A) selbst, da sonst die Formen B zu den Formen A gehörten.

Es wird also in dem System (A) unendlich viele, die gegebene Form enthaltende, einfach ausgedehnte algebraische Mannichfaltigkeiten geben, für deren sämmtliche Formen keine der Covarianten B oder höchstens eine *einzelne* zu B gehörige *Invariante* B_1 verschwindet. Auf einer solchen Mannichfaltigkeit nun wird man immer einen Parameter t, welcher für die gegebene Form den Werth t_0 annimmt, so einführen können, dass jeder der Ausdrücke B dividirt durch eine ganze Potenz von $(t - t_0)$ für den Werth $t = t_0$ gegen eine endliche

---

gestellt wird, nämlich der Satz, dass man durch die symbolischen Operationen *alle* rationalen Invarianten unbeschränkt veränderlicher Formen erhält;

Clebsch: „*Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie*", Gött. Abhdlg. Bd. 17, 1872, wo der Satz über die Zurückführbarkeit von Formen mit mehreren Veränderlichen („Reihen von Veränderlichen" in der Terminologie von Clebsch) auf die Formen ihres „eigentlich reducirten Systems" bewiesen wird, und

Gordan, „*Ueber Combinanten*", Math. Annalen Bd. 5, wo die nach den Formen des eigentlich reducirten Systems fortschreitenden Reihenentwicklungen, soweit sie hier in Betracht kommen, angegeben sind.

Aus der Theorie der ternären quadratischen Formen wird nur das vorausgesetzt, was etwa in Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen über Geometrie" darüber gesagt ist.

Grenze convergirt (B_1 ausgenommen, das seinen Werth Null beibehält). Es wird dann in der Umgebung des Punktes t_0 jener Mannichfaltigkeit $B_i = (t - t_0)^{\varkappa_i} \cdot B_i'$, wo B_i' für $t = t_0$ nicht mehr verschwindet.

Man erhält so für *jede* zu B gehörige Invariante oder Covariante einen bis auf eine Potenz eines constanten Factors bestimmten Werth, und für jede absolute Invariante und Covariante einen völlig bestimmten Werth*), wenn man jede Form B_i durch die zugehörige B_i' ersetzt; *und zwar sind die B_i' mit der Grundform und unter einander durch dieselben identischen Relationen verknüpft, welche die B_i verbanden, so lange sie nicht identisch Null waren***). — Ich bezeichne nun die gegebene Form, für welche noch mehr als eine Invariante oder Covarianten B_i verschwinden, die nicht zu A gehören, als *unvollständig in Bezug auf das System von Invarianten und Covarianten A*; als in Bezug auf dieses System *vollständig* dagegen, wenn man alle B_i durch die auf die angegebene Art bestimmten Formen B_i' ersetzt hat.

Als *„vollständige Form" im engeren Sinne* wollen wir dieselbe bezeichnen, wenn das System A nur aus denjenigen Invarianten und Covarianten besteht, welche für *alle* Formen der gleichen Ordnung, Classe etc. identisch Null sind, wenn also die durch $A = 0$ definirte Mannichfaltigkeit von Formen (A) die höchstmögliche Dimension hat, und (folglich) linear ist.

Es werden nun jeder unvollständigen Form unendlich viele vollständige Formen *zugehören*, welche man durch die verschiedenen Grenzprocesse der geschilderten Art erhält. Haben wir insbesondere eine unvollständige Form P als Glied einer algebraischen, zwei- oder mehrfach ausgedehnten Mannichfaltigkeit M gegeben, welche der durch das Verschwinden von A definirten Mannichfaltigkeit (A) angehört, ohne zugleich einer Mannichfaltigkeit anzugehören, welche durch das Verschwinden eines A umfassenden Systems von Invarianten und Covarianten definirt ist, so wird man P noch auf unendlich viele Arten mit Hilfe einfach ausgedehnter Mannichfaltigkeiten vervollständigen können, welche dem System M angehören. Führt man dies auf alle wesentlich verschiedenen Arten aus, so erhält man ein System von zu P gehörigen, in Bezug auf A vollständigen Formen, welches alle solche Formen umfasst, die als Grenzlagen von Formen der Mannichfalltigkeit M angesehen werden können. Dieses System wird im Allgemeinen nicht sämmtliche zu P gehörige, in Bezug auf A vollständige

*) Hierher ist in diesem Zusammenhange auch der Werth ∞ zu rechnen, da man, um den bestimmten Werth 0 zu erhalten, in diesem Falle nur den reciproken Ausdruck zu betrachten braucht.

**) Das Festhalten an diesen Relationen ist der Kern der Sache; von hier aus lässt sich auch die Verallgemeinerung der im Text eingeführten Begriffe auf simultane Systeme vollziehen.

Formen umfassen. Wir betrachten nun allein diejenigen derselben, welche in diesem System vorkommen, als *zu der Mannichfaltigkeit M gehörig;* die anderen, welche nicht durch innerhalb M verlaufende Grenzprocesse erhalten werden können, wollen wir als *dem System M nur „scheinbar" angehörig* bezeichnen.

Dann werden wir eine unvollständige Form P, welche mehreren in (A) enthaltenen Systemen $M, M', M'' \ldots$ angehört, als denselben nur *scheinbar zugleich angehörig* zu betrachten haben, wenn keine der zu M und P gehörigen vollständigen Formen zugleich eine vollständige Form von $M', M'', \ldots$ ist, oder genauer, wenn unter den zu M gehörigen vollständigen Formen P_M sich keine findet, deren ergänzende Formen B_i' von den ergänzenden Formen je einer zu $M', M'' \ldots$ gehörigen vollständigen Form $P_{M'}, P_{M''} \ldots$ sich nur um dieselben Potenzen je eines für $M', M'', \ldots$ constanten Factors unterscheiden. Alle zu P gehörigen vollständigen Formen dagegen, bei welchen das Letztere eintritt, betrachten wir als den Systemen $M, M', M'' \ldots$ *wirklich zugleich angehörig.*

Hinsichtlich der Multiplicität dieses Angehörens bedarf es noch besonderer, sich in jedem Falle von selbst ergebender Bestimmungen. Setzen wir dieselben als ausgeführt voraus, so können wir die Aufgabe, um welche es sich hier handelt, kurz so aussprechen:

Es sind mehrere Systeme von Formen, $M, M', M'' \ldots$ gegeben, für deren sämmtliche Formen alle Invarianten und Covarianten eines Systems A verschwinden, ohne dass für sämmtliche Formen eines dieser Systeme — abgesehen von einer einzigen etwa verschwindenden Invariante — noch irgend eine andere covariante Bildung identisch Null ist.

Anzugeben, wann eine diesen Systemen gemeinschaftlich angehörende unvollständige Form denselben scheinbar, oder wirklich zugleich angehört; und, falls die Zahl der allen Systemen gemeinsamen vollständigen Formen eine endliche ist, diese Zahl zu bestimmen.

Wir wollen nun diese Fragen unter der Voraussetzung, dass wir es mit vollständigen Formen im engeren Sinne zu thun haben, für die ternären quadratischen Formen in dem Falle behandeln, wo ein einfach- und ein vierfach ausgedehntes System zum Durchschnitt zu bringen sind.

2.

Das Charakteristikenproblem der ternären quadratischen Formen.

Die eben formulirte Aufgabe erfährt eine wesentliche Vereinfachung für die quadratischen Formen (und ähnlich für alle Formen, die nicht mehr als eine Invariante haben) durch den Umstand, dass eine solche Form im Allgemeinen nicht unvollständig sein kann; oder mit anderen Worten, dass eine quadratische Form, wenn eine covariante Bildung

derselben verschwindet, die nicht für jede quadratische Form verschwindet, von weniger Constanten abhängt, als die allgemeinste quadratische Form*).

Wir behaupten insbesondere in Bezug auf die ternären quadratischen Formen, die uns hier allein angehen, dass die Covariante $(abu)^2$ einer solchen Form $a_x{}^2$**) identisch verschwinden muss, sobald irgend eine Covariante derselben identisch verschwindet, die nicht für jede ternäre quadratische Form Null ist.

In der That, nehmen wir an, es verschwinde irgend eine Covariante von $a_x{}^2$ identisch. Dann verschwinden sämmtliche Formen ihres eigentlich reducirten Systemes ebenfalls identisch. Diese verschwinden nun entweder für jede Form $a_x{}^2$, oder es muss, falls nicht die gegebene Form selbst den Factor $(abc)^2$ haben soll, sich wenigstens eine Form unter denselben befinden, die von diesem Factor frei ist, und sich also auf Grund der von Herrn Gordan angegebenen Entwickelung als eine nach Potenzen von $u_x{}^2 \cdot (abc)^2$ fortschreitende Reihe darstellen lässt, in welcher der Coefficient der nullten Potenz ein Product einer Potenz von $a_x{}^2$ und einer Potenz von $(abu)^2$ ist.

Da auch diese Reihe nicht identisch verschwinden kann, ohne dass ihre einzelnen Glieder verschwinden, und $a_x{}^2$ nicht verschwindet, so folgt $(abu)^2 \equiv 0$.

Da die Invariante $(abc)^2$ Null in der zweiten Ordnung wird, wenn $(abu)^2$ in der ersten Ordnung für beliebiges u verschwindet, ergiebt sich zugleich, dass die Grenzlagen aller übrigen Covarianten bestimmt sind, sobald man die von $(abu)^2$ auf die im § 1 angegebene Art bestimmt hat; so dass man, um zu entscheiden, ob eine zwei Systemen angehörige unvollständige Form $a_x{}^2$ denselben scheinbar, oder wirklich zugleich angehört, nur darauf zu achten hat, ob unter den Formen, die man nach § 1 an Stelle der Covariante $(abu)^2$ erhält, sich solche befinden, die sich nur um einen Factor unterscheiden, oder nicht.

3.

Die doppelte Parameterdarstellung der Kegelschnitte einer Ebene.

Bei einer Untersuchung der Mannichfaltigkeit aller Kegelschnitte einer Ebene erscheint es, wie bereits hervorgehoben, naturgemäss,

*) Dies ist natürlich nur ein Aequivalent des Satzes, dass die irreducibelen quadratischen Formen linear in einander transformirbar sind; in Folge wovon man hier einen Unterschied zwischen *allgemeinen* und *besonderen* Formen machen kann, was in den höheren Fällen nicht mehr angeht. Bei den Formen, welche nicht mehr als *zwei* Invarianten haben (insbesondere also auch den *ternären cubischen* und den *binären biquadratischen Formen*) findet noch eine ähnliche Vereinfachung des Charakteristikenproblems statt. Jener Satz durfte in unserem Zusammenhange natürlich nicht benutzt werden.

**) Ich bediene mich hier der allgemein üblichen Bezeichnungen.

diese Gebilde auch formal als Elemente der von ihnen gebildeten Mannichfaltigkeit darzustellen, d. h. dieselben von einem senären Parameter (oder genauer, einem Paar solcher Parameter, wie wir sogleich sehen werden) abhängig zu machen.

Wir werden uns also, behufs einer Untersuchung zunächst der von allen Curven zweiter *Ordnung* der Ebene gebildeten Mannichfaltigkeit einer Parameterdarstellung von der Form

(1) $$U_M m_x^2 = 0$$

bedienen. Hier verstehen wir unter $U_X = 0$, $u_x = 0$ (senäre Gebilde werden im Folgenden immer mit grossen, ternäre mit kleinen Buchstaben bezeichnet) die Coincidenzbedingung eines Punktes X und einer linearen Mannichfaltigkeit U fünfter Stufe des senären, bezüglich eines Punktes x und einer Geraden u des ternären Gebietes, und es sollen, nach der gewöhnlichen Vorstellung „erst Symbole M mit Symbolen m multiplicirt eine reelle Bedeutung erlangen".

Die Gleichung (1) wird im Allgemeinen — und wir betrachten hier nur den allgemeinen Fall, wiewohl die besonderen kein geringeres Interesse besitzen — sie wird im Allgemeinen zu je zwei verschiedenen Räumen U zwei verschiedene Curven 2. O. liefern; und es wird, da linear abhängigen Räumen U vermöge (1) ebenso beschaffene Curven entsprechen, auch umgekehrt möglich sein, zu einer gegebenen Curve 2. O. den ihr entsprechenden Raum U eindeutig zu bestimmen.

Dasselbe gilt von der Abbildung der Mannichfaltigkeit aller Curven 2. *Classe* der Ebene auf die *Punkte* des senären Gebietes, welche, in der umgekehrten Richtung, ebenfalls durch (1) vermittelt wird.

Sei nämlich $u_a^2 = 0$ irgend eine Curve 2. Classe, so stellt

(1a) $$U_M m_a^2 = 0,$$

U als veränderlich betrachtet, einen Punkt X des senären Gebietes vor, und zwar entsprechen linear abhängigen Curven 2. Cl. linear abhängige Punkte. Es ist aber das Bestehen der Gleichung (1a) einerseits die Bedingung dafür, dass die Curve 2. O. deren Gleichung $U_M m_x^2 = 0$ ist, und die Curve 2. Cl. $u_a^2 = 0$ einander conjugirt sind; andererseits dafür, dass der Raum U durch den u_a^2 entsprechenden Punkt X hindurchgeht. Würden nun 6 linear unabhängigen Curven 2. Cl. nicht ebenso beschaffene Punkte entsprechen, sondern diese bereits in einem linearen Gebiet fünfter Stufe enthalten sein, so würde die letzterem entsprechende Curve 2. O. zu jenen 6 Curven 2. Classe conjugirt sein, was nicht angeht.

Also ist zugleich mit der durch (1) *vermittelten ein-eindeutigen Abbildung der Räume U des senären Gebietes R_5 auf die Mannichfaltigkeit der Curven 2. O. der Ebene eine ebenfalls eindeutig umkehrbare Abbildung der Curven 2. Cl. auf die Punkte X dieses Gebietes gegeben. Conjugirten Curven entsprechen incidente Elementenpaare von R_5.*

Die Gleichungen (1) und (1a) geben uns zu jedem $R_4^1 : U$ von R_5 die zugehörige Curve 2. O. und zu jeder Curve 2. Cl. den zugehörigen Punkt X von R_5. Da wir wissen, dass die inversen Schritte ebenfalls ausführbar sind, so tritt nun die Aufgabe an uns heran, die Formeln, durch welche dies geschieht, und die, wie wir von vornherein sagen können, den Formeln (1) und (1a) völlig gleichgebaut sind und zu ihnen in umkehrbarer Beziehung stehen, wirklich herzustellen.

Wir haben zu diesem Behufe nach dem vorstehenden Satze nur mit Hilfe der Formel (1) die Curven 2. O. aufzusuchen, welche irgend fünf linear unabhängigen, einen gegebenen Punkt X enthaltenden R_4^1 von $R_5 : U_1, U_2 \ldots U_5$ entsprechen, und dann die Gleichung der zu ihnen gemeinsam conjugirten Curve 2. Cl. zu bilden, welche in Bezug auf $U_1 \ldots U_5$ die Combinanteneigenschaft haben muss, dieselben also nur in der Verbindung:

$$(U_1 U_2 \ldots U_5 U) \equiv U_X$$

enthalten kann. In der That ist die ternäre Form 2. Cl.:

$$U_{1_{M_1}} \cdots U_{5_{M_5}} \left\{ \begin{matrix} (m_1 m_2 u)\,(m_3 m_4 u)\,(m_1 m_3 m_5)\,(m_2 m_4 m_5) \\ -\,(m_1 m_3 u)\,(m_2 m_4 u)\,(m_1 m_2 m_5)\,(m_3 m_4 m_5) \end{matrix} \right\}$$

welche, gleich Null gesetzt, jene Curve darstellt, da sie bei Vertauschung je zweier Symbole $M_x m_x^2$ das Vorzeichen wechselt, identisch gleich:

$$\frac{2}{5!}\,(U_{1_{M_1}} \cdots U_{5_{M_5}})\,(m_1 m_2 u)\,(m_3 m_4 u)\,(m_1 m_3 m_5)\,(m_2 m_4 m_5)$$
$$\equiv \frac{2}{5!}\,(M_1 M_2 \cdots M_5 X)\,(m_1 m_2 u)\,(m_3 m_4 u)\,(m_1 m_3 m_5)\,(m_2 m_4 m_5).$$

Dieser Ausdruck, für welchen wir kurz

$$N_X u_n^2 \tag{2}$$

schreiben wollen, *hat die Form der Gleichung* (1). *Er liefert, gleich Null gesetzt, die einem Punkte X von* R_5 *entsprechende Curve 2. Classe; ebenso die Gleichung*

$$N_X a_n^2 = 0 \tag{2a}$$

den einer gegebenen Curve 2. O.: a_x^2 *entsprechenden* R_4^1.

Sucht man mit Hilfe der Gleichung (2) zu einem Punkt X die Gleichung der ihm entsprechenden Curve 2. Cl., und dann nach (1) zu dieser wieder den entsprechenden Punkt, so muss man zu dem Punkte X zurückgelangen, und ebenso muss sich die Bedingung dafür, dass die einer gegebenen Curve 2. O. und einer gegebenen Curve 2. Cl. entsprechenden Gebilde incident sind, auf die Bedingung des Conjugirtsein's der ersteren reduciren. Dies findet seinen analytischen Ausdruck in den durch die Gordan'schen Reihenentwickelungen sich ergebenden Identitäten:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & N_X U_M m_n^2 \equiv U_X \cdot J \\ \text{II} & N_M u_n^2 m_x^2 \equiv u_x^2 \cdot J \end{array}\right\} \text{ wo } J = \frac{1}{6} N_M m_n^2,$$

welche die Reduction jeder Covariante von (1) geben, die einen der symbolischen Factoren N_M oder m_n^2 besitzt.

Das Verschwinden der (einzigen) Invariante J der Form (1) wird durch die Bedingung ausgeschlossen, dass linear unabhängigen Räumen R_4^1 eben so beschaffene Curven 2. O. entsprechen sollen.

4.

Der Ort der ausgearteten Kegelschnitte.

Da eine ternäre Form 2. O. zu ihrer Covariante 2. Cl. im Allgemeinen in umkehrbarer Beziehung steht, so ist sie bei der im vorigen Paragraphen betrachteten Abbildung zweimal vertreten: einmal durch einen Raum R_4^1, den wir mit W bezeichnen wollen, das andere mal durch einen Punkt Z. Beide sind, zufolge der Gleichungen (1) und (2) der eine aus dem anderen durch die Gleichungen zu bestimmen:

$$(3) \qquad W_A^2 U_A \equiv W_M W_{M'} U_{M''} \ (m m' m'')^2 = 0,$$

$$(4) \qquad L_Z^2 L_X \equiv N_Z N_{Z'} N_{X''} \ (n n' n'')^2 = 0.$$

Sucht man aus (3) den dem Raume W entsprechenden Punkt Z, und dann aus (4) rückwärts den Z entsprechenden Raum R_4^1, so muss man, falls die Invariante des durch W vorgestellten Kegelschnittes von Null verschieden ist, wieder zu dem Raum W zurückgelangen. In der That wird zu Folge der Reductionsformeln I und II:

$$\text{III} \qquad L_A L_{A'} U_A^2 U_{A'}^2 L_X \equiv \frac{4}{3} U_A^3 \cdot U_X \cdot J^3$$

$$\text{IV} \qquad L_A L_{A'} L_X^2 L_{X'}^2 U_A \equiv \frac{4}{3} L_X^3 \cdot U_X \cdot J^3.$$

Wir haben es also mit einer (im Allgemeinen) ein-eindeutigen, quadratischen Transformation zu thun; und zwar ist, wie der Anblick der Gleichungen (3) und (4) lehrt, die Beziehung zwischen dem Punkte Z und dem ihm zugeordneten Raume W eine derartige, dass Z die lineare Polare des Raumes W in Bezug auf die R_4^1-Mannichfaltigkeit dritter Ordnung: $U_A^3 = 0$, oder kurz Λ^3, und gleichzeitig W die lineare Polare von Z in Bezug auf den Raum R_4^3 dritter Ordnung $L_X^3 = 0$, oder kurz L^3 ist.*)

*) Ein ähnliches Vorkommen bietet bereits die ternäre Geometrie in der Beziehung zwischen einem Punkt und seiner Harmonikale in Bezug auf ein festes Dreieck dar. Hier kann sowohl der Punkt als lineare Polare der Geraden in

Wir wollen im Folgenden diese quadratische Transformation, die wir noch eingehender zu untersuchen haben, kurz als die „*Transformation T*“ bezeichnen, und die in derselben einander entsprechenden Mannichfaltigkeiten von Punkten und Räumen R_4^1 als „*System S*“ und „*System* Σ“ einander gegenüberstellen.

Die beiden Mannichfaltigkeiten L^3 und Λ^3 gehen durch ∞^8 collineare Transformationen in sich über, welche den ∞^8 collinearen Transformationen der Ebene entsprechen, und werden durch eben so viele dualistische Transformationen in einander übergeführt, welche den dualistischen Transformationen der Ebene zugeordnet sind.*)

In Folge des Vorhandenseins der Transformationen der letzteren Art wird man bei der Betrachtung der Mannichfaltigkeiten L^3 und Λ^3 willkürlich von einer derselben den Ausgang nehmen dürfen, indem das Princip der Dualität die entsprechenden Eigenschaften der anderen liefert. Wir wählen der leichteren Aussprache der aufzustellenden Sätze wegen den Raum L^3, dessen Punkte allen Curven 2. Classe der Ebene zugeordnet sind, welche in ein Paar von Strahlenbüscheln (d. h. in ein Punktepaar) ausarten.

Die Gleichung $L_X{}^3 = 0$ wird, wie sich aus dieser Bemerkung ergiebt, und wie eine leichte Rechnung bestätigt, identisch erfüllt, wenn man für X einen Punkt einsetzt, dessen Gleichung die Form:

$$U_M m_x m_y = 0 \tag{5}$$

hat. Betrachtet man x und y als veränderlich, und lässt beide Punkte die ganze Ebene durchlaufen, so erhält man in der Gleichung (5) eine *Parameterdarstellung des Raumes* L^3.

Lässt man x und y zusammenfallen, so verwandelt sich (5) in die *Parameterdarstellung einer Fläche*

$$U_M m_x{}^2 = 0, \tag{6}$$

deren Punkte den Punkten des ternären Gebietes ausnahmslos eindeutig zugeordnet sind.

Da die Gleichung (6) von (1) nicht verschieden ist, folgt, dass den Punkten der Schnittcurve dieser Fläche mit einem R_4^1 in der Ebene eine Curve 2. O. entspricht. Da sich zwei solche in vier Punkten schneiden, ist sie von der vierten Ordnung; wir bezeichnen sie deshalb mit F_2^4, und ihr dualistisches Gegenstück mit Φ_2^4.

Man erkennt sofort, dass den Punkten einer Geraden der Ebene

Bezug auf die von den Ecken des Dreiecks dargestellte Curve 3. Classe, als auch die Gerade als lineare Polare des Punktes in Bezug auf die von den Seiten des Dreiecks gebildete Curve 3. O. betrachtet werden.

*) Es kann das Vorliegende geradezu als eine auf diese Transformationsgruppe bezügliche Untersuchung angesehen werden.

die Punkte eines Kegelschnittes jener Fläche zugeordnet sind, und dass überhaupt Curven n^{ter} Ordnung der Ebene und Curven $2n^{ter}$ Ordnung von F_2^4 einander entsprechen. Zugleich ergiebt sich, dass Λ^3 der Ort aller derjenigen Räume R_4^1 ist, welche F_2^4 in einer zerfallenden Curve 4. O. schneiden, d. h. in einem einzigen Punkte berühren, und Φ_2^4 der Ort derjenigen, welche F_2^4 längs eines ganzen Kegelschnittes berühren.

Die lineare Polare eines Punktes Z von F_2^4 in Bezug auf L^3 wird unbestimmt, wie sich auch unmittelbar aus dem identischen Verschwinden der Covariante $(\alpha\alpha' x)^2$ eines Doppelpunktes $(u_\alpha)^2$ ergiebt, so dass also F_2^4 auch durch die äquivalenten Gleichungssysteme:

$$L_Z^2 L_X \equiv 0 \quad \text{oder} \quad N_Z N_Z' (nn'x)^2 \equiv 0$$

definirt ist. *Die Punkte von F_2^4, und zwar nur diese, sind daher Doppelpunkte von L^3; es folgt hieraus, dass L^3 von sämmtlichen Sehnen von F_2^4 beschrieben wird.* Den Punkten solcher Sehnen von F_2^4, welche F_2^4 in zwei getrennten Punkten treffen, entsprechen hierbei die Punktepaare einer allgemeinen quadratischen Involution einer Geraden; den Tangenten von F_2^4 die Punktepaare einer Involution, deren Doppelelemente zusammengefallen sind.

Es folgt weiter, dass der Raum L^3 von zwei Schaaren von je ∞^2 Ebenen beschrieben werden kann, von welchen die erste aus allen Ebenen besteht, welche F_2^4 in einem Kegelschnitte treffen, und die Punkte enthalten, welche den Punktepaaren einer Graden des ternären Gebietes entsprechen; während die der zweiten Tangentialebenen) von F_2^4 sind und solche Punkte tragen, welche Punktepaaren xy der Ebene entsprechen, die einen festen Punkt x enthalten.* Die Parameterdarstellung der Ebenen dieser „zweiten Art" wird daher

$$(MM'M''XYZ)(mm'm'')\, m_x m_x' m_x'' = 0.$$

Durch einen Punkt $U_M m_\xi m_\eta =$ von L^3 gehen zwei solcher Ebenen, deren Parameter ξ und η sind; — umgekehrt schneiden sich zwei Ebenen zweiter Art immer in einem Punkt von L^3.

Der Anblick der Gleichung (5) zeigt, dass irgend zwei feste Ebenen dieser Schaar durch die Gesammtheit der übrigen collinear auf einander

*) D. h. Ebenen, welche alle durch einen gegebenen Punkt x von F_2^4 gehenden Tangenten dieser Fläche enthalten. Eine solche Ebene trifft F_2^4 in *vier* unendlich benachbarten Punkten, als deren Verbindungslinien irgend 6 in ihr gelegene Tangenten von F_2^4 angesehen werden können, die eine Involution bilden. Andere Ebenen als diese beiden Arten giebt es nicht auf L^3; auch enthält L^3 keine Gerade, die F_2^4 nur in einem einzigen Punkte trifft (wohl aber solche, die F_2^4 gar nicht treffen), wie überhaupt keine Curve, die mit F_2^4 eine ungerade Zahl von Punkten gemein hätte. (S. § 6.)

bezogen sind, woraus sich eine einfache projective Erzeugungsart von F_2^4 und L^3 ergiebt.

Durch einen Punkt von L^3, dessen Gleichung

$$U_m m_\xi m_\eta = 0$$

ist, geht ferner eine Ebene der ersten Art, welche den durch die Punkte (ξ) und (η) von F_2^4 gehenden Kegelschnitt dieser Fläche enthält, und also den gegebenen Punkt mit den Berührungspunkten der beiden von ihm an F_2^4 gehenden Tangenten verbindet. Setzt man

$$(\xi\eta x) \equiv u_x,$$

so erhält man hieraus die Parameterdarstellung der Ebenen erster Art:

$$(M M' M'' X Y Z)\,(m m' u)\,(m m'' u)\,(m' m'' u) = 0.$$

Zwei Ebenen dieser Art treffen sich in einem Punkte von F_2^4 und liegen in einem Raum R_4^1 von Λ^3; eine Ebene erster und eine Ebene zweiter Art treffen sich im Allgemeinen nicht, im besonderen Falle aber in allen Punkten einer Tangente von F_2^4.

In gleicher Weise, wie L^3 wird auch Λ^3 von zwei Arten von Ebenen (d. h. hier R_4^1-Bündeln) beschrieben, und zwar ergiebt sich aus der oben aufgestellten Definition von Λ^3 und Φ_2^4, dass dies wieder die beiden eben betrachteten Schaaren von Ebenen sind, jedoch vertauscht, so dass die Ebenen erster und zweiter Art von L^3 als Ebenen zweiter, bezüglich erster Art von Λ^3 bezeichnet werden müssen*).

Da die Fläche F_2^4 auf die Punkte des ternären Gebietes eindeutig umkehrbar bezogen ist, hindert uns nichts, dieselbe geradezu als Träger desselben aufzufassen. Wir werden dadurch in den Stand gesetzt, jede ternäre Construction so auszusprechen, dass sie im Gewande einer senären erscheint, und umgekehrt, was häufig zur Vereinfachung derselben beiträgt, und uns ausserdem neue Eigenschaften der Mannichfaltigkeiten L^3 und F_2^4 kennen lehrt.

So ergeben sich beispielsweise alle die bekannten Sätze, welche von den Eigenschaften conjugirter Kegelschnittsysteme handeln, fast unmittelbar aus unserer Abbildung. Wir wollen uns jedoch hier nicht damit aufhalten, diese ganze Theorie zur Ableitung zu bringen, sondern nur einige Sätze hier anfügen, die auf das Polarsystem einer Curve 2. Cl. u_α^2 Bezug haben.

Wir hatten gesehen, dass im System S der Ort aller Punkte P, welche Curven 2. Classe zugeordnet sind, die sich auf eine gegebene Curve 2. O. stützen, derjenige Raum R_4^1 ist, welcher die gegebene Curve aus dem ternären Gebiete F_2^4 ausschneidet.

*) Es ergiebt sich hier die Bemerkung, dass die Punkte von F_2^4 aus den Ebenen erster Art von L^3 durch collineare R_3^1-Bündel projicirt werden — was man als eine zweite projective Erzeugungsart von F_2^4 ansehen mag.

Daraus ergibt sich unmittelbar, dass die zu einer gegebenen Curve 2. Cl. u_α^2 conjugirten Geradenpaare aus dem ternären Gebiet F_2^4 durch diejenigen Räume R_4^1 von Λ^3 ausgeschnitten werden, welche den jener Curve 2. Cl. entsprechenden Punkt P enthalten, und dass die durch P gehenden Räume R_3^1 die Fläche F_2^4 in den Punkten eines Polvierecks von u_α^2 treffen.

Man erhält also zu einer gegebenen Geraden den Pol in Bezug auf u_α^2, wenn man die Ebene erster Art, welche ihren Repräsentanten auf F_2^4 enthält, mit P durch einen R_3^1 verbindet, der dann den Pol auf F_2^4 ausschneidet.

Umgekehrt wird im System S (und analog im System Σ) dasjenige Kegelschnittsystem, welches von allen Kegelschnitten gebildet wird, in Bezug auf welche ein gegebener Punkt und eine gegebene Gerade Pol und Polare sind, durch die Punkte eines linearen R_3^1 dargestellt, welcher die Repräsentanten beider auf F_2^4 ausschneidet; und das gleichfalls zu sich selbst dualistische System aller Kegelschnitte, die ein gegebenes Poldreieck haben, ist im Systeme S den Punkten einer Ebene zugeordnet, welche die Repräsentanten der Ecken jenes Dreiecks auf F_2^4 verbindet.

Den Punkten eines R_3^1 von S, welcher F_2^4 in vier consecutiven Punkten (einer Ebene zweiter Art) trifft, entsprechen die Curven 2. Cl. der Ebene, welche zwei feste Gerade berühren; dual entsprechen den R_4^1 einer Sehne von F_2^4 die Curven 2. O., welche zwei gegebene Punkte enthalten.

Dies mag genügen, um die Eigenschaften des Ortes der ausgearteten Kegelschnitte wenigstens im Allgemeinen zu charakterisiren.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der durch die Gleichungen (3) und (4) vermittelten Transformation T.

5.

Das Unbestimmtwerden der Transformation T.

Die Formeln (3) und (III) des vorigen Paragraphen sagen aus, dass einem R_4^1 W von Σ, welcher der Gleichung $W_\Delta^3 = 0$ genügt, in der Transformation T ein Punkt von S entspricht, welchem bei erneuter Anwendung von T kein bestimmter R_4^1 von Σ mehr zugeordnet ist. *Es folgt hieraus (was auch unmittelbar einleuchtet), dass den Räumen von Λ^3 in der Transformation T Punkte von F_2^4, den Punkten von L^3 Räume R_4^1 von Φ_2^4 zugeordnet sind. Und zwar entspricht, wie leicht zu sehen, je ∞^2 Räumen von Λ^3, die durch eine Ebene zweiter Art Π von L^3 gehen, in der quadratischen Transformation der Punkt P, in welchem diese Ebene F_2^4 berührt.* Umgekehrt entsprechen jedem Punkte P von F_2^4 als Grenzlagen der

den benachbarten Punkten von P in der Transformation T zugeordneten Räume ∞^2 Räume R_4^1 von Λ^3, welche alle durch die Tangentialebene Π von F_2^4 in P hindurchgehen. Diese Unbestimmtheit der Transformation T für die Punkte von F_2^4 wird aufgehoben, wenn man sich einem Punkte P dieser Fläche auf einer bestimmten, nicht ganz auf F_2^4 verlaufenden Curve PQ nähert, sobald man nur festsetzt, dass als der dem Punkte P *dieser Curve* entsprechende R_4^1 von Σ die Grenzlage des einem Punkte X derselben in T entsprechenden R_4^1 gelten soll, welche derselbe erreicht, wenn X mit P zusammenfällt.

Die Bestimmung dieser Grenzlage lässt sich besonders leicht bewerkstelligen, wenn PQ eine *Gerade* ist. Man erhält dann nämlich als Gleichung der dem Punkte P von PQ entsprechenden Curve 2. O.:

$$N_P N_Q' (nn'x)^2 = 0, \tag{7}$$

mithin als Gleichung des ihm in Σ zugeordneten R_4^1:

$$N_P N_Q' N_X'' (nn'n'')^2 = 0. \tag{8}$$

Dieser Ausdruck ist aber eine Polare von

$$K_X^2 \equiv L_P L_X^2 \equiv N_P N_X' N_X'' (nn'n'')^2.$$

Um zu einer durch einen Punkt P von F_2^4 gehenden Geraden den zugeordneten Raum R_4^1 zu finden, betrachte man also den Tangentialkegel K^2 von L^3 im Punkte P, welcher das Umhüllungsgebilde der zu Φ_2^4 gehörigen quadratischen R_4^1-Mannichfaltigkeit $\varkappa^2$ von Π ist. Dieser Raum enthält, da die linke Seite von (7) und also auch von (8) identisch verschwindet, sobald Q der Ebene Π angehört, die Tangentialebene Π des Punktes P von F_2^4 doppeltzählend*), und kann daher von einer quadratischen Schaar von ∞^1 Räumen R_3^1 beschrieben werden, welche die Ebene Π enthalten und dieselbe mit den durch P gehenden Ebenen erster Art von L^3 verbinden**).

Um nun in einem Punkte P von F_2^4, der einer Geraden PQ angehört, den ihm in Σ entsprechenden Raum R_4^1 zu finden, haben wir gemäss der Formel (8) einfach die Polare eines beliebigen Punktes Q dieser Geraden in Bezug auf K^2 zu bilden. Es haben aber alle Punkte Q, welche in einem und demselben durch Π gehenden Raum R_3^1 liegen, die nämliche Polare. Also:

„Damit einem Punkte P von F_2^4 als Punkt zweier verschiedener Geraden vermöge der Transformation T ein und derselbe R_4^1 von Λ^3 entspreche, ist es nothwendig und ausreichend, dass beide Gerade mit

*) Die quadratische Polare eines nicht auf F_2^4 gelegenen Punktes von L^3 enthält, wie sich hier ebenfalls ergiebt, eine *Gerade* doppelt zählend, die Polare jenes Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt von F_2^4, in dessen Ebene er liegt.

**) Der Schnitt von L^3 und K^2 ist also doppeltzählend der Kegel R_3^3, welcher die Punkte von F_2^4 aus P projicirt.

der Tangentialebene Π *von* F_2^4 *im Punkte* P *durch einen und denselben Raum* R_3^1 *verbunden werden können. Der ihnen dann gemeinsam entsprechende* R_4^1 *von* Λ^3 *ist die Polare eines Punktes jenes* R_3^1 *in Bezug auf den Tangentialkegel* K^2 *von* L^3 *im Punkte* P*, oder in Bezug auf die Enveloppe von* K^2*, die in dem* R_4^1*-Bündel erster Art* Π *von* Λ^3 *enthaltene quadratische* R_4^1*-Mannichfaltigkeit* $\varkappa^2$ *von* Φ_2^4*.*"

Diese Construction, die vielleicht an Anschaulichkeit noch gewinnt, wenn man sie in's Dualistische überträgt, wird nur dann unausführbar, wenn eine der beiden Geraden in der Ebene Π selbst liegt. Dann aber erhält man den dem Punkte P einer solchen Geraden entsprechenden R_4^1 von Φ_2^4 ohne Weiteres, indem man den Tangentialraum eines beliebigen Punktes Q derselben an L^3 construirt.

Führt man den Grenzübergang zu dem Punkte P von F_2^4 nicht auf einer Geraden, sondern auf einer beliebigen Curve aus, so erhält man die der Tangente derselben im Punkte P nach obigem Satze zugeordnete Grenzlage, ausgenommen den Fall, wo diese Gerade in Π liegt, indem dann der einem Punkt Q jener Curve, welcher zu P benachbart ist, in Bezug auf K^2 zugeordnete R_4^1 unbestimmt wird.

Es kann also jeder einen Punkt P *von* F_2^4 *enthaltende Curvenzweig rücksichtlich der Transformation* T *durch seine Tangente in* P *ersetzt werden, wenn derselbe* F_2^4 *nicht in* P *berührt.*

In diesem Falle wird eine besondere Untersuchung nothwendig.

6.

Einfach und vierfach ausgedehnte Mannichfaltigkeiten, der Transformation T unterworfen. Die Charakteristiken derselben.

Wir sind durch die Untersuchung von § 3 in den Stand gesetzt, zu jedem durch ein System invarianter Bedingungen $\Pi = 0$, welche etwa eine Curve 2. Classe u_a^2 zu erfüllen hat, definirten Kegelschnittsysteme die Gleichungen der beiden ihm in S und Σ entsprechenden Mannichfaltigkeiten anzugeben.

Da man bekanntlich jede Form von Π aus einer ganzen Function der in verschiedenen Veränderlichen geschriebenen Formen:

$$u_a v_a,\ a_x a_y \equiv (\alpha\beta x)(\alpha\beta y),\ a_a^2,\ u_x$$

durch Faltung mit zu u_a^2 fremden Formen ableiten kann, so erhält man jene Gleichungen, indem man in jeder so geschriebenen Form von Π die Symbole von u_a^2, a_x^2 das eine Mal durch Symbole von $N_X u_x^2$, bezüglich $N_X N_{X'} (nn'x)^2$, das andere Mal durch Symbole von $U_M U_{M'} (mm'u)^2$, bezüglich $U_M m_x^2$ ersetzt.

Ebenso kann man zu jeder in R_5 gegebenen algebraischen Punkt- oder R_4^1-Mannichfaltigkeit sofort die Gleichungen des entsprechenden

Kegelschnittsystems herstellen, wenn man für X Symbole von $U_M m_a^2$ oder für U Symbole von $N_X a_a^2$ einführt.

Ist eine algebraische Punktmannichfaltigkeit des Systems S durch eine Gleichung für X gegeben, etwa $A_X^i = 0$, so entspricht ihr vermöge der Transformation T in Σ eine Mannichfaltigkeit

$$U^2_{\mathcal{A}^{(1)}} \cdots U^2_{\mathcal{A}^{(l)}} A_{\mathcal{A}^{(1)}} \cdots A_{\mathcal{A}^{(l)}} = 0$$

von doppelt so hoher Ordnung. Geht man durch erneute Anwendung von T wieder zu dem System S zurück, so erhält man in Folge der Identität (IV):

$$L_X^{(1)} L_X^{\prime(1)} \cdots L_X^{(l)} L_X^{\prime(l)} \cdot L^{(1)}_{\mathcal{A}^{(1)}} L^{\prime(1)}_{\mathcal{A}^{(1)}} \cdots L^{(l)}_{\mathcal{A}^{(l)}} L^{\prime(l)}_{\mathcal{A}^{(l)}} \cdot A_{\mathcal{A}^{(1)}} \cdots A_{\mathcal{A}^{(l)}}$$
$$\equiv \left[\tfrac{4}{3} J^3\right]^l \cdot \left[L_X^3\right]^l \cdot A_X^l \,.$$

Es scheidet sich also der Factor $L_X{}^3$ l-mal ab, was daher rührt, dass die transformirte Mannichfaltigkeit $\Phi_2{}^4$ l-mal enthält.

Dass aber in der Transformation T Mannichfaltigkeiten von den Ordnungen l und $2l$ einander entsprechen, ist offenbar eine Besonderheit: als den allgemeinen Fall werden wir denjenigen anzusehen haben, wo $A_X^l = 0$ bereits selbst mit der Eigenschaft behaftet ist, welche bei dem transformirten Raum die Abscheidung des Factors $L_X{}^3$ bei Anwendung der Transformation T herbeiführt.

Um die allgemeinste Form der Gleichung eines Raumes M_4^l, welcher λ mal durch $F_2{}^4$ geht, zu finden, setze man für die Symbole von u_a^2 die Symbole einer sonst beliebigen, in einem binären Parameter t linearen, und in den Linien des ternären Gebietes quadratischen Form $\sigma_t u_s^2$, deren Covariante $\sigma_t \sigma_{t'} (ss'x)^2$ für $t = t_0$ identisch verschwindet. Nehmen wir nun an, dass die Gerade, welche der durch erstere Form dargestellten Kegelschnittschaar im System S entspricht:

$$(M M' X Y Z T)\,(\sigma\sigma')\, m_s^2 m_{s'}^{\prime 2} = 0$$

nicht in dem $F_2{}^4$ angehörigen Punkte $U_M m_s^2 \sigma_{t_0} = 0$ den Raum $A_X^l = 0$ berührt, und dieser Punkt keine weitere Besonderheit $A_X^l = 0$ gegenüber besitzt, so wird der Ausdruck A_X^l für $t = t_0$ in der λ^{ten} Ordnung verschwinden müssen. Nehmen wir ferner an, es sei A_X^l in der zu Anfang dieses Paragraphen angegebenen Weise geschrieben. Enthalten dann diejenigen Terme von A_X^l, welche von a_a^2 frei sind — und solche muss es immer geben, wenn A_X^l irreducibel sein soll — λ_1 Symbole von a_x^2, so wird A_X^l unter der obigen Voraussetzung von der Ordnung λ_1 Null werden, da alle anderen Terme in höherem Grade verschwinden. Es folgt also $\lambda_1 = \lambda$, und wir erhalten als allgemeinste Gleichungsform eines Raumes von der Ordnung l, welcher λ mal durch $F_2{}^4$ geht, einen Ausdruck vom Typus:

$$N_X^{(1)} \cdots N_X^{(l)} \Pi_1 \left[(u_n^2), \left((nn'x)^2 \right) \right] = 0,$$

wo Π_1 eine simultane Invariante von u_n^2 und $(nn'x)^2$ mit beliebigen anderen Formen ist, in welcher die von $(nn'n'')^2$ freien Glieder in den Symbolen von u_n^2 bis zum Grade $l - 2\lambda$, in den Symbolen von $(nn'x)^2$ bis zum Grade λ ansteigen, ohne dass weitere Symbole von u_n^2 zu Symbolen von $(nn'x)^2$ zusammengezogen werden könnten.

Die dieser Gleichung in dem transformirten System Σ_1 entsprechende aber wird:

$$U_{M^{(1)}} \cdots U_{M^{(2l-3\lambda)}} \Pi_1 \left[\left((mm'u)^2 \right), (m_x^2) \right] = 0,$$

ein Ausdruck, der eine R_4^1-Mannichfaltigkeit von der Ordnung $l' = 2l - 3\lambda$ darstellt, welche $\lambda' = l - 2\lambda$ mal durch Φ_2^4 geht.

„*Wenn eine Punkt- und eine R_4^1-Mannichfaltigkeit je eines der Systeme S und Σ, mit den Ordnungen l und l', die bezüglich λ und λ' mal die Gebilde F_2^4 und Φ_2^4 enthalten, in der Transformation T einander entsprechen, so bestehen zwischen den Zahlen $l, l' - \lambda, \lambda'$ die Gleichungen*:

$$l' = 2l - 3\lambda \qquad l = 2l' - 3\lambda'$$
$$\lambda' = l - 2\lambda \qquad \lambda = l' - 2\lambda'$$

oder aufgelöst:

$$\lambda = \frac{2l - l'}{3} \qquad l = 2\lambda + \lambda'$$
$$\lambda' = \frac{2l' - l}{3} \qquad l' = 2\lambda' + \lambda.$$

Die Zahlen λ *und* λ' bezeichnet man (im engeren Sinne) als „*Charakteristiken*“ des durch beide Mannichfaltigkeiten zusammen dargestellten Kegelschnittsystems.

Wir fügen an dieser Stelle noch die analogen Gleichungen an, welche sich auf in der Transformation T einander entsprechende *einfach ausgedehnte* Mannichfaltigkeiten der Systeme S und Σ beziehen.

Wir bezeichnen mit q die Ordnung einer Curve des Systems S, mit δ die Zahl der Punkte, in welchen sie die Fläche F_2^4 trifft; und mit denselben Buchstaben, aber gestrichelt, die dualistischen Charaktere, welche der jener Curve im System Σ entsprechenden Mannichfaltigkeit zugehören.

Dann erhält man unmittelbar, wenn man bedenkt, dass einer linearen Punktmannichfaltigkeit von S in Σ eine Φ_2^4 enthaltende quadratische R_4^1-Mannichfaltigkeit (zufolge der Gleichung (3) § 4) zugeordnet ist, und umgekehrt, und dass die Zahl der beweglichen Schnittelemente mit den in T einander entsprechenden einfach ausgedehnten Mannichfaltigkeiten beiderseits gleich sein muss, die Relationen

$$2q - \delta = q'$$
$$q \quad = 2q' - \delta'.$$

Die Zahlen q und q' nennen wir wiederum, wie gebräuchlich, „*Charakteristiken*" der durch beide Mannichfaltigkeiten zusammen vorgestellten einfach ausgedehnten Kegelschnittschaar.

Es ist q die Zahl der Kegelschnitte derselben, welche als Curven 2. Classe aufgefasst, auf einer gegebenen Curve 2. O. ruhen, oder eine gegebene Gerade berühren; q' die Zahl der Curven 2. O. der Schaar, welche eine gegebene Curve 2. Cl. stützen, oder durch einen gegebenen Punkt gehen.

Beiläufig ergiebt sich, dass jede auf L^3 verlaufende Curve die Fläche F_2^4 in einer geraden Zahl von Punkten treffen muss, da im anderen Falle Φ_2^4 eine R_4^1-Schaar ungerader Ordnung tragen könnte, was unmöglich ist.

7.

Das Unbestimmt-Werden der Transformation T für Punkte vierfach ausgedehnter Mannichfaltigkeiten.

Wir gehen nun dazu über, zu untersuchen, wie die Umgebung eines Punktes P einer vierfach ausgedehnten Mannichfaltigkeit M_4 durch die Transformation T aufgelöst wird, wenn derselbe in der Fläche $F_2'^4$ liegt.

Bezeichnen wir die transformirte Mannichfaltigkeit durch M_4', so werden wir sagen können, dass dem Punkte P von M_4 Elemente von M_4' entsprechen, welche der Tangentialebene Π von F_2^4 im Punkte P angehören; nicht aber wird auch umgekehrt jedem R_4^1 von Π als einem Element von M_4' in der Transformation T der Punkt P zugeordnet sein; nämlich im Allgemeinen solchen Räumen nicht, welche zugleich der Mannichfaltigkeit Φ_2^4 angehören (§ 5).

Wir wollen nun zwischen den Π angehörigen Elementen von M_4', welche durch Auflösung des Punktes P entstehen, und denen, bei welchen dieses nicht der Fall ist, eine Unterscheidung treffen, und denjenigen Theil von M_4', welcher durch die Transformation T aus der Umgebung des Punktes P von M_4 entstanden ist, durch Einschliessung in eckige Klammer kenntlich machen, also durch das Zeichen $[M_4']$ darstellen.

Dann gibt über das Verhalten eines beliebigen Raumes R_4^1 von Π als eines Elementes von $[M_4']$ der folgende Satz Auskunft:

I. *Zerfällt der Tangentialkegel einer Mannichfaltigkeit M_4, welche λ mal die Fläche F_2^4 enthält, in einem Punkte P dieser Fläche in zwei Theile (ε_1) und (ε_2) von den Ordnungen ε_1 und ε_2, von welchen der erste (ε_1) von ∞^1 Räumen R_3^1 beschrieben werden kann, die durch die Tangentialebene Π von F_2^4 im Punkte P gehen, während dies bei dem zweiten nicht der Fall ist; wo hingegen der Kegel (ε_2) η einzelne Räume R_3^1 trägt, welche durch Π gehen* (jeden mit der gehörigen Multiplicität gerech-

net) — *so ist der ganze* R_4^1*-Bündel* Π *in der transformirten Mannichfaltigkeit* $[M_4']$ $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \lambda$ *mal enthalten; er wird von* $[M_4']$ *„ausserdem" in einer einfach ausgedehnten Schaar von der Gesammtordnung* ε_1 *„geschnitten",*) welche der den Kegel* (ε_1) *erfüllenden* R_3^1*-Schaar in dem* (§ 5 betrachteten) *Polarsystem der zu* Π *gehörigen* R_4^1*-Schaar* $\varkappa^2$ *von* Φ_2^4 *entspricht, und trägt* η *einzelne „Knotenelemente"**) von* $[M_4']$, *welche jenen* η *einzelnen Räumen in demselben Polarsystem zugeordnet sind.*

Der Beweis des *ersten Theiles* unseres Satzes ergibt sich unmittelbar, wenn wir durch einen festen Raum A der Ebene Π, der weder Φ_2^4 angehört, noch gegenüber $[M_4']$ eine ausgezeichnete Lage hat, einen R_4^1-Büschel legen. Die Zahl der beweglichen gemeinsamen Elemente dieses Büschels und der Mannichfaltigkeit M_4' gibt dann, von der Ordnung l' von M_4' abgezogen, die Multiplicität von A als eines Elementes von M_4', oder, was in diesem Falle dasselbe ist, von $[M_4']$.

Diese Zahl muss aber gleich sein der Zahl der beweglichen, im Allgemeinen nicht auf F_2^4 gelegenen Schnittpunkte, in welchen ein durch P und zwei nicht ausgezeichnete andere Punkte von F_2^4 gehender Kegelschnitt die Mannichfaltigkeit M_4 trifft; also, wenn l die Ordnung von M_4 ist, gleich

$$2l - 2\lambda - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = l' - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \lambda).$$

Um den *zweiten Theil* des obigen Satzes zu beweisen, betrachten wir alle Räume A eines R_4^1-Büschels a, dessen sämmtliche Räume durch Π gehen, verbinden dieselben mit einem nicht durch Π gehenden $R_4^1 : B$ durch Büschel AB, und suchen zu bestimmen, wie oft ausser den $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \lambda)$ Schnitträumen mit M_4', welche für jede Lage des Büschels AB in den Raum A hineinfallen, *unabhängig von der Lage von* B weitere Coincidenzelemente von M_4' mit diesem Büschel in feste Räume A fallen. Wir haben behauptet, dass die Gesammtzahl der im Büschel a enthaltenen Räume dieser Art ε_1 ist, wenn man jeden so oft in Anschlag bringt, als seine Multiplicität als Element von $[M_4']$ die Zahl $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \lambda)$ um eine Einheit übertrifft.

---

*) So wollen wir abkürzend sagen, wenn ein R_4^1, der einen Büschel der Ebene Π durchläuft, als Element von $[M_4']$ eine Gesammt-Multiplicitätserhöhung im Betrage ε_1 erfährt. Bei der Bestimmung dieser Zahl ist zu beachten, dass consecutive Räume unter Umständen verschiedene Multiplicitätserhöhungen erfahren können.

**) Dies soll heissen, dass die Gesammt-Multiplicitätserhöhung, welche einzelne Räume eines einzelnen R_4^1-Büschels von Π erfahren, wenn man dieses Büschel um einen festen R_4^1 sich drehen lässt, η beträgt. Ich habe beide Erläuterungen unter den Text gestellt, um in den Wortlaut des Satzes nicht allzuviele Erklärungen aufnehmen zu müssen.

Jedem der Büschel AB des Systems Σ entspricht nun in S ein Kegelschnitt, der durch P und zwei weitere Punkte von F_2^4 geht. Derselbe zerfällt in eine Sehne von F_2^4, welche P mit einem anderen Punkte dieser Fläche verbindet, und eine zweite Gerade, welche einen im Allgemeinen von P verschiedenen Punkt jener Sehne mit einem dritten Punkte von F_2^4 verbindet, sobald der Raum A in die zu Φ_2^4 gehörige R_4^1-Schaar $\varkappa^2$ von Π fällt.

Suchen wir zuerst die Schnittpunkte zu bestimmen, welche diese letztere Sehne absorbirt.

Den Räumen von $\varkappa^2$ entsprechen in dem System S alle Punkte des Kegels dritter Ordnung R_3^3, welcher F_2^4 aus dem Punkte P projicirt. Nehmen wir nun an, dass dieser Kegel δ mal auf M_4 enthalten ist, so folgt, dass in der transformirten Mannichfaltigkeit M_4 eine Multiplicitätserhöhung der Räume von $\varkappa^2$ gegenüber den übrigen Räumen von Π stattfindet, deren Betrag gleich

$$(\lambda' + \delta) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \lambda)$$

ist, wo λ' angibt, wie oft M_4' durch Φ_2^4 geht. Denn die Zahl der beweglichen, im Allgemeinen weder auf jenem Kegel noch auf F_2^4 gelegenen Schnittpunkte der Geraden, welche dem Büschel BA in dem Falle eigentlich entspricht, wo A zu $\varkappa^2$ gehört — die Zahl der Schnittpunkte dieser Geraden mit M_4 ist $l - \lambda - \delta$, eine Zahl, die nur dann eine Erniedrigung erfährt, wenn eine durch P gehende Ebene erster Art öfter als δ mal auf M_4 enthalten ist. Dieser Ausdruck, von l' abgezogen, gibt aber die Multiplicität von $\varkappa^2$, d. h. eines nicht weiter ausgezeichneten Raumes von $\varkappa^2$ als eines Elementes von M_4' gleich

$$l - 2\lambda + \delta = \lambda' + \delta.$$

Die hiermit ausgeführte Bestimmung der Multiplicität von $\varkappa^2$ in M_4' kommt jedoch für unseren nächsten Zweck nicht in Betracht; wir haben in dem Doppelten dieser Zahl gerade die für Räume A des Büschels a eintretende Multiplicitätserhöhung bestimmt, welche von *den* Theilen der Mannichfaltigkeit M_4' herrührt, die in der Transformation T *nicht* der Umgebung des Punktes P entsprechen, also — wiewohl sie mit $[M_4']$ zusammenhängen werden — nicht zu $[M_4']$ gehören.

Dagegen werden die ausserdem stattfindenden Multiplicitätserhöhungen, gleichgiltig, ob sie für Elemente von $\varkappa^2$ eintreten (oder vielmehr solchen unendlich benachbart sind), oder nicht, zu $[M_4']$ zu rechnen sein, da dieselben nur daher rühren können, dass Schnittpunkte der durch P gehenden Kegelschnitte mit M_4 von dem Punkte P selbst absorbirt werden.

Durchläuft nun der Raum A den Büschel a, so durchläuft die Tangente des dem Büschel $[BA]$ des Systems Σ im Systeme S ent-

sprechenden Kegelschnittes im Punkte P einen ebenen Strahlenbüschel; es gibt also unter diesen Kegelschnitten im Ganzen $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ Curven, welche M_4 im Punkte P berühren. Aendern wir nun die Lage von B, so wird sich diese Kegelschnittschaar so ändern, dass die in P gezogenen Tangenten je zweier Curven derselben, die zu dem nämlichen Raum A gehören, mit Π durch einen und denselben Raum R_3^1 verbunden werden können (§ 5). Hierbei werden aber von den $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ Räumen A, welche bei der ersten Lage von B Berührungskegelschnitten entsprachen, nur diejenigen immer wieder Berührungskegelschnitten zugeordnet sein, welche im ersten Falle zu *solchen* Kegelschnitten gehörten, deren Tangenten ein durch Π gehender R_3^1 enthält, welcher ganz auf dem Tangentenkegel von M_4 im Punkte P liegt. Für diese Räume A allein ist die Zahl der Schnittelemente eines Büschels BA mit M_4', welche in A fallen, immer grösser als $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \lambda)$, wie man auch B wählen möge, und sie allein sind daher Räume höherer Multiplicität. Ihre Gesammtzahl wird zufolge unserer Voraussetzung für allgemeine Lage des Büschels a gleich ε_1. Ebenso aber ergibt sich der *dritte Theil* unserer Behauptung. —

Der hiermit bewiesene Satz I setzt nur die Charakteristik λ als bekannt voraus; sein Inhalt ist von dem Werthe der zweiten Charakteristik λ', oder der Ordnung l der zu transformirenden Mannichfaltigkeit M_4 unabhängig, wie auch von vorne herein zu erwarten war, da es sich nur um eine Transformation der in der Umgebung *eines* Punktes P von M_4 gelegenen Punkte handelt.

Eine solche Unabhängigkeit findet nicht mehr statt, wenn es darauf ankommt, die Gesammtmultiplicität der Räume von Π als Elemente der ganzen Mannichfaltigkeit M_4' zu bestimmen, indem jetzt der Schaar $\varkappa^2$ angehörige Räume hinzutreten, welche die Transformation T in von P verschiedene Punkte überführt.

Heben wir aus den Daten der vorstehenden Entwickelung das hierauf bezügliche heraus, so können wir den folgenden Satz aufstellen, der eine Ergänzung des Satzes I enthält:

II. Sind bei einer Mannichfaltigkeit M_4 mit den Charakteristiken λ und λ' die Voraussetzungen des Satzes I erfüllt; ist ferner der die Fläche F_2^4 aus P projicierende Kegel δ mal auf M_4 enthalten, und erfahren einzelne Ebenen dieses Kegels eine Multiplicitätserhöhung als Elemente von M_4, im Gesammtbetrag ξ — so ist die quadratische Mannichfaltigkeit $\varkappa^2$ von Φ_2^4, welche der Ebene erster Art Π von Λ^3 angehört, $\lambda' + \delta$ mal auf M_4' enthalten; und es finden, ausser der hierdurch etwa bedingten Multiplicitätserhöhung aller Elemente von $\varkappa^2$ gegenüber den übrigen, $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \lambda)$ mal auf M_4' enthaltenen Räumen von Π noch für ξ einzelne Elemente von $\varkappa^2$ Multiplicitätserhöhungen statt, welche jenen ξ Ebenen erster Art von L^3 entsprechen.

8.

Der Chasles'sche Satz.

Wie in § 2 bewiesen, kann eine zwei verschiedenen Systemen von Curven 2. Classe gemeinsame Curve $u_\alpha^2 = 0$ denselben nur dann scheinbar zugleich angehören, wenn ihre Covariante $(\alpha\beta x)^2$ identisch verschwindet. Ist dies der Fall, so hängt die Entscheidung, ob sie beiden Systemen wirklich, oder scheinbar zugleich angehöre, von der Bestimmung der Grenzwerthe dieser Covariante ab. Für unsere Parameterdarstellung hat dies die Bedeutung, dass nur ein auf F_2^4 gelegener Punkt, oder ein zu Φ_2^4 gehöriger Raum R_4^1 einen Kegelschnitt darstellen kann, welcher zwei Systemen scheinbar zugleich angehört; und dass weiter ein Punkt von F_2^4 eine beiden Systemen wirklich gemeinsame Curve repräsentirt, so oft ihm als einem Schnittpunkt der jene Systeme in S darstellenden Mannichfaltigkeiten auch ein gemeinsames Element der transformirten Mannichfaltigkeiten in Σ entspricht.

Zu entscheiden, wann dies eintritt, hat aber nach dem Vorausgeschickten hinsichtlich der Zusammenstellung einer einfach ausgedehnten Mannichfaltigkeit M_1 und einer vierfach ausgedehnten M_4 keine Schwierigkeit mehr.

Nehmen wir zuvörderst an, die δ Schnittpunkte der Curve q^{ter} Ordnung M_1 und der Fläche F_2^4 seien alle getrennt. Dann geht aus Satz *I.* des vorigen § unmittelbar hervor, *dass von der Zahl der Schnittpunkte von M_1 mit der Mannichfaltigkeit l^{ter} Ordnung M_4, welche von einem beliebigen dieser Punkte P absorbirt werden, durch die Transformation T immer λ verloren gehen, wenn M_4 die Fläche F_2^4 λ mal enthält.*

Denn möge zunächst die Curve M_1 einfach durch P hindurchgehen, ohne mit M_4 dort eine Berührung zu haben, so dass nur $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ Schnittpunkte von M_1 und M_4 in P fallen. Dann entspricht derselben in dem Systeme Σ eine R_4^1-Mannichfaltigkeit, welche einen in Bezug auf $[M_4']$ nicht ausgezeichneten Raum von Π einfach enthält, dort aber nicht $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, sondern nur $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \lambda$ Elemente mit M_4' gemein hat. Ebenso viele Schnittpunkte verschwinden aber, wenn M_1 und M_4 einander in P in irgend einem Grade berühren; denn dies hat nur zur Folge, dass ebenso viele Schnitträume von M_1' und M_4', die zuvor nicht auf Π lagen, nun auf Π zu liegen kommen, als die Zahl der in P vereinigten Schnittpunkte von M_1 und M_4 die Zahl $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ übersteigt, theils in Folge dessen, dass nun M_1' durch Räume höherer Multiplicität von M_4' geht, theils deshalb, weil nun Berührungen von M_1 und M_4' dort stattfinden: in allen Fällen sind λ gemeinsame Elemente verschwunden.

Daran wird aber auch nichts geändert, wenn die δ vereinzelten Schnittpunkte von M_1 und F_2^4 zum Theil consecutiv werden, oder in mehrfache Punkte von M_1 zusammenrücken; so dass man unter allen Umständen nur $lq - \lambda\delta$, oder wenn man nach § 6 die Charakteristiken λ' und q' einführt, $lq' + \lambda' q$ Schnittpunkte erhält, welchen in der Transformation T gemeinsame Elemente von M_1' und M_4' entsprechen; ein Resultat, das in der symmetrischen Form des Ausdrucks $\lambda q' + \lambda' q$ eine Bestätigung findet, da man natürlich von M_1' und M_4' ausgehend zu dem nämlichen Ergebniss gelangen muss.

Hiermit ist der Satz von Chasles bewiesen, und wir haben, um denselben in rein ternär-geometrischer Form aussprechen zu können, nur noch die entsprechende Bedeutung der Charakteristiken λ und λ' des vierfach ausgedehnten Kegelschnittsystems zu ermitteln.

Man erhält dieselbe unmittelbar, wenn man im Satze I des vorigen §. $\varepsilon_1 = \lambda$ und $\varepsilon_2 = 0$ setzt, was offenbar der Fall ist, der für die Punkte von F_2^4 im Allgemeinen eintritt: es wird λ gleich der Zahl der Kegelschnitte des vierfach ausgedehnten Systems, welche in einer Involution von Strahlenpaaren, als einer Kegelschnittschaar mit den Charakteristiken $q = 0$, $q' = 1$ enthalten sind; wobei natürlich vorausgesetzt wird, dass diese Involution keine ausgezeichnete Lage gegen das gegebene Kegelschnittsystem besitzt.*)

Dem Chasles'schen Satze lässt sich hiernach der folgende Ausdruck geben:

„Wenn von den Kegelschnitten eines einfach ausgedehnten Systems q eine gegebene Gerade berühren, und q' durch einen gegebenen Punkt gehen; und wenn von den Curven eines vierfach ausgedehnten Kegelschnittsystems λ in einer gegebenen Involution von Strahlenpaaren, und λ' in einer gegebenen Involution von Punktepaaren liegen — dann gibt es

$$\lambda q' + \lambda' q$$

beiden Systemen gemeinsame Kegelschnitte, oder, im besonderen Falle, deren unendlich viele.“

9.

Der erweiterte Chasles'sche Satz und die Halphen'sche Symbolik.

Hat man nicht ein vierfach ausgedehntes Kegelschnittsystem mit einer einfach ausgedehnten Kegelschnittreihe, sondern fünf vierfach ausgedehnte Systeme zum Durchschnitt zu bringen, so braucht man

*) Bei der wirklichen Bestimmung der Zahl λ auf diesem Wege ist natürlich zu beachten, dass unter den Doppellinien des vierfach ausgedehnten Systems, welche etwa in eine Doppellinie der Involution fallen, diejenigen und nur diejenigen mitzuzählen sind, welche sich auch aus den Strahlenpaaren der Involution durch Grenzübergang ergeben.

nun nicht mehr neue Grenzbetrachtungen anzustellen, da es durch einen einfachen, schon von Chasles (C. R. t. 58 p. 297) angewandten, in unserem Zusammenhange zulässigen Schluss gelingt, diesen Fall auf den eben behandelten zurückzuführen.

Wir bedienen uns, indem wir die Chasles'sche Betrachtung an dieser Stelle reproduciren, einer zuerst in ähnlichem Sinne von Herrn Halphen (Comptes Rendus t. 76 p. 1074 oder Bulletin de la Société Mathém. de France t. 1. Année 1872—73 p. 236) gebrauchten Schreibart, derselben, die Herr Schubert seinem *„Kalkül der abzählenden Geometrie"* zu Grunde gelegt hat, und bezeichnen demnach die Zahl der Curven, in welchen sich mehrere in den Dimensionen geeignet gewählte Kegelschnittsysteme schneiden, durch das *Product* der Symbole, die wir für diese Systeme gebrauchen; wir bezeichnen also, wenn L_1, L_2, .. L_5 fünf beliebige einfach ausgedehnte Kegelschnitte sind, durch das Produkt $L_1 L_2 \,..\, L_5$ die Zahl der ihnen wirklich gemeinsam angehörenden Kegelschnitte; insbesondere, wenn μ und ν vierfach ausgedehnte Systeme sind, welche in Σ, bezüglich in S durch lineare Mannichfaltigkeiten repräsentirt werden, durch μ^5 die Zahl der Curven, in welchen sich fünf verschiedene Systeme von der Art μ durchdringen u. s. w.

Die fünf Systemen μ oder ν gemeinsamen Curven kann man sofort angeben. Ihre Anzahlen sind die folgenden:

I.

$$\mu^5 = 1, \quad \mu^4\nu = 2; \quad \mu^3\nu^2 = 4; \quad \mu^2\nu^3 = 4; \quad \mu\nu^4 = 2; \quad \nu^5 = 1.$$

Aus diesen Zahlen kann man aber leicht mit Hilfe des Chaslesschen Satzes die Zahl der Curven finden, in welchen sich ein beliebig gegebenes vierfach ausgedehntes Kegelschnittsystem L und vier Systeme μ, ν durchdringen; man hat nur zu berücksichtigen, dass die Charakteristiken q, q' eines einfach ausgedehnten Systemes Q als die Zahlen

$$q = Q\nu \qquad q' = Q\mu$$

definirt sind. Setzt man hier für Q der Reihe nach: μ^4, $\mu^3\nu$, $\mu^2\nu^2$, $\mu\nu^3$, ν^4, so erhält man die Tabelle:

II.

$$\begin{aligned} L\mu^4 &= \lambda + 2\lambda' \\ L\mu^3\nu &= 2\lambda + 4\lambda' \\ L\mu^3\nu^2 &= 4\lambda + 4\lambda' \\ L\mu\nu^3 &= 4\lambda + 2\lambda' \\ L\nu^4 &= 2\lambda + \lambda', \end{aligned}$$

woraus die ebenfalls schon von Chasles angegebenen Relationen:

$$L(2\mu^4 - \mu^3\nu) = 0 \qquad L(2\nu^4 - \mu\nu^3) = 0$$
$$L(4\mu^4 + 4\nu^4 - 3\mu^2\nu^2) = 0\,.$$

Aus diesen Ausdrücken erhält man durch Wiederholung des obigen Schlusses die Charakteristiken der einfach ausgedehnten Systeme $L\mu^3$, $L\mu^2\nu$ ..., und durch erneute Anwendung des Chasles'schen Satzes die Tabelle

III.

$$\begin{aligned}
L_1 L_2 \mu^3 &= \lambda_1\lambda_2 + 2(\lambda_1\lambda_2' + \lambda_1'\lambda_2) + 4\lambda_1'\lambda_2' \\
L_1 L_2 \mu^2\nu &= 2\lambda_1\lambda_2 + 4(\lambda_1\lambda_2' + \lambda_1'\lambda_2) + 4\lambda_1'\lambda_2' \\
L_1 L_2 \mu\nu^2 &= 4\lambda_1\lambda_2 + 4(\lambda_1\lambda_2' + \lambda_1'\lambda_2) + 2\lambda_1'\lambda_2' \\
L_1 L_2 \nu^3 &= 4\lambda_1\lambda_2 + 2(\lambda_1\lambda_2' + \lambda_1'\lambda_2) + \lambda_1'\lambda_2',
\end{aligned}$$

woraus die bekannte Identität

$$L_1 L_2 (2\mu^3 - 3\mu^2\nu + 3\mu\nu^2 - 2\nu^3) = 0$$

folgt. So fortfahrend erhält man ferner die Tafeln

IV.

$$\begin{aligned}
L_1 L_2 L_3 \mu^2 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 2\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3' + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2'\lambda_3' + 4\lambda_1'\lambda_2'\lambda_3' \\
L_1 L_2 L_3 \mu\nu &= 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3' + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2'\lambda_3' + 2\lambda_1'\lambda_2'\lambda_3' \\
L_1 L_2 L_3 \nu^2 &= 4\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3' + 2\,\Sigma\lambda_1\lambda_2'\lambda_3' + \lambda_1'\lambda_2'\lambda_3'
\end{aligned}$$

V.

$$\begin{aligned}
L_1 L_2 L_3 L_4 \mu &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + 2\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4' + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3'\lambda_4' \\
&\quad + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2'\lambda_3'\lambda_4' + 2\lambda_1'\lambda_2\lambda_3'\lambda_4' \\
L_1 L_2 L_3 L_4 \nu &= 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4' + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3'\lambda_4' \\
&\quad + 2\,\Sigma\lambda_1\lambda_2'\lambda_3'\lambda_4' + \lambda_1'\lambda_2'\lambda_3'\lambda_4'
\end{aligned}$$

VI.

$$\begin{aligned}
L_1 L_2 L_3 L_4 L_5 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 + 2\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5' + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4'\lambda_5' \\
&\quad + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3'\lambda_4'\lambda_5' + 2\,\Sigma\lambda_1\lambda_2'\lambda_3'\lambda_4'\lambda_5' + \lambda_1'\lambda_2'\lambda_3'\lambda_4'\lambda_5'
\end{aligned}$$

Die Schlussformel, die alle früheren einschliesst, ist der gesuchte Ausdruck, welcher die Zahl der fünf beliebigen Kegelschnittsystemen gemeinsamen Curven angiebt. Er liefert z. B. die Zahl der Kegelschnitte einer Ebene, welche irgend fünf gegebene Curven berühren, wenn man λ_i die Classe, λ_i' die Ordnung der i^{ten} Curve bedeuten lässt — wie sich sofort aus der im vorigen § angegebenen Bestimmungsart der Charakteristiken λ und λ' ergiebt.

Dem letzten Ausdruck hat Herr Halphen eine bemerkenswerthe symbolische Form gegeben, deren Nothwendigkeit wir nunmehr von vornherein einsehen können. *Man kann nämlich, nachdem diese Formel einmal auf algebraischem Wege abgeleitet ist, die Bemerkung machen, dass dieselbe, da sie nur von den Charakteristiken der einzelnen Systeme abhängt, dem Princip der „Erhaltung der Anzahl" unterworfen ist, d. h. dass sie denselben Werth, wie zuvor an-*

gibt, wenn man an Stelle der gegebenen Systeme beliebige andere einführt, sobald diese nur die nämlichen Charakteristiken haben.

Wählt man insbesondere reducibele Systeme, so dass das gegebene System L_i durch die Systeme L_i', L_i'' . . . . zusammengenommen vertreten wird, so erhält man nach dem Vorstehenden die Zahl der den Systemen $L_1 \ldots L_5$ gemeinsamen Curven, wenn man in Bezug auf jedes der Systeme L_i, L_k, . . auf alle möglichen Arten je eines der dieselben vertretenden Theilsysteme $L_i^{(m)}$, $L_k^{(n)}$ . . . herausgreift, die Zahl der diesen Gruppen gemeinsam angehörigen Curven bestimmt, und von allen diesen Zahlen die Summe bildet. Dies wird aber nur anders ausgedrückt, wenn man sagt: „Man bilde für jedes System die „symbolische" Summe

$$L_i' + L_i'' + L_i''' + \ldots\ldots,$$

multiplicire alle so entstandenen Summen mit einander, und ersetze nachher die Producte $L_1^{(m)}\ L_2^{(m')}\ .\ .\ L_5^{(n)}$ durch die Zahl der Curven, welche die Systeme $L_1^{(m)}$, $L_2^{(m')}\ .\ .\ L_5^{(n)}$ mit einander gemein haben."

Die einfachste Art, wie man ein System L durch elementare Systeme mit denselben Charakteristiken λ und λ' ersetzen kann, ist nun offenbar die, dass man λ Systeme μ und λ' Systeme ν benutzt. Wir setzen also, mit Rücksicht auf Fragestellungen der vorliegenden Art:

$$L = \lambda\mu + \lambda'\nu$$

ein Ausdruck, den wir mit Herrn Halphen als den „*Modul*" des Systems L bezeichnen.

Führt man diesen Ausdruck ein, so erhält man statt der Formel VI die folgende:

$$L_1 L_2 L_3 L_4 L_5 = \prod_1^5 (\lambda_i\mu + \lambda_i'\nu) \quad .$$

eine Formel, die, wenn man sie ausrechnet, d. h. wenn man die Producte der μ und ν durch die in Tafel I. angegebenen Zahlen ersetzt, wieder in den Ausdruck VI übergeht.

Ebenso kann man aber auch jedes einfach ausgedehnte System durch einen „Modul" ersetzen, d. h. durch ein einfachstes zerfallendes System, welches dieselben Charakteristiken hat: man kann unmittelbar

$$Q = q\,.\,\sigma + q'\,.\,\tau$$

schreiben, wo σ eine Involution von Punktepaaren einer Geraden, τ eine Involution von Strahlenpaaren eines Punktes ist, und erhält dann den Satz von Chasles ausgedrückt durch die Formel:

$$LQ = (\lambda\mu + \lambda'\nu)(q\sigma + q'\tau)$$

wo bei der Ausrechnung

$$\mu\sigma = 0 \qquad \nu\tau = 0 \qquad \mu\tau = 1 \qquad \nu\sigma = 1$$

zu setzen ist.

10.

Die Beweglichkeit der Lösungen. Beispiel.

Die Fälle, in welchen die Beweglichkeit der Lösungen des Charakteristikenproblems eine Reduction erfahren kann, lassen sich mit Hilfe der oben eingeführten Parameterdarstellung leicht übersehen.

Beschränken wir uns auf den wichtigsten Fall, wo im Systeme S eine Curve M_1 mit einer vierfach ausgedehnten Mannichfaltigkeit M_4 zum Durchschnitt zu bringen ist.

Dann ist ohne Weiteres einleuchtend, dass ein der Fläche F_2^4 nicht benachbarter Punkt von M_1, welcher auf M_4 liegt, eine bewegliche Lösung des Charakteristikenproblems darstellen muss, da man jeden Punkt des senären Gebietes der nicht auf L^3 liegt, und jeden Punkt von L^3, der nicht zu F_2^4 benachbart ist, noch auf unendlich viele Arten durch eine der Collineationen, die L^3 in sich transformiren, in jeden anderen Punkt gleicher Art überführen kann. Ebenso kann auch jeder Schnittpunkt, welcher einem Punkte P von F_2^4 benachbart ist, aber weder auf F_2^4 noch auf L^3 liegt, durch eine lineare Transformation beseitigt werden, da nicht alle Fortschreitungsrichtungen, die von Punkten von F_2^4 ausgehen, zu M_4 gehören können; desgleichen lassen sich alle wirklichen Lösungen entfernen, die durch Punkte von F_2^4 absorbirt werden, welche als Elemente von M_4 eine die Zahl λ übersteigende Multiplicität besitzen. Derselbe Schluss kann ferner gemacht werden, wenn die Curve M_1 in einem Punkte P von F_2^4 den Raum L^3 berührt, d. h. wenn sie, die etwa in P $\varkappa$ Punkte mit F_2^4 gemein hat, L^3 dort in mehr als $2\varkappa$ Punkten trifft, M_4 aber den Raum L^3 nicht zugleich längs der ganzen Fläche F_2^4 berührt.

Tritt aber dieser letztere Umstand ein, enthält also der Taugentialkegel von M_4 in einem beliebigen Punkte von F_2^4 den Tangentialkegel von L^3 immer als Theil, und berührt gleichzeitig die Curve M_1 den Raum L^3 in einem Punkte von F_2^4, so ist wenigstens einer der daher rührenden Schnittpunkte von M_1 und M_4 auf keine Weise durch lineare Transformation zu entfernen, da natürlich bei jeder Transformation der Gruppe, welche L^3 in sich überführt, die Tangentialkegel von L^3 in den Punkten von F_2^4 in einander übergehen.

In diesem Falle, und in diesem allein, wird also eine Verringerung der Beweglichkeit der Lösungen eintreten.

Einer Geraden des Systems S, welche L^3 in einem Punkte von F_2^4 berührt, entspricht aber im System Σ ein R_4^1-Büschel, welcher mit Λ^3 in einem Raume von Φ_2^4 einen Contact hat*), und beiden zu-

*) Allgemeiner entspricht einem Curvenzweig, welcher in einem Punkte P mit F_2^4 $\varkappa$ Punkte, und mit L^3 ausser den hierdurch absorbirten $2\varkappa$ Schnittpunkten noch $\varkappa'$ weitere gemein hat, im System Σ eine R_4^1-Schaar, welche mit Φ_2^4

sammen entspricht im ternären Gebiet ein Büschel, oder, was in diesem Falle dasselbe ist, eine Schaar von einander vierpunktig berührenden Kegelschnitten, welche die dritte Kegelschnittausartung enthält, die als Curve 2. Ordnung aufgefasst aus einer doppelt zählenden Geraden, und als Curve 2. Classe aus einem doppelt zählenden, auf jener Geraden enthaltenen Punkt besteht. Wir können daher das letzte Resultat geometrisch so ausdrücken:

„Die Lösungen des Charakteristikenproblems sind dann und nur dann alle beweglich, wenn entweder das einfach ausgedehnte System keinen, oder das vierfach ausgedehnte System nicht jeden der ∞^3 ausgearteten Kegelschnitte der dritten Art enthält.“

In den anderen Fällen treten in dem einfach ausgedehnten System unbewegliche Lösungen auf, deren Zahl in jedem einzelnen Falle durch eine besondere Untersuchung bestimmt werden muss, die z. B. so ausgeführt werden kann, wie es Herr Halphen angegeben hat.

Es hat dieses Auftreten unbeweglicher Curven für die wirkliche Auffindung der Lösungen des Charakteristikenproblems dieselben Erleichterungen im Gefolge, welche überhaupt in der Algebra durch den Umstand herbeigeführt werden, dass man von einer aufzulösenden Gleichung von vorne herein weiss, dass dieselbe mit einer anderen Gleichung eine gewisse Anzahl gemeinschaftlicher Wurzeln besitzt. —

Wir wollen nun zum Schluss die bisher in abstracto behandelten Verhältnisse an einem *Beispiele* näher ausführen, und die Gleichungen wirklich aufstellen, von deren Auflösung die Auffindung der einigen einfach gebauten Kegelschnittsystemen wirklich gemeinsamen Curven abhängt.

Als vierfach ausgedehntes Kegelschnittsystem nehmen wir dasjenige, dessen Curven mit zwei fest gegebenen Punkten (oder allgemeiner: Curven 2. Classe) x und y eine absolute Invariante haben, welche zu der absoluten Invariante desselben Kegelschnittes mit zwei gegeben vorliegenden Geraden u und v (die man auch durch Curven 2. Ordnung ersetzen kann) in einem constanten Verhältnisse steht; wir betrachten also, wenn $a_x^2 = 0$ die Punktgleichung, $u_a^2 = 0$ die Liniengleichung eines und desselben Kegelschnittes ist, so dass

$$a_a a_x u_a - \frac{1}{3} u_x \cdot a_a^2 \equiv 0,$$

das Kegelschnittsystem, dessen Gleichung:

$$\frac{(a_x a_y)^2}{a_x^2 . a_y^2} = c \frac{(u_a v_a)^2}{u_a^2 . v_a^2}$$

$\varkappa'$ Räume, und mit Λ^3 $\varkappa$ diesen consecutive Räume gemein hat. Die Zahlen $\varkappa'$ und $\varkappa$ decken sich mit den Begriffen der „Ordnung“ und „Classe“ des ausgearteten Kegelschnittes bei Halphen.

oder, nach Beseitigung des Nenners:

$$(1) \qquad (a_x a_y)^2 \cdot u_a^2 \cdot v_a^2 - c \cdot a_x^2 \cdot a_y^2 \cdot (u_a v_a)^2 = 0$$

ist, also ein Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken $\lambda = \lambda' = 2$.

Dasselbe gehört im Allgemeinen nicht zu denjenigen, welche jeden ausgearteten Kegelschnitt der dritten Art enthalten, denn die Gleichung (1) wird im Allgemeinen nicht identisch erfüllt, wenn man darin

$$a_x^2 = (\xi \eta x)^2 \qquad u_a^2 = u_\xi^2$$

setzt. Dies tritt aber ein, sobald $c = 1$, und wir haben daher in der Gleichung

$$(2) \qquad (a_x a_y)^2 \cdot u_a^2 v_a^2 - a_x^2 \cdot a_y^2 \cdot (u_a v_a)^2 = 0,$$

welche den besonderen Fall vorstellt, wo die absoluten Invarianten geradezu gleich sind, ein Beispiel eines jener ausgezeichneten Kegelschnittsysteme, und zwar offenbar das einfachste von allen, da λ und λ' für diese Systeme wenigstens den Werth 2 haben muss.*)

Diese Systeme nun wollen wir mit einem Kegelschnittbüschel und einigen ausgezeichneten Ausartungen desselben zum Durchschnitt bringen.

Ein Kegelschnittbüschel wird dargestellt durch eine Gleichung von der Form:

$$(3) \qquad \alpha_t a_x^2 = 0$$

wo t ein binärer Parameter ist, und, nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise, erst Symbole α mit Symbolen a multiplicirt reelle Bedeutung erlangen. Die cubische Gleichung, von welcher die Linienpaare des Büschels abhängen, ist

$$A_t^3 = \alpha_t \alpha_t' \alpha_t'' (a a' a'')^2 = 0$$

und hat die Discriminante $R = (\Delta\Delta')^2$, wenn wir mit Δ_t^2 die Hesse'sche Covariante $(AA')^2 A_t A_t'$ von A_t^3 bezeichnen.

R ist im allgemeinen Falle von Null verschieden, und von der Liniengleichung des Kegelschnittes (3): $\alpha_t \alpha_t' (a a' u)^2$ sondert sich kein binär-linearer Factor ab: man erhält durch Substitution der Form (3) in die Gleichung (1) [oder (2)] eine irreducibele Gleichung 6^{ten} Grades für t:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &(\alpha_t a_x a_y)^2 \cdot \alpha_t \alpha_t' (a a' u)^2 \cdot \alpha_t \alpha_t' (a a' v)^2 \\ &- c \cdot \alpha_t a_x^2 \cdot \alpha_t a_y^2 \cdot [\alpha_t \alpha_t' (a a' u)\ (a a' v)]^2 = 0 \end{aligned}$$

entsprechend dem Chasles'schen Satze, da die Charakteristiken des allgemeinen Kegelschnittbüschels $q = 2$, $q' = 1$ sind.

---

*) Es ist dieses Beispiel von dem von Herrn Halphen angegebenen nicht wesentlich verschieden.

Bei einem Büschel von Kegelschnitten dagegen, welcher eine doppelt zählende Gerade enthält und zugleich eine Kegelschnittschaar ist, haben wir $q = 1$, $q' = 1$; wir können nach dem Chasles'schen Satze nur 4 wirkliche Lösungen erhalten, und es muss sich daher von jener Gleichung 6^{ten} Grades ein quadratischer Factor abscheiden (der die nun auftretenden scheinbaren Lösungen angiebt).

In der That haben wir in diesem Falle $R = 0$ anzunehmen, es wird Δ_t^2 ein Quadrat, gleich $(\Delta_t)^2$, und von der Liniengleichung des Kegelschnittbüschels muss sich der Factor Δ_t absondern, so dass wir

$$\alpha_t \alpha_t' (a a' u)^2 \equiv \Delta_t \cdot \beta_t u_b^2$$

setzen können. $(\Delta\alpha) a_x^2 = 0$ wird nun die Gleichung der Doppellinie des Büschels, $(\Delta\beta) u_b^2 = 0$ die Gleichung des Punktepaares, welches jener Doppellinie als Curve 2. Classe zugeordnet ist.

Führen wir diese Voraussetzungen in die Gleichung (4) ein, so erhalten wir

$$(\Delta_t)^2 [(\alpha_t a_x a_y)^2 \beta_t u_b^2 \cdot \beta_t v_b^2 - c \cdot \alpha_t a_x^2 \cdot \alpha_t a_y^2 (\beta_t u_b v_b)^2] = 0,$$

es scheidet sich also in der That der Factor $(\Delta_t)^2$ ab, und es bleibt nur noch eine Gleichung 4^{ten} Grades zur Bestimmung der beiden Systemen wirklich gemeinsamen Curven aufzulösen.

Ein analoges Ergebniss erhalten wir, wenn wir weiterhin die Annahme einführen, dass wir einen Büschel einander vierpunktig berührender Curven vor uns haben. Es wird dann $\Delta_t^2 \equiv 0$, A_t^3 eine dritte Potenz, $= (A_t)^3$, und es ist $\alpha_t \alpha_t' (a a' u)^2 \equiv A_t \cdot \gamma_t u_c^2$ zu setzen. Es scheidet sich jetzt der Factor A_t^2 ab, und wir erhalten wiederum eine Gleichung vierten Grades. Von dieser können wir aber jetzt, in dem Falle, wo $c = 1$, eine Wurzel von vorn herein angeben, denn es ist nun die Gleichung der Curve 2. Classe der Schaar: $(A\gamma) u_c^2 = 0$, welche der Doppellinie $(A\alpha) a_x^2 = 0$ des Büschels (1) entspricht, ein Quadrat geworden, A ist also eine Wurzel der Gleichung:

$$(\alpha_t a_x a_y)^2 \gamma_t u_c^2 \cdot \gamma_t v_c^2 - \alpha_t a_x^2 \cdot \alpha_t a_y^2 (\gamma_t u_c v_c)^2 = 0$$

und es bleibt nur noch eine Gleichung *dritten Grades* aufzulösen, welche allein die *beweglichen* Schnittcurven beider Systeme angiebt.

Sei endlich der Kegelschnittbüschel in eine *Involution* von Strahlenpaaren ausgeartet. Dann wird auch $A_t^3 \equiv 0$, und es ist

$$\alpha_t \alpha_t' (a a' u)^2 \equiv C_t^2 \cdot u_\xi^2$$

zu setzen, wo C_t^2 die binäre Form 2. Ordnung ist, deren Nullpunkte die Doppelelemente der Involution angeben, und ξ den Scheitel des Strahlenbüschels vorstellt, welchem die Linienpaare derselben angehören.

Durch Einführung dieser Voraussetzungen in die Gleichung (4) erhält man jetzt:

$$(C_t^2)^2 \cdot u_\xi^2 v_\xi^2 [(\alpha_t a_x a_y)^2 - c \cdot \alpha_t a_x^2 \cdot \alpha_t a_y^2] = 0.$$

Es bleibt also nur noch eine *quadratische* Gleichung für t, entsprechend dem Werthe 2 der Charakteristik λ. Diese Gleichung reducirt sich, sobald $c = 1$ wird, ebenfalls auf $C_t^2 = 0$, da der Ausdruck in der Klammer, der von ξ ganz unabhängig ist, alsdann die Form

$$(a_x a_y)^2 - a_x^2 \cdot a_y^2$$

annimmt, und daher für jede Doppellinie, aber nicht für jedes Linienpaar identisch verschwindet.

Das Kegelschnittsystem (2) *hat also mit jeder Involution von Punktepaaren oder Strahlenpaaren nur deren Doppelelemente gemein.*

Es ist ersichtlich, dass eine Theorie, welche den Begriff der eigentlichen Lösung des Charakteristikenproblems von der Beweglichkeit derselben abhängig macht, den Charakteristiken λ und λ' eines vierfach ausgedehnten Systems die einfache Deutung, welche dieselben hier gefunden haben, wenigstens allgemein nicht geben kann, da die Involution von Strahlen- und Punktepaaren gerade solche Systeme von Kegelschnitten sind, für welche, — soferne man sie überhaupt zulassen will — *der Chasles'sche Satz in der Auffassung jener Theorie keine allgemeine Geltung mehr hat.*

Leipzig, im Juli 1885.

Ueber die Cremona'sche Charakteristikenformel.

Von

E. Study in Leipzig.

Meine auf zwei- und dreifach ausgedehnte Kegelschnittsysteme bezüglichen Untersuchungen habe ich in die vorstehende Arbeit nicht mit aufgenommen, da es mir bis jetzt nicht gelungen ist, dieselben in ähnlich allgemeiner Weise durchzuführen, wie es bei den vierfach ausgedehnten Systemen, zu deren Behandlung das Bézout'sche Theorem ausreichte, noch möglich war.

Es mögen aber wenigstens einige Bemerkungen hier eine Stelle finden, welche sich auf den Satz von Cremona beziehen, der für die Zusammenstellung eines zweifach- und eines dreifach ausgedehnten Systems dasselbe leistet, was der Chasles'sche Satz für ein- und vierfach ausgedehnte Systeme. Dieser Satz sagt in seiner ursprünglichen Form aus, dass die Zahl der „Kegelschnitte, in welchen sich ein dreifach ausgedehntes System M und ein zweifach ausgedehntes N durchdringen" durch einen dreigliedrigen Ausdruck dargestellt wird, welcher sich aus zwei Reihen von „Charakteristiken" bilinear zusammensetzt, von welchen die erste nur von den Eigenschaften des Systems M, die zweite nur von denen des Systems N abhängt.

Es steht von vorn herein zu vermuthen, dass dieser Satz durch die Einführung des Begriffes der vollständigen Form eine ebenso allgemein giltige Deutung erfahren werde, als wir in Betreff des Chasles'schen Satzes gesehen haben; und in der That verhält es sich so.

Zugleich ergiebt sich eine einfache, bisher, wie es scheint, nicht bemerkte geometrische Deutung des Cremona'schen Satzes, ähnlich der § 9 der vorstehenden Arbeit hinsichtlich des Chasles'schen Satzes angegebenen; und in ihrer Begleitung eine Moduldarstellung der zweifach ausgedehnten Systeme, welche der von Herrn Halphen für die dreifach ausgedehnten Systeme aufgestellten analog ist.

Für den Fall, dass das drei- und das zweifach ausgedehnte System vollständige Durchschnitte von zwei, bezüglich drei vierfach ausgedehnten Systemen sind, ist der Nachweis der ersteren Behauptung als durch die Formel VI des § 9 der vorstehenden Abhandlung bereits erbracht anzusehen, da es natürlich gleichgiltig ist, in welcher Reihenfolge man die fünf vierfach ausgedehnten Systeme, welche in diese Formel eintreten, zum Durchschnitt bringt. Der andere Fall aber, in welchem diese besondere Voraussetzung nicht erfüllt ist, lässt sich auf den ersten zurückführen,

da man jede Mannichfaltigkeit M oder N durch Hinzufügung geeigneter Mannichfaltigkeiten gleicher Dimension zu einem vollständigen Durchschnitt ergänzen kann, und hier, was für das Ganze gilt, wie nicht schwer zu sehen, auch für die einzelnen Theile gelten muss.

Die in der Cremona'schen Formel auftretenden Charakteristiken besitzen eine ähnlich einfache geometrische Bedeutung, wie die des Chasles'schen Satzes; und zwar erhält man, wenn man die in § 7 der vorstehenden Arbeit angegebenen Sätze auf Systeme M und N in den einfachen, hier in Betracht kommenden Fällen ausdehnt, den Satz von Cremona in der folgenden Form:

„Sei r die Zahl der Strahlenpaare eines dreifach ausgedehnten Systems M, welche ihren Scheitel in einem gegebenen Punkt haben; s die Zahl der Kegelschnitte desselben, welche ein gegebenes Poldreieck haben; r' die Zahl der Punktepaare desselben, welche auf einer gegebenen Geraden liegen —

ferner n die Zahl der Kegelschnitte eines zweifach ausgedehnten Systems N, welche (als Curven 2. Cl. aufgefasst) *sich auf einen Büschel von Curven 2. O. stützen, oder insbesondere zwei gegebene Gerade berühren; l die Zahl der Kegelschnitte des Systems N, in Bezug auf welche ein gegebner Punkt und eine gegebene Gerade Pol und Polare sind, oder welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren; endlich n' die n dualistisch gegenüberstehende Anzahl.*

Dann ist die Zahl der beiden Systemen gemeinsamen Curven, so lange sie überhaupt endlich ist, gleich:

$$\begin{aligned} &rn' - (r - s + r')\,l + r'n \\ &\equiv r(n' - l) + sl + r'(n - l). \end{aligned}$$

Die Zahlen r, s, $r' - n$, l, n' die wir als *„Charakteristiken"* der Systeme M und N bezeichnen, werden mit den gewöhnlich als Charakteristiken gebrauchten Zahlen durch die Relationen verbunden:

$$\begin{aligned} N\mu^2 &= n' & M\mu^3 &= s + 3r' \\ N\mu\nu &= 2l & M\mu^2\nu &= 2s + 2r' \\ N\nu^2 &= n & M\mu\nu^2 &= 2s + 2r \\ & & M\nu^3 &= s + 3r, \end{aligned}$$

aus welch' letzteren die Identität:

$$M(2\mu^3 - 3\mu^2\nu + 3\mu\nu^2 - 2\nu^3) \equiv 0$$

nunmehr in allgemeiner Weise sich ergiebt. Umgekehrt erhält man:

$$s = -\frac{1}{8} M(2\mu^3 - 3\mu^2\nu - 3\mu\nu^2 + 2\nu^3),$$

$$r = \frac{1}{4} M(2\nu^3 - \mu\nu^2), \quad r' = \frac{1}{4} M(2\mu^3 - \mu^2\nu),$$

Ausdrücke, die im Falle M der vollständige Durchschnitt zweier vier-

fach ausgedehnter Systeme L_1, L_2 ist (wofür wir $M = L_1 L_2$ schreiben), die folgenden einfachen, auch direct leicht abzuleitenden Relationen ergeben:

$$s - r - r' = 2(\lambda_1 \lambda_2' + \lambda_2 \lambda_1')$$
$$r = \lambda_1 \lambda_2 \qquad r' = \lambda_1' \lambda_2' \text{ *).}$$

Für zwei- und dreifach ausgedehnte Systeme liefert der Cremona'sche Satz ähnliche *Moduldarstellungen*, wie wir sie in § 9 hinsichtlich der ein- und vierfach ausgedehnten Systeme kennen lernten.

Führen wir diese ein, so können wir alle in dem Charakteristikenproblem der Kegelschnitte einbegriffenen Fragestellungen durch einen einzigen Satz beantworten.

Wir fügen zu diesem Behufe zu den § 9 benutzten Bezeichnungen noch die folgenden:

Es sollen μ^2, ν^2 resp. die dreifach ausgedehnten Systeme bezeichnen, welche der vollständige Schnitt je zweier Systeme μ und ν sind, $\frac{\mu\nu}{2}$ das System der Kegelschnitte, welche eine gegebene Gerade als Polare eines gegebenen Punktes haben; α soll das Kegelschnittsystem bedeuten, das von allen Punktepaaren einer Geraden, α' dasjenige, welches von allen Strahlenpaaren eines Punktes gebildet wird; endlich sei β das System aller Kegelschnitte, welche ein gegebenes Poldreieck besitzen.

Dann ist mit Bezug auf diese und die § 9 der voranstehenden Arbeit eingeführten Bezeichnungen für vier-, drei-, zwei- und einfach ausgedehnte Kegelschnittsysteme L, M, N, Q:

I.

$$\lambda = L\tau \qquad \lambda' = L\sigma$$
$$L = \lambda\mu + \lambda'\nu. \tag{1}$$

II.

$$r = M\alpha' \qquad s = M\beta \qquad r' = M\alpha$$
$$M = r\mu^2 + (s - r - r')\frac{\mu\nu}{2} + r'\nu^2. \tag{2}$$

---

*) Eine besonders symmetrische Form nimmt der Satz von Cremona an, wenn man für r, s, r' neue Charakteristiken einführt, die durch die Gleichungen:

$$b = r + r' \qquad a = s - r \qquad a' = s - r'$$

definirt sind, und von welchen die letzteren die Zahlen der Punktepaare, bezüglich Strahlenpaare des Systems M darstellen, welche einen festen Punkt, bezüglich eine feste Gerade enthalten. Es wird alsdann, wenn man noch s_1 für $\frac{1}{2}(a + b + a')$, und σ_1 für $\frac{1}{2}(n + l + n')$ schreibt,

$$MN = (s_1 - a)n' + (s_1 - b)l + (s_1 - a')n$$
$$\equiv a(\sigma_1 - n') + b(\sigma_1 - l) + a'(\sigma_1 - n).$$

III.

$$n = N\nu^2 \qquad l = N\frac{\mu\nu}{2} \qquad n' = N\mu^2$$

$$N = (n-l)\,\alpha + l\beta + (n'-l)\,\alpha'. \tag{3}$$

IV.

$$q = Q\nu \qquad q' = Q\mu$$

$$Q = q\sigma + q'\tau \tag{4}$$

Um nun die Zahl der Curven zu bestimmen, in denen sich irgend welche, in den Dimensionen passend gewählte Kegelschnittsysteme durchdringen, multiplicire man die durch die Gleichungen (1), (2), (3), (4) *gegebenen Moduln derselben mit einander, und ersetze dann die Producte der* μ, ν, α, β, σ, τ *bezüglich durch die Werthe:*

$$\begin{array}{lll} \mu^5 = 1 & \mu^4\nu = 2 & \mu^3\nu^2 = 4 \\ \mu^2\nu^3 = 4 & \mu\nu^4 = 2 & \nu^5 = 1 \\ \alpha\mu^2 = 0 & \alpha\mu\nu = 0 & \alpha\nu^2 = 1 \\ \beta\mu^2 = 1 & \beta\frac{\mu\nu}{2} = 1 & \beta\nu^2 = 1 \\ \alpha'\mu^2 = 1 & \alpha'\mu\nu = 0 & \alpha'\nu^2 = 0 \end{array}$$

$$\sigma\mu = \tau\nu = 0 \qquad \sigma\nu = \tau\mu = 1.$$

Hinsichtlich der *Beweglichkeit der Lösungen* ist mit Bezug auf die Cremona'sche Formel Aehnliches zu sagen, wie bei dem Chasles'schen Satze. Es haben innerhalb des zweifach ausgedehnten Systems die Lösungen im Allgemeinen die Maximalbeweglichkeit 2; nämlich immer dann, wenn das dreifach ausgedehnte System nicht ∞^2 oder das zweifach ausgedehnte nicht ∞^1 ausgeartete Curven der dritten Art enthält, und in noch zwei weiteren unschwer anzugebenden Fällen, wo diese Vorkommnisse wirklich zugleich auftreten. In den übrigen Fällen findet eine Verringerung der Beweglichkeit einzelner Lösungen von 2 auf 1 statt.*)

*) Eine Theorie, welche etwa zwei Systeme von Curven 2. *Ordnung* einander gegenüberstellte, und nun, ohne durch die Begriffe der „vollständigen Form" und der „wirklichen Lösung" hindurchzugehen, direct die Zahl der *beweglichen* Curven 2. O. anzugeben suchte, die beiden Systemen gemeinsam sind, dürfte nicht unterlassen, hervorzuheben, dass der Cremona'sche Satz da, wo er im Sinne einer solchen Theorie richtig ist (nämlich bei Ausschluss der im Texte angedeuteten Fälle), *nicht* schlechthin die Zahl der *beweglichen* Schnittcurven angiebt, sondern die Zahl derjenigen, welche die *Maximalbeweglichkeit* 2 haben. Denn es giebt noch (scheinbare) Lösungen, deren Beweglichkeit 1 ist, und die in der Cremona'schen Formel nicht mitgezählt sind.

Leipzig, im Juli 1885.

Ueber Configurationen, welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind.

Von

Felix Klein in Leipzig.

Eine Reihe von Vorträgen, welche ich in dem nun vergangenen Sommer in meinem Seminare gehalten habe, gaben mir die Veranlassung, die interessanten Sätze, welche Herr Rohn betreffs des in der Ueberschrift genannten Gegenstandes von der Theorie der hyperelliptischen Functionen ausgehend in seiner Habilitationsschrift*) mehr andeutet, als entwickelt, im Zusammenhange darzulegen und nach einigen Richtungen weiter zu führen. Indem ich im Folgenden den wesentlichen Inhalt meiner Betrachtungen reproducire, hoffe ich zu erreichen, dass der Gegenstand allseitig zugänglich wird und von anderer Seite vielleicht bald weiter gefördert werden kann.

I. Elementares über Liniengeometrie.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Die eigentliche Grundlage für die Betrachtung der Kummer'schen Fläche bildet anerkanntermassen die Untersuchung der Liniencomplexe zweiten Grades, deren Singularitätenfläche die Kummer'sche Fläche ist. Ich werde im Folgenden durchweg, wie dies auch Herr Rohn thut, von dem kanonischen Coordinatensysteme ausgehen, das ich im zweiten Bande dieser Annalen (pag. 189ff.) einführte und vermöge dessen die Raumgerade homogene Coordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_6$ erhält, welche an die Bedingung:

$$\sum x_i^2 = 0 \tag{1}$$

*) Bd. 15 dieser Annalen: *Transformation der hyperelliptischen Functionen $p=2$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche* (vgl. insbesondere p. 348—350 daselbst).

gebunden sind, während gleichzeitig die unendlich vielen in Rede stehenden Complexe zweiten Grades durch folgende Gleichung gegeben sind:

$$\sum \frac{x_i^2}{x_i - \lambda} = 0, \tag{2}$$

unter λ einen Parameter verstanden. Uebrigens setze ich im Folgenden die Theorie dieser Complexe, die jetzt ja verschiedentlich bearbeitet und zur Darstellung gebracht ist, im Wesentlichen als bekannt voraus. Es soll sich zunächst darum handeln, die l. c. besprochenen Configurationen, soweit dies unmittelbar gelingt, in elementarer Weise, d. h. unter Beiseitelassung der hyperelliptischen Functionen, zu behandeln. Wenn wir dann weiter unten, im zweiten Theile der gegenwärtigen Darstellung, die letzteren in Betracht ziehen und, auf ihre Kenntniss gestützt, im dritten Theile auf die Configurationen zurückkommen, so wird der grosse Vortheil, den die Benutzung transcendenter Functionen hier bietet, um so deutlicher hervortreten. Derselbe zeigt sich zumal darin, dass wir alle Constructionen sofort verallgemeinern und insbesondere eine neue Classe von Configurationen construiren können, worauf gleich hier aufmerksam gemacht sei.

§ 2.

Conjugirte Punkte und Ebenen der Kummer'schen Fläche.

Der Hauptsatz, den ich nunmehr der speciellen Betrachtung voranstellen will, ist folgender:

Die 4 Punkte, in denen eine beliebige Raumgerade die Kummer'sche Fläche schneidet, und die 4 Tangentialebenen, welche man durch dieselbe Raumgerade an die Fläche legen kann, sind in der Art auf einander bezogen, dass jeder Zerlegung der 4 Punkte in 2 Paare eine Zerlegung der 4 Ebenen in 2 Paare rational entspricht.

Dieser Satz ergiebt sich, beiläufig bemerkt, als Corollar des anderen, mehrfach behandelten, den ich im 2ten Bande der Annalen (l. c.) mittheilte, demzufolge die 4 Punkte und die 4 Ebenen in richtiger Reihenfolge zusammen dasselbe Doppelverhältniss darbieten*). In der That, sind vier Elemente eines einstufigen Gebildes

$$I,\ II,\ III,\ IV$$

vier Elementen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4$$

*) Vergl. meine Bemerkungen im 7ten Annalenbande, p. 208 ff., oder auch die Entwickelungen von Voss im 9ten Bande daselbst, p. 66. Uebrigens folgt der Satz auch sofort aus der allgemeinen Theorie der zwei-zweideutigen Verwandtschaft zweier Grundgebilde erster Stufe. Man betrachte die Raumgerade als Leitlinie einer gewöhnlichen Complexfläche und beachte, dass dann ihre Punkte und Ebenen 2-2-deutig zusammen geordnet sind, etc. etc.

eines zweiten einstufigen Gebildes projectiv, so sind sie es nicht minder zu folgenden Elementenreihen:

$$2,\ 1,\ 4,\ 3;$$
$$3,\ 4,\ 1,\ 2;$$
$$4,\ 3,\ 2,\ 1,$$

und es entsprechen sich also die Zerfällungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} (I,\ II)\,(III,\ IV) & \text{und} \quad (1,\ 2)\,(3,\ 4), \\ (I,\ III)\,(IV,\ II) & \text{und} \quad (1,\ 3)\,(4,\ 2), \\ (I,\ IV)\,(II,\ III) & \text{und} \quad (1,\ 4)\,(2,\ 3). \end{cases}$$

in eindeutiger Weise.

Es sollen jetzt die römischen Ziffern die Ebenen und die arabischen Ziffern die Punkte der Kummer'schen Fläche bedeuten, welche unserer Raumgeraden angehören. *Ich werde dann solche Ebenenpaare und Punktepaare, welche in einer der Zerfällungen* (3) *neben einander stehen, z. B.*

$$(I,\ II) \quad \text{und} \quad (1,\ 2)$$

in Bezug auf die Kummer'sche Fläche conjugirt nennen. Zu jeder Raumgeraden gehören offenbar 12 conjugirte Ebenen- und Punktepaare. Kennen wir von den Ebenen der Kummer'schen Fläche, die durch eine Raumgerade gehen, zwei und ausserdem einen Schnittpunkt der Raumgeraden mit der Fläche, so können wir denjenigen anderen Schnittpunkt, der mit den beiden Ebenen und dem vorgegebenen Punkte conjugirt ist, rational berechnen. Man beachte, dass man diesen Satz auch umkehren kann. Gelingt es, durch rationale Processe einen weiteren Schnittpunkt unserer Raumgeraden mit der Kummer'schen Fläche zu finden, so wird dies eben derjenige Schnittpunkt sein, der mit den anderen Elementen conjugirt ist.

Ich stelle jetzt die Frage, wie der Begriff conjugirter Ebenen und Punkte hervortritt, wenn wir unsere Raumgerade mit einem Complexe der Schaar (2) combiniren und die Complexfläche construiren, deren Leitlinie sie ist.

Es soll zunächst einer derjenigen 4 Complexe der Schaar (2) herausgegriffen werden, denen unsere Raumgerade als Linie angehört. Vermöge eines solchen Complexes werden die Ebenen und Punkte unserer Raumgeraden in bekannter Weise eindeutig zusammengeordnet, indem jede Ebene einen Complexkegelschnitt trägt, der die Gerade in einem bestimmten Punkte (den wir dann der Ebene entsprechend setzen) berührt. Für die Ebenen I, II, III, IV, die wir jetzt die singulären Ebenen nennen, gilt insbesondere Folgendes: Der in der singulären Ebene enthaltene Complexkegelschnitt hat sich in zwei Strahlbüschel aufgelöst, deren eines seinen Mittelpunkt auf unserer Raumgeraden hat. Dieser

Mittelpunkt, welcher der singulären Ebene in dem hier in Betracht kommenden Sinne entspricht, ist gleichzeitig einer der vier auf unserer Raumgeraden gelegenen singulären Punkte, die wir schon mit 1, 2, 3, 4 bezeichneten. — Es sind hier betreffs der Zusammengehörigkeit der singulären Ebenen und Punkte dem projectiven Charakter der Zuordnung und der Vierzahl der in Betracht kommenden Complexe entsprechend, genau jene 4 Anordnungen möglich, die wir soeben aufgezählt haben. Daher folgt zunächst:

(A) *Beliebige zwei der singulären Ebenen und diejenigen zwei der singulären Punkte, die ihnen in einem der vier Complexe entsprechen, sind jedesmal conjugirt.*

Wir können auch so sagen:

(A′) *Sind zwei der Ebenen und zwei der Punkte conjugirt, so giebt es unter den 4 Complexen unserer Schaar, denen die Raumgerade angehört, immer 2, welche den beiden Ebenen, in der einen oder anderen Reihenfolge, die beiden Punkte entsprechen lassen;*

oder auch:

(A″) *Befindet sich unter den 4 Complexen einer, der zweien der Ebenen zwei bestimmte unter den Punkten entsprechen lässt, so giebt es noch einen zweiten Complex, der dies ebenfalls thut, nur dass die Reihenfolge, in der die Punkte den Ebenen zugeordnet werden, bei ihm umgekehrt erscheint.* —

Es sei jetzt $\lambda = a$ ein Complex unserer Schaar, dem unsere Raumgerade nicht angehört. Die Complexkegelschnitte, welche $\lambda = a$ in den singulären Ebenen *I, II, III, IV* entsprechen, sind wieder je in zwei Strahlbüschel zerfallen; ich will die Mittelpunkte dieser Büschel (von denen jetzt keiner auf der anfänglichen Raumgeraden liegt) folgendermassen bezeichnen:

(4a) $\qquad I', I''; \quad II', II''; \quad III', III''; \quad IV', IV''.$

Wir betrachten andererseits die Complexkegel, die von den singulären Punkten 1, 2, 3, 4 auslaufen. Sie sind ebenfalls je in zwei Büschel zerfallen, deren Ebenen wir beziehungsweise nach folgendem Schema benennen mögen:

(4b) $\qquad 1', 1''; \quad 2', 2''; \quad 3', 3''; \quad 4', 4'';$

keine dieser Ebenen geht durch unsere Raumgerade hindurch.

Nun ist die Beziehung dieser Ebenen zu den Punkten (4a) bekanntlich die, dass jede der Ebenen 4 der Punkte trägt (immer einen aus jeder singulären Ebene), während zugleich die beiden Ebenen eines Paares zusammengenommen alle 8 Punkte enthalten.

Wir betrachten jetzt die Punkte:

$$I', I''; \quad II', II'',$$

die in den singulären Ebenen I, II enthalten sind. Dieselben mögen sich auf die beiden von 1 auslaufenden Ebenen:

$$1', 1''$$

in der Weise vertheilen, dass $1'$ durch I', II' und also $1''$ durch I'', II'' hindurchgeht (was keine Particularisation ist, sondern immer durch Wahl der Bezeichnung erreicht werden kann). Nun mögen 1, 2, wie wir vorhin schon annahmen, zu I, II conjugirt sein; wir fragen, wie sich unter dieser Voraussetzung die Punkte I', I'', II', II'' auf die beiden von 2 auslaufenden Ebenen (also auf $2'$, $2''$) vertheilen. Ich behaupte, dass die Vertheilung genau so geschehen muss, wie bei den Ebenen $1'$, $1''$, also in der Art, dass I', II' in einer der beiden Ebenen liegen (die wir fernerhin $2'$ nennen wollen), I'', II'' in der anderen der beiden Ebenen (die dann $2''$ genannt werden muss). Es giebt nämlich überhaupt nur zwei Weisen, wie sich die Punkte I', I'', II', II'' auf die beiden von einem der singulären Punkte 1, 2, 3, 4 auslaufenden Ebenen vertheilen können: entweder gehören I', II' und andererseits I'', II'' zusammen, oder I', II'' und I'', II'. Böten nun die von 2 auslaufenden Ebenen nicht dieselbe Vertheilungsweise dar, wie die von 1 auslaufenden, so müssten es die Ebenen thun, die von 3 oder von 4 ausgehen. Dann aber gehörte 3 oder 4 zu 1 und den beiden Ebenen I, II eindeutig hinzu, wäre also aus I, II und 1 rational zu berechnen, während dies nach Annahme doch nur bei 2 zutreffen kann. Daher u. s. w. — Natürlich könnte man den hiermit gegebenen indirecten Beweis sofort durch einen directen ersetzen, wenn man genauer auf die Gruppirung der 8 Punkte und 8 Ebenen eingehen wollte, wie ich dies beispielsweise in Bd. 7 der Annalen (l. c.) gethan habe. Wichtiger ist für das Folgende, dass wir unseren Satz, wie sofort ersichtlich, umkehren können. Wir haben:

(B) *Wenn die Punkte I', I'', II', II'' irgend zweier singulärer Ebenen I, II sich auf die von zwei singulären Punkten* 1, 2 *der Durchschnittskante auslaufenden Ebenen* $1'$, $1''$, $2'$, $2''$ *in gleichförmiger Weise vertheilen, so sind I, II,* 1, 2 *in Bezug auf die Kummer'sche Fläche conjugirt.*

§ 3.

Ausgezeichnete Tetraeder.

Wir wollen jetzt das Tetraeder genauer betrachten, welches in 1, 2 und in zweien der in I, II von uns zusammengeordneten Punkte, also etwa in I', II', seine Eckpunkte hat, und dessen Seitenebenen durch I, II, beziehungsweise $1'$, $2'$ vorgestellt sein werden, wobei den Punkten

$$1, \quad 2, \quad I', \quad II'$$

der Reihe nach die folgenden Ebenen

$$2', \quad 1', \quad II, \quad I$$

gegenüberliegen. Der Complex $\lambda = a$ enthält von den 12 Büscheln, die, in den Seitenflächen des Tetraeders liegend, eine Ecke des Tetraeders zum Mittelpunkte haben, 4, nämlich:

$$(I, I'), \quad (II, II'), \quad (1', 1), \quad (2', 2).$$

Jedes dieser Büschel hat mit zweien derselben eine Kante unseres Tetraeders gemein, so dass wir überhaupt von einer *windschiefen Büschelconfiguration* unseres Tetraeders sprechen können, die dem Complexe $\lambda = a$ angehört. Wir schliessen hieraus, *dass je zwei Ebenen unseres Tetraeders und die beiden Eckpunkte, welche ihre Durchschnittskante enthält, in Bezug auf die Kummer'sche Fläche conjugirt sind.* Für die ursprünglich allein betrachtete Linie (I, II), bez. $(1, 2)$, war dies von vornherein bekannt, bez. folgte aus (B); ebenso folgt es aus (B) für die gegenüberliegende Kante. Für die anderen 4 Kanten (die jedesmal zweien der 4 Büschel der Büschelconfiguration gemeinsam sind) ergiebt sich der Satz aus (A).

Ein Tetraeder der hiermit betrachteten Art werde ich fortan als *ausgezeichnetes* Tetraeder bezeichnen. Ein ausgezeichnetes Tetraeder ist der Kummer'schen Fläche *gleichzeitig ein- und umgeschrieben.* Denn seine Ecken sind singuläre Punkte eines Complexes $\lambda = a$, seine Ebenen singuläre Ebenen desselben. *Offenbar giebt es fünffach unendlich viele ausgezeichnete Tetraeder.**) Denn wir können den Complex $\lambda = a$ und die Anfangskante I, II (die ihrerseits von 4 Constanten abhängt) beliebig annehmen. Uebrigens gelangen wir auch noch durch andere Annahme derselben Bestimmungsstücke zu demselben Tetraeder. Erstlich ist klar, dass wir, unter Festhaltung des Complexes $\lambda = a$, statt mit der Kante (I, II) ebensowohl mit der gegenüberliegenden Kante $(1', 2')$ beginnen können. Dann aber sage ich, *dass unser Tetraeder noch zu zwei anderen Complexen der Schaar* (2), die ich $\lambda = b$ und $\lambda = c$ nennen will, *genau in derselben Beziehung steht, wie zum Complexe* $\lambda = a$. Es sind dies diejenigen beiden unter den vier Complexen, denen die Kante (I, II) angehört, welche dem Theoreme (A') zufolge die Ebenen I, II und die Punkte 1, 2 zusammenordnen.

In der That: jedem der beiden hiermit definirten Complexe muss eine windschiefe Büschelconfiguration unseres Tetraeders angehören. Der Complex $\lambda = b$ möge etwa zunächst das Büschel $I, 1$ und also das Büschel $II, 2$ enthalten. Er enthält dann insbesondere die Tetraederkanten, längs deren sich I und $1'$, bez. II und $2'$ schneiden. Aber die beiden Ebenen, welche wir hiermit bei der einzelnen Kante nennen,

---

*) Den Satz, dass es ∞^5 Tetraeder giebt, die der Kummer'schen Fläche gleichzeitig ein- und umgeschrieben sind, hat gelegentlich Herr Hurwitz auf meinen Wunsch mitgetheilt; siehe Bd. 15 dieser Annalen, p. 14 (Fussnote).

sind zu den beiden Eckpunkten, die auf derselben Kante liegen, also zu 1 und I', bez. zu 2 und II', wie wir wissen, conjugirt. Daher gehören dem Complexe $\lambda = b$ auch die Büschel an, die von den Ecken I', II' bez. in den Ebenen $1', 2'$ auslaufen, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Auf Grund dieser Betrachtungen ergiebt sich schliesslich eine Construction unseres Tetraeders, welche von den drei Complexen $\lambda = a$, $\lambda = b$, $\lambda = c$ ganz unabhängig ist. Die drei Eckpunkte, welche einer Seitenfläche des Tetraeders bez. in den drei Complexen entsprechen, sind nämlich, wie aus der Constantenzählung hervorgeht, unter den Punkten der Durchschnittscurve, die unserer Ebene mit der Kummer'schen Fläche gemeinsam ist, drei ganz beliebige. Daher also werden wir zur Construction unseres Tetraeders erstlich eine Seitenfläche desselben unter den Tangentialebenen der Kummer'schen Fläche nach Willkür annehmen, dann aber auf der zu ihr gehörigen Durchschnittscurve mit der Kummer'schen Fläche drei Ecken des Tetraeders beliebig fixiren. *Wenn wir dann durch je zwei dieser Ecken diejenige Ebene legen, die zu ihnen in Bezug auf die anfänglich angenommene Ebene conjugirt ist, so schneiden sich diese Ebenen von selbst in einem weiteren Punkte der Kummer'schen Fläche, und wir haben ein ausgezeichnetes Tetraeder construirt.*

§ 4.

Allgemeinere Configurationen.

Die fünffach unendlich vielen Tetraeder, welche wir jetzt kennen, gruppiren sich in charakteristischer Weise zu grösseren Configurationen zusammen, welche ebenfalls der Kummer'schen Fläche gleichzeitig ein- und um-geschrieben sind. Eine erste solche Configuration erhalten wir sofort, wenn wir erneut an die Anfangsüberlegung anknüpfen, von der aus wir die ausgezeichneten Tetraeder zunächst definirt haben. Es ist dies diejenige Configuration, welche von den vier singulären Punkten und Ebenen 1, 2, 3, 4 bez. I, II, III, IV, den 8 zugehörigen Ebenen $1', 1''$; $2', 2''$; $3', 3''$; $4', 4''$ und den 8 zugehörigen Punkten I', I''; II', II''; III', III''; IV', IV'', kurzum von den singulären Elementen der zu unserer Raumgeraden und dem Complexe $\lambda = a$ gehörigen *Complexfläche* gebildet wird, und aus der man, wie sofort ersichtlich, die Ecken und Ebenen von 24 ausgezeichneten Tetraedern herausgreifen kann*). Nun ist aber die Complexfläche als Umhüllungs-

*) Ich verfolge die Gruppirung dieser Punkte und Ebenen oder auch die Beziehung der Complexfläche zu unserer Kummer'schen Fläche (der Singularitätenfläche) nicht weiter, weil selbstverständlich Alles, was im Texte sogleich über

gebilde derjenigen Complexlinien, welche eine feste Raumgerade treffen, in allen diesen Untersuchungen nur der specielle Fall jener Brennfläche, welche bei Zusammenstellung des Complexes $\lambda = a$ mit einem *allgemeinen* linearen Complexe entsteht, und die selbst eine *Kummer'sche Fläche* sein wird, die wir mit unserer von Anfang an betrachteten Kummer'schen Fläche, der Singularitätenfläche der Complexe (2), natürlich nicht verwechseln dürfen*). Wir handeln im Folgenden nur von der Configuration $(16)_6$, welche von den Doppelpunkten und den Doppelebenen der neuen Kummer'schen Fläche gebildet wird. *Offenbar ist auch diese Configuration der anfänglichen Kummer'schen Fläche gleichzeitig ein- und um-geschrieben.* Denn durch jeden der Doppelpunkte geht innerhalb einer der hindurchlaufenden Doppelebenen der Theorie der Liniencongruenzen zweiter Ordnung und Classe zufolge**) ein Strahlbüschel, so dass der Doppelpunkt als Punkt, die Doppelebene als Ebene der Singularitätenfläche des Complexes $\lambda = a$ angehören muss. *Man zeigt aber überhaupt* (wie ich hier beiläufig anführe, da ich es sogleich als Beweisgrund benutze), *dass die beiden Kummer'schen Flächen einander nach Erstreckung einer Curve achter Ordnung resp. einer Developpablen achter Classe berühren, so zwar, dass sie keinen Punkt und keine Ebene gemein haben, welche nicht dieser Curve, bez. dieser Developpablen angehörten.* Die betreffende Berührungscurve ist der geometrische Ort solcher singulärer Punkte des Complexes $\lambda = a$, deren zugeordnete singuläre Linien unserer Congruenz angehören; die Umhüllungsdeveloppable ist in genau dualistischer Weise definirt. Zum Beweis beachte man, dass eine singuläre Linie des Complexes $\lambda = a$ nur von solchen benachbarten Linien desselben geschnitten wird, die entweder durch den zugeordneten singulären Punkt laufen oder in der zugeordneten singulären Ebene liegen, — dass andererseits unsere zweite Kummer'sche Fläche, nach der Begriffsbestimmung der Brennfläche, von allen Linien der zugehörigen Congruenz umhüllt wird.***)

---

den Fall der als Brennfläche auftretenden Kummer'schen Fläche gesagt werden soll, auf den speciellen Fall der Complexfläche übertragen werden kann.

*) Dem widerspricht nicht, dass weiterhin die Beziehung der Kummer'schen Flächen zu einander als eine durchaus gegenseitige erkannt wird; vergl. die Note am Schluss von § 5.

**) Wegen der Sätze, die im Texte betreffs der in Rede stehenden Congruenzen gebraucht werden, möchte ich hier ein für alle Mal auf Kummer's Originalabhandlung *Ueber algebraische Strahlensysteme etc.* verweisen; siehe Abhandl. d. Berliner Ak. von 1866, insbesondere p. 62—71 daselbst.

***) In allgemeinerer Form findet man diese Ueberlegungen bei Voss im 9ten Bande dieser Annalen, siehe insbesondere, was die Resultate angeht, p. 148 ff. daselbst.

§ 5.

Eigenschaften der neuen Configurationen.

Ueber die nunmehr gewonnenen Configurationen $(16)_6$ hat Herr Rohn, den ich seiner Zeit auf die Existenz derselben aufmerksam machte, zwei einfache Sätze aufgestellt, deren Beweis sich jetzt ohne Mühe ergiebt, wie ich zeigen will*).

Wir betrachten zunächst eine einzelne Ebene der Configuration, die wir I nennen wollen. Sie ist Tangentialebene der ursprünglichen Kummer'schen Fläche und schneidet die letztere also in einer Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkt. Andererseits berührt sie die zutretende Kummer'sche Fläche (die Brennfläche) nach Erstreckung eines Kegelschnitts. Jetzt trägt der Kegelschnitt 6 von den 16 Doppelpunkten der Brennfläche (die wir weiterhin mit $1, 2, \ldots, 6$ bezeichnen wollen), und wir bemerkten bereits oben, dass sämmtliche 16 Doppelpunkte als einfache Punkte der Singularitätenfläche angehören. Daher fallen 6 von den 8 Schnittpunkten, welche unser Kegelschnitt mit der Curve vierter Ordnung gemein hat, in die Punkte $1, 2, \ldots, 6$. Der erste von Herrn Rohn mitgetheilte Satz behauptet: *dass die weiteren beiden Schnittpunkte unserer Curven im Doppelpunkte der Curve vierter Ordnung coïncidiren, dass also der Kegelschnitt zur Curve vierter Ordnung adjungirt ist.* In der That, die ursprüngliche Kummer'sche Fläche und die Ebene I haben die Eigenschaft gemein, die zweite Kummer'sche Fläche überall zu berühren, wo sie dieselbe treffen. Giebt es also einen Punkt, der allen drei Flächen gemein ist und ist derselbe, wie wir hier annehmen (da die Doppelpunkte $1, 2, \ldots, 6$ bereits betrachtet wurden), kein singulärer Punkt der zweiten Kummer'schen Fläche, so ist er ein Berührungspunkt der ersten Kummer'schen Fläche mit der Ebene I. Also etc. etc. — Natürlich gilt der entsprechende Satz für den Kegel zweiter Classe, der in einem beliebigen Eckpunkte unserer Configuration durch die zugehörigen Tangentialebenen der zweiten Kummer'schen Fläche umhüllt wird, wie denn überhaupt *alle* Beziehungen, die im vorliegenden Aufsatze zur Sprache kommen, nach dualistischer Umkehr ebenfalls zutreffen, wie ich nicht jedesmal betonen möchte und also hier ein für allemal hervorgehoben haben will.

Wir nehmen jetzt die übrigen 15 Ebenen zu I hinzu. Da durch jede der 15 Verbindungslinien der sechs in I enthaltenen Eckpunkte $1, 2, \ldots, 6$ eine der Ebenen hindurchläuft, so wird es zweckmässig

*) Rohn l. c.; ebenda (p. 352) die Darstellung der Berührungscurve achter Ordnung in transcendenter Form. Man vergl. hierzu die Entwickelungen von Herrn Reye im 97ten Bande des Journals für Mathematik (*Ueber die Singularitätenflächen quadratischer Strahlencomplexe und ihre Haupttangentencurven*).

sein, die einzelne Ebene durch diejenigen beiden dieser Punkte zu nennen, welche sie enthält. Sechs Ebenen, welche durch einen der 10 nicht in I enthaltenen Eckpunkte der Configuration laufen, erhält man dann bekanntlich in der Weise, dass man die Punkte $1, 2, \ldots, 6$ irgendwie in zwei Gruppen von drei theilt, z. B.

$$1, 2, 3;\quad 4, 5, 6,$$

und dann die Ebenen aufzählt, welche irgend zwei der sonach zusammengehörigen Punkte tragen, also im Beispiele:

$$\overline{12},\ \overline{23},\ \overline{31};\quad \overline{45},\ \overline{56},\ \overline{64}.$$

Wir fassen jetzt drei Ebenen $\overline{ik}$, $\overline{kl}$, $\overline{li}$ mit I zu einem Tetraeder zusammen und erhalten so ein Tetraeder, welches der ursprünglichen Kummer'schen Fläche gleichzeitig um- und ein-geschrieben ist. Offenbar giebt es solcher Tetraeder, zu I gehörig, 20, also im Ganzen bei unserer Configuration, wenn wir I durch eine beliebige Ebene der 16 ersetzen, $\frac{16 \cdot 20}{4} = 80$. *Ich sage jetzt, dass diese sämmtlichen Tetraeder ausgezeichnete Tetraeder in dem früher definirten Sinne sind.*

Der Beweis zerlegt sich, indem wir von dem Complexe $\lambda = a$ ausgehen, in mehrere Schritte. Ich will annehmen, dass dem Complexe $\lambda = a$ in der Ebene I speciell dasjenige Strahlbüschel angehöre, dessen Mittelpunkt in 1 fällt. Dann werden von den 20 Tetraedern, deren eine Seitenfläche mit I coïncidirt, 10 eine windschiefe, dem Complexe a angehörige Büschelconfiguration tragen, wie sofort aus bekannten Sätzen über die Congruenzen zweiter Ordnung und Classe folgt: diejenigen 10 nämlich, welche zugleich 1 zu einer ihrer Ecken haben und denen also das Büschel $(I, 1)$ angehört. Ersetzen wir hier die Ebene I durch irgend eine andere Ebene unserer Configuration, so erhalten wir im Ganzen 40 Tetraeder derselben Definition, bei denen also die Behauptung, die wir aufstellen, selbstverständlich ist. Nun aber participiren an diesen 40 Tetraedern alle 120 durch den Schnitt zweier Configurationsebenen entstehenden Linien als Kanten. Zum Beweise betrachte man nur die 15 dieser Linien, die in I liegen: diejenigen 5 derselben, welche durch 1 laufen, sind, wie man unmittelbar sieht, bei je vier von den 10 Tetraedern, die I zur Seitenfläche haben, betheiligt, die 10, welche nicht durch 1 laufen, bei je einem derselben. Wir schliessen hieraus, was an sich ein schönes Theorem ist: *dass die beiden Ebenen unserer Configuration, welche durch eine der 120 Linien hindurchgehen, und die beiden Eckpunkte derselben, welche auf derselben Linie liegen, allemal in Bezug auf die erste Kummer'sche Fläche conjugirt sind.* Das aber heisst, dass überhaupt jedes Tetraeder, welches man aus den Ebenen und Ecken unserer Con-

figuration bilden kann, ein ausgezeichnetes Tetraeder im früher festgestellten Sinne ist, w. z. b. w.*)

An die hiermit gegebenen Entwickelungen knüpfen wir jetzt zunächst eine einfache Construction unserer Configuration $(16)_6$, in der man sofort die 6 Constanten erkennt, von denen die Configuration abhängt: wir wählen zunächst unter den Tangentenebenen der ersten Kummer'schen Fläche die Ebene I beliebig (2 Const.), zeichnen die Curve vierter Ordnung, in der sie die Kummer'sche Fläche durchdringt, nehmen dann in I einen zur Curve vierter Ordnung adjungirten Kegelschnitt und bezeichnen diejenigen sechs Schnittpunkte desselben mit der Curve vierter Ordnung, welche nicht in den Doppelpunkt der letzteren fallen, mit 1, 2, ..., 6. Wir werden die 16 Ebenen einer Configuration der von uns gewollten Art haben, indem wir durch jede der 15 Verbindungsgeraden $\overline{12}, \ldots$ eine Ebene legen, die mit I zusammen zu den beiden auf der Verbindungsgeraden liegenden Punkten (also zu 1 und 2, etc.) in Bezug auf die Kummer'sche Fläche conjugirt ist, — und diese 15 Ebenen der Ebene I hinzufügen. Die 16 Eckpunkte der Configuration sind 1, 2, ..., 6 und die weiteren Punkte, in denen sich die construirten Ebenen begegnen. —

Uebrigens aber haben wir alle Mittel, um den zweiten Satz von Rohn abzuleiten. Die sechs Strahlbüschel, welche innerhalb der Ebene I durch die Punkte 1, 2, ..., 6 laufen, werden sechs Complexen unserer Schaar beziehungsweise angehören, nämlich $\lambda = a$ und fünf weiteren Complexen, die wie $\lambda = b, c, d, e, f$ resp. nennen wollen. Aus dem eben aufgestellten Satze von dem Conjugirtsein gewisser Ebenen- und Punkten-Paare und dem in § 2 gegebenen Theoreme (A') folgt dann, dass jedem der 6 Complexe (also nicht nur $\lambda = a$) in jeder der 16 Ebenen ein Strahlbüschel angehört, dessen Mittelpunkt in einen der 16 Eckpunkte der Configuration fällt. Dabei erweist sich die Gruppirung dieser 6 . 16 Strahlbüschel als dieselbe, welche man für die Strahlbüschel der 6 zu der zweiten Kummer'schen Fläche gehörigen Congruenzen zweiter Ordnung und Classe kennt. Wir gingen davon aus, dass die eine dieser Congruenzen dem Complexe $\lambda = a$ angehört; *ich sage, dass die anderen fünf Congruenzen beziehungsweise in den Complexen* $\lambda = b, c, d, e, f$ *liegen.* In der That kann ein Complex zweiten Grades mit einer irreducibelen Congruenz zweiter Ordnung und Classe nicht 16 Strahlbüschel gemein haben, ohne die Congruenz ganz zu enthalten. Wir würden unsere „zweite" Kummer'sche

*) Der im Text gegebene Beweis wäre unnöthig, wenn man zeigen könnte (was vermuthlich nicht schwer ist), dass in der That jedes einer Kummer'schen Fläche gleichzeitig um- und ein-geschriebene Tetraeder ein ausgezeichnetes Tetraeder ist.

Fläche also ebensowohl haben gewinnen können, hätten wir nicht mit dem Complexe $\lambda = a$, sondern mit dem Complexe $\lambda = b$, oder $\lambda = c$ etc., begonnen. Mit anderen Worten (und dies ist der Rohn'sche Satz): *Die Complexe a, b, c, d, e, f sind für die Definition der zweiten Kummer'schen Fläche (oder auch der Configuration* $(16)_6$*) von durchaus gleicher Bedeutung.* —

Ich breche hier die elementaren Betrachtungen ab, obgleich ersichtlich ist, dass sich eine Menge von Fragen aufdrängen, welche einer directen (algebraisch-geometrischen) Behandlungsweise sehr wohl zugänglich sind*).

*) Herr Rohn hat sich früher, wie er mir mittheilt (und übrigens auch in Bd. 15 dieser Annalen, p. 350, andeutet), seinerseits mit solchen weitergehenden Fragen beschäftigt. Indem ich seine Ausdrucksweise den von mir gebrauchten Bezeichnungen anpasse, entnehme ich einem seiner Briefe das Folgende:

„Es seien die Complexe zweiten Grades, denen die Doppeltangentensysteme der zweiten Kummer'schen Fläche angehören sollen, d. h. die Constanten $\lambda = a, b, c, d, e, f$, gegeben; ich stelle die Aufgabe, die linearen Complexe zu bestimmen, welche die Doppeltangentensysteme enthalten, und überhaupt die Schaar von Complexen zweiten Grades anzugeben, deren Singularitätenfläche die zweite Kummer'sche Fläche ist. Ich will der Kürze halber $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ für $a, b, \ldots, f$ schreiben und die Producte

$$(\varkappa_1 - \lambda_m)(\varkappa_2 - \lambda_m)\cdots(\varkappa_6 - \lambda_m), \text{ bez. } (\varkappa_n - \lambda_1)(\varkappa_n - \lambda_2)\cdots(\varkappa_n - \lambda_6)$$

mit $f(\lambda_m)$ und $\varphi(\varkappa_n)$ bezeichnen. Ist dann, unter ϱ einen Proportionalitätsfactor verstanden:

$$\varrho\, a_{mn} = \sqrt{\frac{f(\lambda_m)\cdot\varphi(\varkappa_n)}{(\varkappa_n - \lambda_m)^2\cdot f'(\varkappa_n)\cdot\varphi'(\lambda_m)}}, \tag{1}$$

so sind die gesuchten linearen Complexe durch folgende Gleichungen gegeben:

$$z_\varkappa = a_{1\varkappa}x_1 + a_{2\varkappa}x_2 + \cdots + a_{6\varkappa}x_6 = 0. \tag{2}$$

Ich habe dabei die linken Seiten gleich so normirt, dass $\Sigma z_\varkappa^2 = 0$ wird vermöge $\Sigma x^2 = 0$. Man hat also eine orthogonale Substitution und die Auflösungen von (2) lauten mit Unterdrückung eines Proportionalitätsfactors:

$$x_i = a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \cdots + a_{i6}z_6. \tag{3}$$

Hierin liegt zugleich, dass die Vorzeichen der Quadratwurzeln in (1) nicht völlig willkürlich sind. Vielmehr wird man die Vorzeichen nur derjenigen a_{mn}, welche einem festen m oder einem festen n entsprechen, willkürlich annehmen dürfen, worauf alle anderen Vorzeichen fixirt sein werden. Es entspricht diess (mit Rücksicht auf den in (1) auftretenden Proportionalitätsfactor ϱ) dem Umstande, dass die vorgelegte Aufgabe $2^5 = 32$ Lösungen zulässt. — Die Schaar der Complexe zweiten Grades, deren Singularitätenfläche die zweite Kummer'sche Fläche ist, wird jetzt durch folgende Gleichung gegeben:

$$\sum \frac{z_\alpha^2}{\lambda_\alpha - \varkappa} = 0, \tag{4}$$

unter $\varkappa$ den Parameter verstanden. Vergleicht man diese Formel mit Gl. (2)

II. Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen $p = 2$.

§ 6.

Allgemeine Vorbemerkungen, die Theorie der hyperelliptischen Functionen betreffend.

Um die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen zweier Argumente U_1, U_2, oder vielmehr, um die Ausbreitung zweier Integralsummen U_1, U_2 auf der Kummer'schen Fläche (die allein bei der folgenden Darstellung in Betracht kommt) in völliger Deutlichkeit zu gewinnen, scheint es zweckmässig, einige allgemeine Bemerkungen zur Theorie der hyperelliptischen Integrale vom Geschlechte Zwei vorauszuschicken.

Die beiden Integrale, welche wir im Folgenden zu Grunde legen wollen, sind diese:

$$(5) \qquad w_1 = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \qquad w_2 = \int \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},$$

wo die Bezeichnung $f(\lambda)$, die wir schon gelegentlich benutzten, das Product $(\lambda - \varkappa_1)(\lambda - \varkappa_2) \cdots (\lambda - \varkappa_6)$ vertreten soll. Man betrachtet den Verlauf dieser Integrale gemeinhin — und so müssen wir es hier zunächst auch thun — auf der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche vom Geschlechte Zwei, die zu $\sqrt{f(\lambda)}$ gehört und deren Verzweigungspunkte bei $\lambda = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_6$ liegen. Es erscheint dann zweckmässig, die untere Grenze der Integrale in einen der Verzweigungspunkte zu legen, als welchen wir $\varkappa_6$ wählen wollen. Indem wir gleichzeitig die obere Grenze genau fixiren, wird das einzelne Integral durch folgende Formel gegeben sein:

$$(6) \qquad w = \int_{\varkappa_6}^{\lambda, \sqrt{f(\lambda)}} dw.$$

---

des Textes (welche die zur ersten Kummer'schen Fläche gehörigen Complexe vorstellt), so ist ersichtlich, *dass zwischen beiden Kummer'schen Flächen volle Gegenseitigkeit besteht.* Die Doppeltangenten der ersten Kummer'schen Fläche liegen also in den Complexen $\varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_6$ der Complexschaar (4). Dabei findet noch folgende Uebereinstimmung statt. Eine Linie, welche unsere erste Kummer'sche Fläche berührt, wird einem Complexe der ersten Schaar, sagen wir $\lambda = m$, als singuläre Linie angehören. Jetzt soll der Berührungspunkt insbesondere auf jene Berührungscurve achter Ordnung rücken, die den beiden Kummer'schen Flächen gemeinsam ist. Die Linie wird dann auch einem Complexe der zweiten, durch (4) gegebenen, Schaar als singuläre Linie angehören. Der Satz ist, dass dieser Complex durch $\varkappa = m$ gegeben ist, unter m dieselbe Grösse verstanden, wie vorhin."

Ich habe diese Formel der Kürze halber so geschrieben, dass nach Belieben 1 oder 2 als Index zugefügt werden kann, ein Verfahren, dessen ich mich weiterhin durchgängig bedienen will.

Es kommt jetzt darauf an, die Periodicitätsmoduln der so definirten Integrale in möglichst einfacher Weise zu bezeichnen. Zu dem Zwecke werde ich statt der vier Fundamentalperioden, aus denen sich alle anderen zusammensetzen, fünf Perioden einführen, zwischen denen natürlich eine lineare Abhängigkeit bestehen muss. Ich denke mir nämlich den Verzweigungspunkt x_6 mit den anderen Verzweigungspunkten $x_1, x_2, \ldots, x_5$ durch fünf in demselben Blatte der Riemann'schen Fläche verlaufende Linien, welche einander nur in x_6 treffen, verbunden und setze nun, indem ich an diesen Linien hinintegrire:

$$P^{(i)} = 2\int_{x_6}^{x_i} dw. \tag{7}$$

Was aber die Relation angeht, die zwischen den so definirten Perioden besteht, so findet man nach bekannter Methode:

$$\sum_{1}^{5} P^{(i)} = 0^{*}). \tag{8}$$

Die Grösse w ist durch die Formel (6) nur bis auf beliebig hinzufügbare ganzzahlige Multipla der Perioden $P^{(i)}$ bestimmt. Indem ich mit $\bar{w}$ einen der Werthe bezeichne, deren sie fähig ist, werde ich das Gesagte durch die Formel ausdrücken:

$$w \equiv \bar{w} \pmod{P^{(i)}}. \tag{9}$$

Sind die Werthe der w (d. h. von w_1 und w_2) gegeben, so ist nach der Theorie der hyperelliptischen Functionen die obere Grenze $\lambda, \sqrt{f(\lambda)}$ in (6) völlig bestimmt. Dass w_1, w_2 dabei nicht unabhängig sein können, sondern durch eine Relation verbunden sein müssen ($\Theta = 0$), ist selbstverständlich, aber soll hier nicht weiter untersucht werden, wie überhaupt von der Theorie der Θ-Functionen abgesehen werden wird. Solche Werthe w_1, w_2, die vermöge (6) zu einer oberen Grenze $\lambda, \sqrt{f(\lambda)}$ zugehören, nenne ich *einfache* Integrale. Bezeichnen wir mit $\bar{w}$ dieselben Grössen, wie in (9) und schreiben:

$$w \equiv -\bar{w} \pmod{P^{(i)}}, \tag{10}$$

so haben wir wieder einfache Integrale, die jetzt zur oberen Grenze $\lambda, -\sqrt{f(\lambda)}$ gehören. Wir berühren hiermit die charakteristische Eigen-

*) Will man die Symmetrie der später zu entwickelnden Formeln noch steigern, so empfiehlt es sich, noch eine sechste Periode $P^{(6)}$, mit der Relation $P^{(6)} = 0$, einzuführen, was ich hier nur beiläufig erwähne.

schaft des hyperelliptischen Gebildes, die im Folgenden immer wieder hervortritt, die Eigenschaft nämlich, durch eine Transformation von der Periode Zwei (die in dem Vorzeichenwechsel der Quadratwurzel $\sqrt{f(\lambda)}$, oder nach (10), des $\overline{w}$, ihren Ausdruck findet) in sich selbst überzugehen.

Die hiermit aufgezählten Sätze und die Anschauungsweisen, auf denen sie beruhen, sind wohlbekannt. Es scheint nun aber für den Fortschritt unserer Untersuchungen wesentlich und überhaupt für die Theorie der hyperelliptischen Functionen vortheilhaft, ein neues methodisches Hülfsmittel einzuführen. *Neben der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche nämlich, die zu $\sqrt{f(\lambda)}$ gehört, werden wir die andere Riemann'sche Fläche in Betracht ziehen, die durch Simultanstellung der fünf in der laufenden Proportion:*

$$\sqrt{\lambda - \varkappa_1} : \sqrt{\lambda - \varkappa_2} : \cdots : \sqrt{\lambda - \varkappa_6}$$

*vereinigten Wurzelfunctionen entsteht**). Es ist dies eine 32-blättrige Fläche ($32 = 2^5$), welche in der Art regulär verzweigt ist, dass bei $\lambda = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_6$ jedesmal 16 einfache Verzweigungspunkte über einander liegen, was im Ganzen 96 einfache Verzweigungspunkte und also $p = 17$ ergiebt. Wir müssen uns vorstellen, dass diese 32-blättrige Fläche 16-fach über die bisher betrachtete 2-blättrige Fläche ausgebreitet sei, so zwar, dass wir einem Punkte $\lambda, \sqrt{f(\lambda)}$ der letzteren unter den 32 Punkten der ersteren, welche dasselbe λ besitzen, etwa diejenigen 16 zuweisen, für welche $\sqrt{\lambda - \varkappa_1} \cdot \sqrt{\lambda - \varkappa_2} \cdots \sqrt{\lambda - \varkappa_6} = \sqrt{f(\lambda)}$ wird. Demselben Werthe von λ entsprechen auf der 32-blättrigen Fläche noch 16 weitere Punkte; sie correspondiren dann ihrerseits dem Punkte $\lambda, -\sqrt{f(\lambda)}$ der zweiblättrigen Fläche.

Wir werden jetzt die Integrale (5) auf der 32-blättrigen Fläche betrachten. Zu dem Zwecke müssen wir ihre oberen und unteren Grenzen wesentlich genauer bezeichnen, als es in (6) geschehen ist. Dem Werthe $\lambda = \varkappa_6$ entsprechen auf unserer neuen Fläche 16 Punkte, von denen wir einen herausheben, indem wir für die Verhältnisse:

$$\sqrt{\varkappa_6 - \varkappa_1} : \sqrt{\varkappa_6 - \varkappa_2} : \cdots : \sqrt{\varkappa_6 - \varkappa_5}$$

bestimmte Vorzeichen verabreden. Ich will dies in der Weise bezeichnen, dass ich $\sigma \sqrt{\varkappa_6 - \varkappa_i}$ als untere Grenze an das Integralzeichen schreibe, wo man sich das σ als einen Proportionalitätsfactor denken mag, dessen Werth völlig gleichgültig ist. Genau entsprechend werde

---

*) Wegen der hier im Texte gebrauchten Ausdrucksweisen siehe insbesondere Dyck: *Ueber Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen* im 17ten Bande dieser Annalen.

ich zur Bezeichnung der oberen Grenze die Schreibweise $\varrho\sqrt{\lambda - x_i}$ anwenden (wodurch also ausgedrückt sein soll, dass die Quotienten:

$$\sqrt{\lambda - x_1} : \sqrt{\lambda - x_2} : \cdots : \sqrt{\lambda - x_6}$$

vollständig, d. h. auch den Vorzeichen nach gegeben sind). An Stelle der Formel (6) tritt also jetzt die folgende:

$$w = \int_{\sigma\sqrt{x_6 - x_i}}^{\varrho\sqrt{\lambda - x_i}} dw. \tag{11}$$

Es sei nun wieder $\bar{w}$ einer der Werthe, die durch (11) definirt sind. Welches ist die allgemeinste Bedeutung von w? Wie modificirt sich dieselbe, wenn wir den oberen Grenzpunkt durch einen beliebigen der 16 oder 32 ersetzen, mit denen er zusammengehört? Und sind die so entstehenden Integralwerthe (d. h. die Werthe von w_1 und w_2) wiederum für den oberen Grenzpunkt charakteristisch? — Auf diese Fragen giebt die Theorie der hyperelliptischen Functionen folgende Auskunft:

1) Die Grösse w ist durch (11) bis auf *gerade* Periodenmultipla bestimmt, was wir, der Formel (9) entsprechend, in folgender Weise andeuten wollen:

$$w \equiv \bar{w} \pmod{2P^{(i)}}. \tag{12}$$

2) Wir wollen unter $\varepsilon^{(i)}$ die 1 oder die 0 verstehen, je nachdem beim Uebergange von dem anfänglich gewählten oberen Grenzpunkte zum neuen der Quotient $\sqrt{\lambda - x_i} : \sqrt{x_6 - x_i}$ sein Vorzeichen ändert, oder nicht. Die Integralwerthe, welche zur neuen oberen Grenze gehören, sind dann durch folgende Formel gegeben:

$$w \equiv (-1)^{\sum \varepsilon^{(i)}} \cdot \bar{w} + \sum \varepsilon^{(i)} P^{(i)} \pmod{2P^{(i)}}. \tag{13}$$

3) Die letzte Frage ist zu bejahen. Die Integralwerthe w_1, w_2, welche sich aus (11) für eine bestimmte obere Grenze ergeben, und die ich wieder als *einfache* Integrale bezeichnen werde, sind in der That zur Definition der oberen Grenze ausreichend.

§ 7.

Ueber elliptische Liniencoordinaten.

Ich werde nunmehr als Coordinaten einer Raumgeraden statt der bisher benutzten $x_1, x_2, \ldots, x_6$, welche an die Identität (1):

$$\sum x_i^2 = 0$$

gebunden sind, diejenigen Grössen λ', λ'', λ''', λ^{IV} einführen, die ich im fünften Annalenbande*) als *elliptische Liniencoordinaten* bezeichnete, und die durch die Gleichung (2):

$$\sum \frac{x_i^2}{u_i - \lambda} = 0$$

gegeben werden, indem man in ihr die x_i als bekannt, das λ als unbekannt betrachtet. Vor Allem bemerke ich, dass sich die x_i durch die λ folgendermassen darstellen:

$$\tau x_i = \frac{\sqrt{\lambda' - u_i} \cdot \sqrt{\lambda'' - u_i} \cdot \sqrt{\lambda''' - u_i} \cdot \sqrt{\lambda^{IV} - u_i}}{\sqrt{f'(u_i)}}, \tag{14}$$

wo τ einen Proportionalitätsfactor und f' den Differentialquotienten von f bedeutet. Die 32 Vorzeichenwechsel der $x_1 : x_2 : \ldots x_6$, welche für die geometrische Theorie in bekannter Weise fundamental sind, indem sie die 16 Collineationen und 16 Reciprocitäten vorstellen, durch welche unsere Gebilde in sich selbst übergeführt werden, erscheinen hier durch die Vorzeichenwechsel der rechter Hand auftretenden Quadratwurzeln bedingt. Ich erinnere übrigens an folgende Sätze:

1) Sind zwei λ einander gleich, z. B. $\lambda''' = \lambda^{IV}$, so hat man eine Tangente der Kummer'schen Fläche, zugleich eine singuläre Linie des Complexes $\lambda''' = \lambda^{IV}$.

2) Aendert man $\lambda''' = \lambda^{IV}$ (die fortwährend einander gleich sein sollen) beliebig, während λ', λ'' constant bleiben, so dreht sich die gerade Linie als Tangente der Kummer'schen Fläche innerhalb ihrer Tangentialebene um ihren Berührungspunkt.

3) Wird bei dem so definirten Aenderungsprocesse λ''' $(= \lambda^{IV})$ gleich λ' oder gleich λ'', so hat man eine der beiden in dem genannten Büschel enthaltenen Haupttangenten der Kummer'schen Fläche.

4) Nimmt man ausser $\lambda''' = \lambda^{IV}$ auch noch $\lambda' = \lambda''$, so hat man solche gerade Linien, welche entweder in einer der 16 Doppelebenen der Kummer'schen Fläche liegen oder durch einen ihrer 16 Doppelpunkte laufen.

An den letztangeführten Satz knüpfen wir jetzt noch eine Verabredung, die principiell wichtig ist. Indem wir in (14) $\lambda' = \lambda''$, $\lambda''' = \lambda^{IV}$ setzen, kommt:

$$\tau \cdot x_i^2 = \pm \frac{\lambda' - u_i \cdot \lambda''' - u_i}{\sqrt{f'(u_i)}}. \tag{15}$$

Die 32 hier zu unterscheidenden Vorzeichencombinationen werden wir wieder auf zwei Gruppen von je 16 vertheilen, je nachdem das Pro-

*) *Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen*, siehe insbesondere daselbst p. 293 ff.

duct der Vorzeichen positiv oder negativ ist.*) Es ist a priori deutlich, dass die Unterscheidung der beiden Gruppen der Unterscheidung der Doppelpunkte und Doppelebenen der Kummer'schen Fläche entspricht. Welche der Gruppen aber die Doppelpunkte bez. die Doppelebenen liefert, ist zunächst unentschieden, da wir weder für die Coordinaten x_i einen bestimmten Zusammenhang mit den Punktcoordinaten oder den Ebenencoordinaten festgesetzt haben, noch auch die Bedeutung der Quadratwurzeln $\sqrt{f'(\varkappa_i)}$ in absoluter Weise fixirt haben, was doch Beides geschehen sein müsste, sollte unsere Frage unzweideutig beantwortet werden können. Die Unbestimmtheit, die hier vorliegt, wollen wir nun durch eine Verabredung beseitigen, mit der wir unsere späteren Entwickelungen natürlich in Uebereinstimmung halten müssen: *wir wollen festsetzen, dass den Doppelpunkten eine gerade, den Doppelebenen eine ungerade Anzahl von Minuszeichen in* (15) *entsprechen soll.* Es giebt dann insbesondere einen Doppelpunkt, für welchen in (15) rechter Hand lauter gleiche Vorzeichen (Plus- oder Minuszeichen, was wegen des τ dasselbe ist) auftreten, und eine Doppelebene, für welche in (15) die ersten fünf Vorzeichen übereinstimmen und nur das Vorzeichen von x_6 von den anderen abweicht. Ersteren Punkt nennen wir den *Anfangspunkt* (der Kummer'schen Fläche), die Ebene die *Anfangsebene.* Die Anfangsebene läuft durch den Anfangspunkt und entspricht ihm im Complexe $x_6 = 0$.

Wir benutzen die Formeln (14) jetzt, um zwischen den Geraden des Raumes und den Punktquadrupeln der 32-blättrigen Riemann'schen Fläche ein Entsprechen herzustellen. Es seien den Werthen $\lambda = \lambda'$, λ'', λ''', λ^{IV} zugehörig vier Punkte der Riemann'schen Fläche gegeben, wobei also die Wurzelquotienten

$$\sqrt{\lambda' - \varkappa_1} : \sqrt{\lambda' - \varkappa_2} : \cdots \sqrt{\lambda' - \varkappa_6}$$

etc. in bestimmter Weise fixirt gedacht werden. Wir werden diese 4 Punkte einer zu denselben Werthen von λ', λ'', λ''', λ^{IV} gehörigen Raumgeraden (14) dann und nur dann entsprechend setzen, wenn die auf die 4 Punkte bezüglichen Producte

$$\begin{array}{l} \sqrt{\lambda' - \varkappa_1} \cdot \sqrt{\lambda'' - \varkappa_1} \cdot \sqrt{\lambda''' - \varkappa_1} \cdot \sqrt{\lambda^{IV} - \varkappa_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sqrt{\lambda' - \varkappa_6} \cdot \sqrt{\lambda'' - \varkappa_6} \cdot \sqrt{\lambda''' - \varkappa_6} \cdot \sqrt{\lambda^{IV} - \varkappa_6} \end{array}$$

den mit $\sqrt{f'(\varkappa_i)}$ bez. multiplicirten Coordinaten x_i der Raumgeraden

*) Bei Abzählung der Combinationen wolle man immer beachten, dass die x_i homogene Coordinaten sind und also nur ihre Verhältnisse in Betracht kommen, wie hier ein für allemal hervorgehoben sei.

proportional werden. Es entspricht hiernach jedem Punktquadrupel eine bestimmte Raumgerade, umgekehrt aber sind jeder Raumgeraden $32^3 = 2^{15}$ Punktquadrupel zugeordnet. In der That, wir können, um die gewünschte Uebereinstimmung zu erzielen, die Vorzeichen der Quadratwurzeln, die sich auf drei der Grössen λ, z. B. auf λ', λ'', λ''', beziehen, ganz beliebig nehmen, die zur vierten Grösse gehörigen Vorzeichen sind dann gerade bestimmt (wir können die 3 ersten Punkte des Quadrupels jeden in ein beliebiges der 32 Blätter der Riemann'schen Fläche legen, der vierte Punkt ist dann eindeutig gegeben). Ist insbesondere $\lambda''' = \lambda^{IV}$ (bei den Tangenten der Kummer'schen Fläche) oder $\lambda'' = \lambda''' = \lambda^{IV}$ (bei den Haupttangenten)*), so können wir zwei oder drei Punkte des Punktquadrupels zusammenfallen lassen, wobei sich dann die Zahl der zulässigen Punktquadrupel auf $32^2 = 2^{10}$, bez. auf $32 = 2^5$ reducirt. Ist $\lambda' = \lambda''$, und haben wir insbesondere eine Gerade, die durch den Anfangspunkt der Kummer'schen Fläche läuft, so können wir die Punkte der zugehörigen Quadrupel paarweise zusammenfallen lassen, worauf wieder nur $32 = 2^5$ Quadrupel zulässig erscheinen.

§ 8.

Transcendente Parameter einer Raumgeraden.

Es seien jetzt (indem wir eine früher gebrauchte Bezeichnung aufnehmen) $\varrho' \sqrt{\lambda' - x_i}$, $\varrho'' \sqrt{\lambda'' - x_i}$, $\varrho''' \sqrt{\lambda''' - x_i}$, $\varrho^{IV} \sqrt{\lambda^{IV} - x_i}$ die Punkte eines Punktquadrupels, das einer Raumgeraden zugeordnet ist. *Wir werden dann der betr. Raumgeraden vier Paare transcendenter Parameter* w_1', w_2'; w_1'', w_2''; *etc. beilegen, indem wir schreiben:*

$$(16)\quad w' = \int_{\sigma}^{\varrho' \sqrt{\lambda' - x_i}} \frac{dw}{\sqrt{x_s - x_i}}, \quad w'' = \int_{\sigma}^{\varrho'' \sqrt{\lambda'' - x_i}} \frac{dw}{\sqrt{x_s - x_i}}, \quad w''' = \int_{\sigma}^{\varrho''' \sqrt{\lambda''' - x_i}} \frac{dw}{\sqrt{x_s - x_i}}, \quad w^{IV} = \int_{\sigma}^{\varrho^{IV} \sqrt{\lambda^{IV} - x_i}} \frac{dw}{\sqrt{x_s - x_i}}.$$

*) Hält man λ' fest und lässt $\lambda'' = \lambda''' = \lambda^{IV}$ sich ändern, so umhüllt die betr. Haupttangente nach den Untersuchungen von Lie und mir eine Haupttangentencurve der Kummer'schen Fläche (siehe die Mittheilung in den Berliner Monatsberichten von 1870, die im 23. Bande dieser Annalen, p. 578 ff., wieder abgedruckt ist). Wir lassen jetzt der Haupttangente im Sinne des Textes ein Punktquadrupel der 32-blättrigen Fläche entsprechen, welches drei zusammenfallende Punkte besitzt. Die Haupttangentencurve erscheint dann, indem wir an dem Gesetze der Continuität festhalten, eindeutig auf unsere 32-blättrige Fläche bezogen, womit übereinstimmt, dass ihr Geschlecht früher (l. c., mit Hülfe der Plücker-Cayley'schen Formeln) zu $p = 17$ bestimmt wurde. Die 6 l. c. genannten ausgezeichneten Haupttangentencurven, welche nur $p = 5$ aufweisen, gehören eindeutig zu solchen 16-blättrigen Flächen über der λ-Ebene, welche bloss an 5 der 6 Stellen $x_1, x_2, \ldots x_6$ verzweigt sind und also $5 \cdot 8 = 40$ Verzweigungspunkte aufweisen. Es ist lehrreich, den Vergleich dieser verschiedenen Riemann'schen Flächen und der Haupttangentencurven ins Einzelne durchzuführen.

In genauer Analogie zu den Entwickelungen des § 6 fragen wir zunächst nach den allgemeinsten Grössensystemen w, welche in diesem Sinne einer Raumgeraden zugehören. Es sei wieder $\bar{w}'$, $\bar{w}''$, $\bar{w}'''$, $\bar{w}^{IV}$ ein erstes zulässiges Werthsystem. Dann folgt durch Vergleich von § 6 und § 7:

Die allgemeinsten Werthe w', w'', w''', w^{IV} sind modulo doppelter Perioden durch folgende Congruenzen definirt:

$$(17)\quad \begin{cases} w' \equiv \eta' \cdot \bar{w}' + \sum_1^4 \varepsilon_1^{(i)} P^{(i)}, \quad w'' \equiv \eta'' \cdot \bar{w}'' + \sum_1^4 \varepsilon_2^{(i)} P^{(i)}, \\ w''' \equiv \eta''' \cdot \bar{w}''' + \sum_1^4 \varepsilon_3^{(i)} P^{(i)}, \quad w^{IV} \equiv \eta^{IV} \cdot \bar{w}^{IV} + \sum_1^4 \varepsilon_4^{(i)} P^{(i)}, \end{cases}$$

wo die η die positive oder negative Einheit, die $\varepsilon_x^{(i)}$ Eins oder Null bedeuten und

$$\eta' \eta'' \eta''' \eta^{IV} = +1, \quad \varepsilon_1^{(i)} + \varepsilon_2^{(i)} + \varepsilon_3^{(i)} + \varepsilon_4^{(i)} \equiv 0 \pmod 2$$

zu setzen ist.

Die Unsymmetrie, welche wir in die Formulirung dieses Satzes einführten, indem wir die vorkommenden Summen von 1 bis 4 erstreckten, kann durch Heranziehen der Identität (8) sofort ausgeglichen werden.

Wir fragen ferner, wie sich die w abändern werden, wenn wir statt der anfänglichen Raumgeraden die anderen setzen, die sich aus ihr durch Vorzeichenwechsel der Coordinaten x_i ergeben. Es wird genügen, wenn wir angeben, wie wir in jedem Falle aus den anfänglichen $\bar{w}'$, $\bar{w}''$, $\bar{w}'''$, $\bar{w}^{IV}$ ein einzelnes zulässiges Parametersystem erhalten. Es wird ferner genügen, wenn wir bei den $\bar{w}'$, $\bar{w}''$, etc. nur diejenigen Modificationen angeben, welche dem Vorzeichenwechsel allein einer Coordinate x_i entsprechen: sollten mehrere x_i im Zeichen geändert werden, so combiniren wir einfach die den einzelnen Aenderungen entsprechenden Formeln. Wir recurriren wieder auf § 6 und § 7 und erhalten als Antwort auf unsere neuen Fragen den Satz:

Wird die Coordinate x_i der Raumgeraden in $-x_i$ abgeändert, so haben wir in (17) *für*

$$\bar{w}', \quad \bar{w}'', \quad \bar{w}''', \quad \bar{w}^{IV},$$

die folgenden Grössen einzuführen:

$$-\bar{w} + P^{(i)}, \quad -\bar{w}'' + P^{(i)}, \quad -\bar{w}''' + P^{(i)}, \quad -\bar{w}^{IV} + P^{(i)}.$$

Endlich constatiren wir, dass eine Raumgerade eindeutig bestimmt ist, sobald wir ein System zugehöriger transcendenter Parameter kennen. —

Wir betrachten jetzt insbesondere den Fall, dass unsere Raum-

gerade eine Tangente der Kummer'schen Fläche wird. Indem wir $\lambda''' = \lambda^{IV}$ nehmen, wollen wir den Punkt $\varrho''' \sqrt{\lambda''' - x_i}$ mit dem Punkte $\varrho^{IV} \sqrt{\lambda^{IV} - x_i}$ zusammenfallen lassen. Es wird dann $w''' \equiv w^{IV} (\text{mod. } 2P^{(i)})$. *Die Werthe w', w'' nun, welche unter dieser Voraussetzung resultiren, will ich in der Folge u', u'' nennen.* Die Formeln (17) nehmen, was die u', u'' angeht, eine äusserst einfache Bedeutung an. Es zeigt sich nämlich, dass die Aenderungen, welche man bei u', u'' unter Festhaltung der Raumgeraden (der Tangente an die Kummer'sche Fläche) anbringen kann, gerade darauf hinauslaufen, *dass man u', u'' entweder simultan im Zeichen umkehrt oder simultan um irgendwelche Periodenvielfache vermehrt.* — Handelt es sich insbesondere um gerade Linien, die durch einen Doppelpunkt der Kummer'schen Fläche laufen oder in einer Doppelebene derselben liegen, so wird

$$u' \equiv \pm u'' + \sum_1^4 \varepsilon^{(i)} P^{(i)} \text{ (mod. } P^{(i)}) \tag{18}$$

wo das Minuszeichen auf die Ebenen trifft und die $\varepsilon^{(i)}$ je nach der Wahl des Doppelpunktes oder der Doppelebene Null oder Eins bedeuten. Sämmtliche $\varepsilon^{(i)}$ werden Null sein, wenn es sich um den Anfangspunkt oder die Anfangsebene handelt.

§ 9.

Ausbreitung von Integralsummen auf der Kummer'schen Fläche.

Die letztangeführten Sätze sind es, auf die wir jetzt die Zuordnung der Punkte und Ebenen der Kummer'schen Fläche zu transcendenten Parametern, die sich als Summen (oder Differenzen) zweier einfacher hyperelliptischer Integrale darstellen, stützen wollen. Aus § 7 geht hervor, dass alle solche Tangenten der Kummer'schen Fläche, welche denselben Berührungspunkt und dieselbe Berührungsebene besitzen, dieselben Parameter u', u'' aufweisen (während $w''' = w^{IV}$ von einer Tangente zur anderen wechselt). Diese Parameter wollen wir jetzt auf den Punkt und die Ebene selbst übertragen. *Wir legen nämlich dem Punkte die Parameter:*

$$U_1 = u_1' - u_1'', \qquad U_2 = u_2' - u_2'', \tag{19a}$$

der Ebene die Parameter:

$$(U_1) = u_1' + u_2'', \qquad (U_2) = u_2' + u_2'' \tag{19b}$$

bei [die wir weiterhin mit Unterdrückung der Indices durch U und (U) bezeichnen wollen].

Offenbar gehören zu jedem Punkte unendlich viele Parameter-

paare, welche sich aus einem ersten Paare, welches wir $\overline{U}$ nennen, nach dem Gesetze ableiten:

$$U \equiv \pm \overline{U} \,(\text{mod. } 2P^{(0)}); \tag{20}$$

entsprechend ist es mit den Parametern (U) der Tangentialebenen. Aber ich sage, *dass rückwärts zu einem gegebenen Werthsysteme der* U_1, U_2 *(resp. der* $(U_1), (U_2)$*) immer nur ein Punkt, bez. eine Ebene der Kummer'schen Fläche zugehört.* Für Werthsysteme der U_1, U_2 (oder der $(U_1), (U_2)$), die von 0, 0 oder Multiplis der Perioden verschieden sind, ist dies aus den Untersuchungen über das Jacobi'sche Umkehrsystem sofort deutlich. Letztere zeigen nämlich, dass es in solchen Fällen (von möglicherweise zutretenden Perioden abgesehen) immer nur ein System einfacher Integrale u', u'' giebt, welche den Gleichungen (19a) oder den Gleichungen (19b) genügen, wodurch wir zu einem eindeutig definirten Tangentialbüschel der Kummer'schen Fläche und also zu einem bestimmten Punkte und einer bestimmten Ebene derselben geführt werden. Wenn aber U_1, U_2 oder $(U_1), (U_2)$ gleich 0, 0 oder gleich Multiplis von Perioden sind, so haben wir allerdings den sogenannten unbestimmten Fall des Umkehrproblems, und es giebt dann unendlich viele zugehörige Werthsysteme von u', u'' und also unendlich viele in Betracht kommende Tangentenbüschel der Kummer'schen Fläche. *Aber in Folge der in* § 7 *getroffenen Verabredung und auf Grund der in* (19a), *bez. in* (19b), *gewählten Zeichen, haben alle diese Büschel denselben Mittelpunkt, resp. dieselbe Ebene.* Es handelt sich nämlich um die unendlich vielen Tangentenbüschel, welche in einem Doppelpunkte der Kummerschen Fläche berühren, bez. in einer Doppelebene derselben liegen. In der That, sind beispielsweise in (19a) die U gleich $\Sigma \varepsilon^{(i)} P^{(i)}$, so hat man für die unendlich vielen zugehörigen Lösungen u', u'' die Relation:

$$u' = u'' + \Sigma \varepsilon^{(i)} P^{(i)},$$

und eben hierdurch sind nach § 8 (Schluss) die Raumgeraden charakterisirt, welche durch einen bestimmten Doppelpunkt der Kummer'schen Fläche laufen. Analog bei den Doppelebenen. — Man beachte insbesondere, dass der Anfangspunkt und die Anfangsebene der Kummer'schen Fläche die Argumentenpaare

$$U_1 = U_2 = 0, \qquad (U_1) = (U_2) = 0$$

erhalten (die natürlich noch vermöge (20) modificirt werden können).

Ich werde das Gesagte noch in etwas anderer Weise ausdrücken. Die unendlich vielen complexen Werthsysteme, deren die Variabeln U_1, U_2, bez. $(U_1), (U_2)$, fähig sind, erfüllen einen vierfach ausgedehnten Raum, der den Perioden $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, $P^{(4)}$ entsprechend in vierdimensionale Parallelepipeda zerlegt sein soll. Wir müssen $2^4 = 16$

der letzteren zusammenstellen, um ein Parallelepipedon von doppelter Kantenlänge (dessen Kanten also durch $2P^{(i)}$ gegeben sind) zu erhalten. Ein Parallelepipedon der letzteren Art mag nun in der Weise construirt werden, dass sein Mittelpunkt in $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ fällt, worauf wir dasselbe durch eine beliebige Diametralebene (d. h. durch einen linearen Raum von drei Dimensionen) halbiren. Es entsteht so ein Bereich, dessen Begrenzungspunkte theils durch die Operationen $U' = U + 2P^{(i)}$, theils durch die Transformation $U' = -U$ zusammengeordnet sind. Indem wir festsetzen, dass in dieser Weise zusammengehörige Punkte nur je einmal gezählt werden sollen, definiren wir, wenn ich diesen Ausdruck einer früheren Arbeit von mir entlehnen darf*), einen gewissen *Fundamentalbereich*, und nun ist die Sache die, *dass einerseits, durch* (19a), *die Punkte der Kummer'schen Fläche, andererseits, durch* (19b), *die Ebenen derselben ausnahmslos eindeutig auf die Elemente des Fundamentalbereichs bezogen sind.*

Was die Einzelheiten der hiermit gefundenen Parameterausbreitung angeht, so verweise ich insbesondere auf Hrn. Rohn's Dissertation**), wo dieselbe mit dem Verlaufe der Haupttangentencurven auf der Kummer'schen Fläche in Verbindung gebracht ist. Will man die 16 Punkte erhalten, die aus dem Punkte U vermöge der 16 Collineationen entstehen, die die Kummer'sche Fläche in sich selbst überführen, so hat man U in $U + \sum_1^4 \varepsilon^{(i)} P^{(i)}$ zu verwandeln. Will man dagegen die 16 Punkte aufsuchen, in denen die 16 Ebenen berühren, die aus dem Punkte U bei den 16 Reciprocitäten, die die Kummer'sche Fläche in sich überführen, hervorgehen, so hat man $U = u' - u''$ zu setzen und wird in $u' + u'' + \sum_1^4 \varepsilon^{(i)} P^{(i)}$ die Parameter der 16 Punkte haben. Die Ebenen selbst erhalten die Parameter $(U) = U + \Sigma \varepsilon^{(i)} P^{(i)}$. Insbesondere sind die Parameter U eines Punktes und (U) einer Ebene einander gleich, wenn Punkt und Ebene einander im Complexe $x_6 = 0$ entsprechen.

---

*) Vergl. Bd. 21 dieser Annalen, p. 149.

**) *Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche und ihren Zusammenhang mit den hyperelliptischen Functionen* $p = 2$ (München, Straub, 1878).

III. Configurationen bei der Kummer'schen Fläche, mit Hülfe der transcendenten Parameter behandelt.

§ 10.

Transcendente Parameter für diejenigen Punkte der Kummer'schen Fläche, die einer festen Tangentialebene angehören.

Um jetzt die Theorie der Configurationen der Behandlung vermittelst der transcendenten Parameter zugänglich zu machen, betrachten wir vorab den Umhüllungskegel vierter Classe, der von einem Punkte der Kummer'schen Fläche aus sich an letztere erstreckt, oder, was für die Ausdrucksweise bequemer ist, und übrigens auf dasselbe hinauskommt, die Curve vierter Ordnung, in welcher die Kummer'sche Fläche von einer ihrer Tangentialebenen geschnitten wird. Besagte Curve ist, wie selbstverständlich, eine hyperelliptische Curve vom Geschlechte Zwei, von der man leicht erkennt, *dass sie sich auf die zweiblättrige Fläche* $\lambda, \sqrt{f(\lambda)}$ *eindeutig beziehen lässt.* Ordnet man nämlich jeder Linie, die innerhalb der Ebene der Curve durch den Doppelpunkt derselben geht, als Parameter das λ desjenigen Complexes unserer Schaar (2) zu, dessen singuläre Linie sie ist, so treffen auf die sechs unter ihnen enthaltenen Doppeltangenten der Kummer'schen Fläche (auf die sechs Tangenten also, die sich vom Doppelpunkte an die Curve legen lassen) die Parameterwerthe $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_6$, wie bekannt. Um jetzt unsere Curve auf die zweiblättrige Fläche eindeutig zu beziehen, brauchen wir nur den beiden beweglichen (nicht in den Doppelpunkt fallenden) Schnittpunkten unserer Geraden λ mit der Curve vierter Ordnung beziehungsweise die beiden Punkten entsprechend zu setzen, die auf der Riemann'schen Fläche demselben Werthe von λ zugehören. Welchem der beiden Punkte wir dabei $+\sqrt{f(\lambda)}$, welchem $-\sqrt{f(\lambda)}$ zuweisen wollen, haben wir bei dem ersten Punktepaare, bei dem wir die Entscheidung treffen, willkürlich festzusetzen; für alle anderen Punktepaare ergiebt es sich dann durch analytische Fortsetzung. Es entspricht diese doppelte Möglichkeit der Zuordnung dem schon oben hervorgehobenen Satze, dass jedes hyperelliptische Gebilde sich durch eine Transformation von der Periode Zwei eindeutig auf sich selbst beziehen lässt. — Uebrigens ist der Parameter λ, den wir hier der um den Doppelpunkt der Curve drehbaren Linie beilegen, dieselbe Grösse, die wir oben (bei Einführung der elliptischen Liniencoordinaten) mit $\lambda''' = \lambda^{IV}$ bezeichnet haben; λ' und λ'' sind speciell die Parameter λ derjenigen beiden Linien, die unsere Curve vierter Ordnung im Doppelpunkte berühren (der im Büschel enthaltenen Haupttangenten der Kummer'schen Fläche). Die beiden Punkte unserer Curve vierter Ord-

nung, denen wir die Parameterwerthe $\lambda, \pm\sqrt{f(\lambda)}$ zuordnen, sind zugleich die Mittelpunkte der beiden Strahlbüschel, welche dem Complexe λ der Schaar (2) in unserer Ebene angehören.

Dies vorausgesetzt werden wir nun an unserer C_4 die Integrale (6):

$$w = \int_{z_1}^{\lambda_1 \sqrt{f(\lambda)}} dw$$

hinerstrecken. Jeder Punkt der C_4 enthält dann, *insofern er der C_4 angehört*, unendlich viele Parameterwerthe, die wir W_1, W_2 nennen wollen, und die sich aus einem ersten Paare, das $\overline{W}_1$, $\overline{W}_2$ heissen mag, durch Zufügen beliebiger Periodenmultipla ergeben:

$$W \equiv \overline{W} \text{ (mod. } P^{(6)}\text{).} \tag{21}$$

Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass die C_4 auf die zweiblättrige Fläche $\lambda, \sqrt{f(\lambda)}$ in bestimmter Weise bezogen sei. Führen wir hinterher die andere, ebenso zulässige Beziehungsweise ein, so erfahren die Parameter W_1, W_2 sämmtlicher Punkte einen simultanen Zeichenwechsel.

Es seien jetzt in dem hiermit definirten Sinne C_1', C_2' und C_1'', C_2'' transcendente Parameterpaare, welche denjenigen beiden Punkten unserer C_4 zukommen, die im Doppelpunkte derselben vereinigt sind. Ferner seien durch $W', W'', \ldots W^{(4n)}$ Parameterpaare bezeichnet, welche solchen $4n$ Punkten der C_n zugehören, in denen unsere C_4 von einer beliebigen C_n geschnitten wird. Wir haben dann nach dem Abel'schen Theoreme in bekannter Weise:

$$W' + W'' + \cdots W^{(4n)} \equiv n\,(C' + C'') \text{ (mod. } P^{(6)}\text{).} \tag{22}$$

Ich will hier insbesondere $n = 1$ nehmen. *Dann finden wir für die vier Schnittpunkte einer geraden Linie mit unserer C_4:*

$$W' + W'' + W''' + W^{IV} \equiv (C' + C'') \text{ (mod. } P^{(6)}\text{).} \tag{23}$$

Ich will andererseits, worauf ich später gelegentlich zurückkomme, $n = 2$ setzen, aber annehmen, dass $W^{(7)}$ und $W^{(8)}$ mit C' und C'' coincidiren, dass also der schneidende Kegelschnitt zur C_4 adjungirt sei. Dann kommt für die übrigen sechs Schnittpunkte unseres Kegelschnitts mit der C_4:

$$W' + W'' + \cdots + W^{(VI)} \equiv (C' + C'') \text{ (mod. } P^{(6)}\text{).} \tag{24}$$

Diese Gleichungen (23), (24) sind bekanntlich auch hinreichend, um ein vorgelegtes Punktsystem als Schnittpunktsystem der in Betracht kommenden Art zu charakterisiren. Was wir hier besonders beachten müssen, ist die Bedeutung der rechter Hand stehenden constanten Grössen. Es sind C' und C'' beide *einfache* Integrale (in dem früher definirten Sinne),

dazu im Allgemeinen (d. h. bei beliebig gelegter Tangentialebene) von einander verschieden. Die Summe $C' + C''$ ist also keineswegs, von particulären Fällen abgesehen, einem zweimal genommenen einfachen Integrale gleich, ein Satz, auf den wir uns später stützen müssen.

§ 11.

Fundamentalsätze über den Schnitt einer geraden Linie mit der Kummer'schen Fläche.

Wir knüpfen jetzt an Formel (23) an. Die gerade Linie, welche die Schnittpunkte W', W'', W''', W^{IV} verbindet, gehört, wie schon oben hervorgehoben wurde, den Complexen λ', λ'', λ''', λ^{IV} an. Wenn wir ihr also in früherer Weise Parameterpaare w', w'', w''', w^{IV} beilegen (Formel (16)), so werden, von Multiplis der Perioden $P^{(i)}$ abgesehen, Gleichungen der folgenden Art bestehen müssen:

$$w' = \pm W', \quad w'' = \pm W'', \quad w''' = \pm W''', \quad w^{IV} = \pm W^{IV},$$

wo uns inzwischen die Vorzeichen noch unbekannt sind. Indem wir in (23) eintragen, erhalten wir den vorläufigen Satz, dass eine gerade Linie (w', w'', w''', w^{IV}), die sich in einer Tangentialebene der Kummer'schen Fläche bewegt, die folgende Relation befriedigt:

$$\pm w' \pm w'' \pm w''' \pm w^{IV} \equiv \text{Const. (mod. } P^{(i)}). \tag{25a}$$

Hier sind die Vorzeichen linker Hand noch unbestimmt und ist Const. im Allgemeinen nicht gleich dem Doppelten eines einfachen Integrals.

Wir können diesen Satz sofort so präcisiren, dass wir schreiben:

$$\pm w' \pm w'' \pm w''' \pm w^{IV} \equiv \text{Const. (mod. } 2P^{(i)}), \tag{25b}$$

wo nun natürlich Const. modulo doppelter Perioden bestimmt gedacht werden muss, was aber die Bemerkung, die wir über die Natur von Const. gemacht haben, nicht modificirt. In der That ist, wie wir früher sahen, die auf der linken Seite von (25a) oder (25b) stehende Verbindung der w', w'', w''', w^{IV} für jede einzelne Raumgerade modulo doppelter Perioden definirt. Dann aber dürfen wir von (25a) sofort zu (25b) übergehen, da ja die Raumgeraden, von denen wir handeln, sich continuirlich an einander schliessen.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung der Vorzeichen. Dabei ist die erste Bemerkung, die wir machen, dass von einer absoluten Fixirung der Vorzeichen überhaupt nicht die Rede sein kann. Denn die Parameterpaare w', w'' etc., welche wir einer geraden Linie beilegten, waren selbst nur bis auf gewisse Abänderungen bestimmt: nach Formel (17) dürfen wir für w', w'', w''', w^{IV} nach Belieben $\pm w'$, $\pm w''$, $\pm w'''$, $\pm w^{IV}$ einführen, sofern wir nur an der einen Bedingung

festhalten, dass die Anzahl der Vorzeichenwechsel eine gerade sein muss.*) Alles also, was wir entscheiden können, ist dies: ob in (25a) resp. (25b) linker Hand eine *gerade* oder eine *ungerade* Anzahl von Minuszeichen richtig ist? Wir können gleich vermuthen, dass hier die Verabredung des § 7 zur Geltung kommt, und dies bestätigt sich in der That, indem wir zur Beantwortung unserer Frage nunmehr ein Beispiel heranziehen. In unserer Ebene liegt eine gerade Linie, welche zugleich der Anfangsebene angehört, für welche also nach unseren früheren Entwickelungen

$$w' = -w'', \quad w''' = w^{IV}$$

genommen werden kann. Combiniren wir nun diese Beziehungen mit irgend einem der acht Ausdrücke, in denen eine gerade Anzahl von Minuszeichen vorkommt:

$$\pm(w' + w'') \pm (w''' + w^{IV}),$$
$$\pm(w' - w'') \pm (w''' - w^{IV}),$$

so erhalten wir allemal das Doppelte eines einfachen Integrals, nämlich $\pm 2w'''$ oder $\pm 2w'$. Nun soll aber die in (25) auftretende Constante dem Doppelten eines einfachen Integrals gerade nicht gleich sein. Es bleibt also nichts anderes übrig, als dass wir linker Hand in (25) eine *ungerade* Anzahl von Minuszeichen in Anwendung bringen.

Ehe wir aus dem Gesagten weitere Consequenzen ziehen, wollen wir die in (25b) auftretende Constante in Beziehung zu den Parametern (U) setzen, die unserer Ebene als einer Tangentialebene der Kummer'schen Fläche nach Formel (19b) zukommen. Wir betrachten zu dem Zwecke unter den Linien der Ebene insbesondere diejenigen, die durch ihren Berührungspunkt laufen, und erinnern uns, dass nach § 8 für sie

$$w' = u', \quad w'' = u'', \quad w''' = w^{IV}$$

genommen werden kann. Ich trage diese Werthe von w in die acht Ausdrücke ein, die eine ungerade Anzahl von Minuszeichen haben:

$$\pm(w' + w'') \pm (w''' - w^{IV}),$$
$$\pm(w' - w'') \pm (w''' + w^{IV}).$$

Nur die ersten vier dieser Ausdrücke ergeben dann eine Summe, die von dem wechselnden $w''' = w^{IV}$ nicht mehr abhängt und also der in (25) auftretenden Constanten gleich sein kann. Wir finden so:

$$\text{Const.} = \pm(u' + u'') \ (\text{mod. } 2P^{(6)}).$$

*) Mit dieser Unbestimmtheit correspondirt die andere, dass die in (22) rechter Hand auftretende Constante $(C' + C'')$ ebenfalls nach Belieben im Vorzeichen geändert werden kann, da wir unsere Curve vierter Ordnung ja ebensowohl auf die eine als auf die andere Weise auf die zweiblättrige Fläche $\lambda, \sqrt{f(\lambda)}$ beziehen können.

Nun sind aber die Ausdrücke $(u' + u'')$ genau jene Parameter (U), die wir der Ebene als einer Tangentialebene der Kummer'schen Fläche beilegten. Diese (U) können selbst im Vorzeichen oder durch Hinzufügen doppelter Perioden beliebig abgeändert werden. Das Resultat ist daher einfach dieses: *dass wir Const. durch (U) selbst ersetzen können.*

Fassen wir zusammen, so haben wir einen Satz bewiesen, der für alles Folgende fundamental ist, und den ich als *Fundamentalsatz I* bezeichne (insofern ihm sogleich vermöge dualistischer Umkehr der Betrachtungen ein zweiter Fundamentalsatz an die Seite gestellt werden soll). Derselbe lautet:

Sind w', w'', w''', w^{IV} die Parameter einer geraden Linie, die in der Ebene (U) liegt, so wird, je nach der Wahl der w', w'', w''', w^{IV}, resp. der (U), eine der folgenden acht Congruenzen statt haben:

$$\left.\begin{array}{l} w' + w'' + w''' - w^{IV} \\ w' + w'' - w''' + w^{IV} \\ w' - w'' + w''' + w^{IV} \\ w' - w'' - w''' - w^{IV} \end{array}\right\} \equiv \pm (U) \ (\text{mod. } 2P^{(i)}). \tag{26}$$

Die Unbestimmtheit der Vorzeichen, welche hier zur Geltung kommt, findet nach anderer Seite ihre Erklärung darin, dass durch die gerade Linie w', w'', ... in der That 4 Tangentialeben der Kummer'schen Fläche hindurchgehen. Ich habe mit Rücksicht hierauf die acht Formeln (26) bereits auf vier Zeilen vertheilt. Wir können einfach sagen:

Die Parameter (U) derjenigen 4 Tangentialebenen der Kummer'schen Fläche, welche durch eine Raumgerade w', w'', w''', w^{IV} hindurchgehen, sind durch die Formeln (26) gegeben.

In der That sind sie durch diese Formeln so weit gegeben, als sie überhaupt bestimmt sind, nämlich bis auf die Vorzeichen und bis auf gerade Multipla der Perioden.

Ich wende mich sofort zum *Fundamentalsatze II.* Es ist nicht nöthig, dass ich alle die einzelnen Schritte, die wir bei der Aufstellung des ersten Fundamentalsatzes vollzogen haben, unter durchgängiger dualistischer Umkehr hier wiederhole. Vielmehr gebe ich sofort das Resultat an. Wir haben:

Geht eine Gerade w', w'', w''', w^{IV} durch einen Punkt U der Kummer'schen Fläche, so muss eine der acht Congruenzen statt haben:

$$\left.\begin{array}{l} w' - w'' - w''' + w^{IV} \\ w' - w'' + w''' - w^{IV} \\ w' + w'' - w''' - w^{IV} \\ w' + w'' + w''' + w^{IV} \end{array}\right\} \equiv \pm U \ (\text{mod. } 2P^{(i)}). \tag{27}$$

Umgekehrt berechnet man aus diesen Gleichungen die Parameter U der 4 Punkte, in denen eine Gerade w', w'', ... die Kummer'sche Fläche schneidet.

Ich will unter den Folgerungen, die sich an unsere Fundamentalsätze knüpfen, nur einige wenige hervorheben.*)

1) Es sei $w''' = w^{IV}$, die gerade Linie also eine singuläre Linie des Complexes $\lambda''' = \lambda^{IV}$. Wir haben dann als Parameter des Berührungspunktes der ursprünglichen Definition dieser Parameter zufolge:

$$\pm U = w' - w'' \text{ (mod. } 2P^{(i)}).$$

Formel (27) giebt jetzt für die beiden anderen Schnittpunkte

$$\pm U = w' + w'' \pm 2w''' \text{ (mod. } 2P^{(i)}).$$

Nun sind aber die $w' + w''$, ebenfalls zufolge der ursprünglichen Definition, gleich den Parametern (U) der Tangentialebene, die zu unserer singulären Linie gehört, während die beiden vom Berührungspunkte verschiedenen Punkte, in denen unsere singuläre Linie der Kummer'schen Fläche begegnet, diejenigen Punkte sind, welche der genannten Ebene in dem Complexe λ''' als Büschelmittelpunkte entsprechen. Wir haben also folgenden Satz (in welchem ich λ statt λ''' geschrieben habe):

Die Mittelpunkte der beiden Strahlbüschel, die einem Complexe λ in einer Ebene (U) angehören, sind durch folgende Formel gegeben:

$$\pm U = (U) \pm 2\int_{x_0}^{\lambda, \sqrt{f(\lambda)}} dw \text{ (mod. } 2P^{(i)}). \tag{28}$$

Dabei erinnere man sich, dass dieselben beiden Punkte als Punkte der in der Ebene enthaltenen Curve vierter Ordnung nach § 10 die folgenden Parameter erhielten:

$$W = \pm\int_{x_0}^{\lambda, \sqrt{f(\lambda}} dw \text{ (mod. } P^{(i)}),$$

wobei wir noch willkürlich festsetzen können, ob das $+$ oder das $-$ Zeichen dem in (28) auftretenden $+$ Zeichen entsprechen soll.

2) Wir haben hiermit das Mittel gewonnen, um *conjugirte Punkte und Ebenen* durch ihre transcendenten Parameter zu charakterisiren. Unter w', w'' einfache Integrale verstanden, die den oberen Grenzen λ', λ'' zugehören, betrachte man folgende Ebenen:

---

*) Vgl. hier überall Rohn in Bd. 15 der Annalen, p. 249 ff. Die von mir gegebene Darstellung weicht von der Rohn'schen einmal durch die bindenden Verabredungen betreffs der Vorzeichen, dann aber dadurch ab, dass ich immer neben den Parametern U der Punkte der Kummer'schen Fläche die Parameter (U) ihrer Ebenen in Anwendung bringe.

(29a) $$(U), \qquad (U) + 2w' + 2w''$$

und zugleich die Punkte:

(29b) $$(U) + 2w', \quad (U) + 2w''.$$

Aus (28) ergiebt sich dann sofort, dass beide Punkte der Ebene (U) in den Complexen λ', λ'' und der Ebene $(U) + 2w' + 2w''$ in den Complexen λ'', λ' zugeordnet sind. Dies aber heisst sofort, dass Ebenen und Punkte im allgemeinsten Sinne conjugirt sind (Theorem (A) des § 2). Also:

Conjugirte Ebenen und Punkte werden durch die Formeln (29) *geliefert.*

3) Ich will zum Schluss noch eine gerade Linie betrachten, welche durch den Anfangspunkt der Kummer'schen Fläche läuft. Für sie kann $w' = w''$, $w''' = w^{IV}$ genommen werden und wir erhalten dann für die weiteren beiden Schnittpunkte, die sie mit der Kummer'schen Fläche gemein hat, nach (27):

(30) $$\pm U = 2(w' + w'''), \quad \text{bez.} \quad \pm U = 2(w' - w''').$$

Ich werde weiter unten dieses Resultat benutzen und bemerke hier nur, dass durch diese Formeln eine elementare Methode indicirt ist, um die Parameter U der Punkte der Kummer'schen Fläche einzuführen, indem man die Punkte den durch sie gehenden Linien zuordnet, welche durch den Anfangspunkt laufen, die Parameterpaare λ', λ''' bestimmt, die einer solchen Linie zukommen, etc.*)

§ 12.

Transcendente Darstellung der früher untersuchten Configurationen.

Aus den nunmehr formulirten Sätzen können wir jetzt die früheren Theoreme über Configurationen, welche der Kummer'schen Fläche gleichzeitig eingeschrieben und umgeschrieben sind, mit leichter Mühe wiedergewinnen.

Es seien K_1, K_2 irgend zwei Constante, a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 einfache Integrale. Wir betrachten die vier Punkte der Kummer'schen Fläche:

(31a) $$\pm U \equiv \begin{cases} K - a - b - c, \\ K - a + b + c, \\ K + a - b + c, \\ K + a + b - c, \end{cases} \quad (\text{mod. } 2P^{(0)})$$

und die vier Tangentialebenen derselben:

*) Es ist dies im Wesentlichen diejenige Methode, welche Hr. Darboux im 92. Bande der Comptes Rendus, p. 1493—1495, entwickelt.

$$(31\,b)\qquad \pm(U) \equiv \begin{cases} K+a+b+c, \\ K+a-b-c, \\ K-a+b-c, \\ K-a-b+c. \end{cases} \pmod{2(P^{(6)})}.$$

Offenbar liegt, nach Formel (28), der an i^{ter} Stelle angeführte Punkt je in denjenigen drei Ebenen (31 b), die *nicht* an der i^{ten} Stelle stehen, und entspricht in jeder dieser Ebenen als Büschelmittelpunkt bez. einem der drei Complexe a, b, oder c*). Gleichzeitig sind, nach (29), je zwei Punkte mit den beiden durch sie gemeinsam hindurchgehenden Ebenen conjugirt. *Dies aber ist die ganze Theorie der früher als „ausgezeichnet" benannten fünffach unendlich vielen Tetraeder.* Die Zahl Fünf resultirt dabei aus den drei Paaren einfacher Integrale (a, b und c) und den beiden unabhängigen Constanten K_1, K_2.

2) Nicht minder einfach ist die Darstellung der Configurationen $(16)_6$**). Es seien a, b, c, d, e, f die Bezeichnungen für sechs Paare einfacher Integrale, und es mögen ε', ε'', ε''', ε^{IV} nach Belieben die positive oder negative Einheit bedeuten. *Dann werden die* 16 *Ecken und* 16 *Ebenen unserer sechsfach unendlich vielen Configurationen durch die Formeln gegeben sein:*

$$(32)\qquad \begin{aligned} \pm U &\equiv a+\varepsilon b+\varepsilon' c+\varepsilon'' d+\varepsilon''' e-\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon''' f, \\ \pm(U) &\equiv a+\varepsilon b+\varepsilon' c+\varepsilon'' d+\varepsilon''' e+\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon''' f, \end{aligned} \pmod{2P^{(6)}}$$

wo die zugehörigen sechs Complexe zweiten Grades direct durch a, b, c, d, e, f bestimmt sind.

Beispielsweise liegen in der Ebene:

$$(U) \equiv a+b+c+d+e+f,$$

und zwar den sechs Complexen a, b, c, d, e, f entsprechend, die sechs Punkte:

$$\begin{aligned} &-a+b+c+d+e+f, \\ &+a-b+c+d+e+f, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Als Punkte der C_4, welche von der Ebene aus der Kummer'schen Fläche ausgeschnitten wird, erhalten diese Punkte die transcendenten Parameter:

$$W \equiv a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \pmod{P^{(4)}},$$

deren Summe dem Parameter (U) der Ebene selbst gleich ist. Hierin liegt unmittelbar, nach Formel (24), dass unsere sechs Punkte aus

---

*) Ich benutze hier die zu den Parametern λ der Complexe gehörigen einfachen Integrale kurzweg zur Benennung der Complexe selbst.

**) Vergl. wieder Rohn l. c.

der C_4 von einem Kegelschnitte ausgeschnitten werden, der zur C_4 adjungirt ist, etc. etc. — Man beachte noch, dass durch Angabe der Complexe $a, b, c, \ldots$ die einfachen Integrale $\pm a, \pm b, \pm c, \ldots$ nur modulo einfacher Perioden bestimmt sind. Wir erhalten also aus einer ersten zu den genannten Complexen gehörigen Configuration $(16)_6$, die durch (32) gegeben sein mag, im Ganzen 16 gleichberechtigte, die aus (32) hervorgehen, indem man sämmtliche U und (U) um dieselbe Combination einfacher Perioden vermehrt. Von diesen 16 Configurationen war schon oben in der Anmerkung zu § 5 die Rede. — Dass man unter den Punkten und Ebenen (32) die Ecken und Seitenflächen von 80 ausgezeichneten Tetraedern, dem Schema (31) entsprechend, herausgreifen kann, liegt unmittelbar auf der Hand. —

Die hiermit gewonnene Darstellung unserer früheren Configurationen ist so einfach, dass wir sofort allgemeinere Configurationen derselben Art construiren können. Einmal werden wir, indem wir die Formeln (31) mit den (32) vergleichen, auch letzteren additive Constante K willkürlich zufügen wollen, andererseits aber statt der 3 Paare einfacher Integrale von (31) und der 6 Paare von (32) deren überhaupt eine beliebige Zahl, sagen wir ν, ins Auge fassen. Indem wir diese Integrale der besseren Uebersicht halber mit $w', w'', \ldots$ bezeichnen, erhalten wir so *Aggregate von $2^{\nu-1}$ Punkten und $2^{\nu-1}$ Ebenen der Kummer'schen Fläche, die durch folgende Formeln definirt sind:*

$$(33)\quad \begin{cases} \pm U \equiv \varepsilon' w' + \varepsilon'' w'' + \cdots + \varepsilon^{(\nu-1)} \cdot w^{(\nu-1)} - \prod_{i=1}^{\nu-1} \varepsilon^{(i)} \cdot w^{(\nu)} + K \\ \qquad\qquad (\text{mod. } 2P^{(i)}), \\ \pm (U) \equiv \varepsilon' w' + \varepsilon'' w'' + \cdots + \varepsilon^{(\nu-1)} \cdot w^{(\nu-1)} + \prod_{i=1}^{\nu-1} \varepsilon^{(i)} \cdot w^{(\nu)} + K \\ \qquad\qquad (\text{mod. } 2P^{(i)}). \end{cases}$$

Es ist nicht meine Absicht, die Theorie der sich solchergestalt darbietenden Configurationen, zu der übrigens im Vorangehenden alle Mittel gegeben sind, eingehender zu verfolgen. Vielmehr möchte ich hier neben ihnen noch allgemeinere Constructionen in Betracht ziehen, die entstehen, indem wir die Argumente U eines Punktes oder (U) einer Ebene um *beliebig* gegebene Constante $C, C', C'', \ldots$ vermehren. Wenn man die hyperelliptischen Functionen den elliptischen parallelisirt, so entsprechen unsere neuen Constructionen unmittelbar den wohlbekannten Polygonen von Poncelet, die sich auf Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schaar beziehen*).

*) Verallgemeinerungen der Poncelet'schen Sätze, welche durch Einführung hyperelliptischer Functionen vom Geschlechte Zwei an Stelle der elliptischen Functionen entstehen, sind auch jene Theoreme über geradlinige beim Flächen-

§ 13.

Das Additionsproblem der transcendenten Parameter.

Die Elementaraufgabe, mit der wir uns jetzt zunächst beschäftigen müssen, verlangt, *aus einem Punkte U der Kummer'schen Fläche, bez. aus einer Ebene (U) derselben allgemein den Punkt oder die Ebene zu construiren, welche durch die Formel:*

$$U' = U + C, \quad \textit{resp.} \quad (U') = (U) + C \tag{34}$$

definirt sind.

Constatiren wir zunächst, dass die Aufgaben, welche hier einander dualistisch coordinirt erscheinen, in der That untrennbar mit einander verbunden sind. Sind nämlich irgend welche Punkte U in einer Ebene (U) gelegen, so werden die Punkte $U+C$ in der Ebene $(U)+C$ enthalten sein. In der That ist ja die Bedingung für die vereinigte Lage von Punkt und Ebene nach unseren früheren Entwickelungen die, dass die Differenz der betreffenden transcendenten Parameter gleich dem Doppelten eines einfachen Integrales ist, — und diese Differenz wird durch Einfügen der Constante C nicht geändert.

Bemerken wir ferner, dass unsere Aufgabe im Allgemeinen *zwei*, untrennbar mit einander verbundene Lösungen besitzt. Wir verstehen dies am besten, wenn wir uns dessen erinnern, was in § 9 über die Beziehung der Punkte der Kummer'schen Fläche auf das 16-fache Periodenparallelepiped des Raumes der U gesagt wurde*). Wenn wir solche Werthsysteme der U, die sich um doppelte Perioden unterscheiden, als gleichwerthig erachten, so wird durch (34) einem jeden Werthe von C entsprechend eine *eindeutige* Transformation des Periodenparallelepides in sich selbst vorgestellt. Aber für die Kummer'sche Fläche wird dieselbe im Allgemeinen zweideutig. In der That, dem einzelnen Punkte der Kummer'schen Fläche entspricht ebensowohl die

---

büschel zweiter Ordnung auftretende Polygone, die neuerdings Herr Staude im 22ten Bande dieser Annalen systematisch untersucht hat. In seiner Dissertation (*Ueber die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyperelliptische Functionen*, Leipzig 1885, siehe auch Grunerts Archiv, Neue Serie, Theil 2) hat nun Herr Domsch die betreffenden Polygone durch einen directen geometrischen Uebertragungsprocess mit Schliessungssätzen für die Kummer'sche Fläche, bez. für die zugehörigen Complexe zweiten Grades, in Verbindung gebracht. Die von Herrn Domsch benutzten Constructionen sind indess minder einfach, als die von mir im Texte abzuleitenden, und scheinen dementsprechend einem weiteren Gebiete als specielle Fälle anzugehören; ich begnüge mich also hier, beiläufig auf dieselben verwiesen zu haben.

*) Ich lasse der Einfachheit halber im Texte die Ebenen (U) bei Seite, wie ich auch im Folgenden immer nur entweder die Punkte oder die Ebenen bei den Constructionen betrachte, wie es gerade am bequemsten scheint.

Stelle $+ U$ als die Stelle $- U$ des Parallelepipeds, und wir müssen ihm also ebensowohl den Punkt $U + C$ als den Punkt $- U + C$, oder, was dasselbe ist, den Punkt $U - C$, entsprechend setzen. Diese beiden Punkte aber fallen nur dann zusammen, wenn entweder C gleich einer ganzzahligen Verbindung der Perioden ist (wo wir dann zu den 16 Collineationen geführt werden, die die Kummer'sche Fläche in sich transformiren) oder wenn U einer solchen Verbindung gleich ist, wir also einen Doppelpunkt der Fläche herausgegriffen haben.

Wir können das Gesagte auch so ausdrücken: *Unsere Aufgabe bleibt ungeändert, wenn wir die Constante C im Vorzeichen umkehren.* Dass sie ebenfalls ungeändert bleibt, wenn wir C um beliebige gerade Multipla der Perioden vermehren, braucht kaum hervorgehoben zu werden.

Was nun die constructive Behandlung unserer Aufgabe angeht, so sind alle Mittel dazu in § 11, insbesondere in den Formeln (26), (27) daselbst enthalten. Ich will hier insbesondere von den Ebenen (26) sprechen. Nehmen wir irgend zwei derselben, z. B.

$$w' + w'' - w''' - w^{IV}$$

und

$$w' + w'' + w''' + w^{IV},$$

und bezeichnen die erste mit (U), die zweite mit $(U) + C$, so wird $C = 2(w''' + w^{IV})$, eine Gleichung, die sich bei beliebig gegebenem C befriedigen lässt. Es kommt also nur darauf an, den Zusammenhang zwischen den beiden in Betracht genommenen Ebenen in Form einer Constructionsvorschrift auszusprechen. Ich kann dies bei der Einfachheit der Sache ohne weitere Zwischenbetrachtungen ausführen. Wir verfahren folgendermassen:

Vor allen Dingen setzen wir

$$C \equiv 2\left(\int_{x_0}^{\lambda''', \sqrt{f(\lambda''')}} dw + \int_{x_0}^{\lambda^{IV}, \sqrt{f(\lambda^{IV})}} dw\right) \quad (\text{mod. } 2P^{(6)})$$

was uns λ''', λ^{IV} und die zugehörigen Quadratwurzeln $\sqrt{f(\lambda''')}$, $\sqrt{f(\lambda^{IV})}$ eindeutig bestimmt, — sofern wir von dem nicht in Betracht kommenden Ausnahmefalle absehen, dass C_1, $C_2 \equiv 0, 0$ (mod. $2P^{(6)}$) ist. Wir denken uns dann die Durchschnittscurve der Ebene (U) mit der Kummer'schen Fläche gezeichnet und suchen auf ihr die beiden Punkte, welche den Complexen λ''', λ^{IV} in der Art zugehören, wie es durch die Vorzeichen der mitbestimmten $\sqrt{f(\lambda''')}$, $\sqrt{f(\lambda^{IV})}$ verlangt wird. *Hier ist es nun, wo die Zweideutigkeit der Construction Platz greift.* Wie wir immer wieder betonten, kann unsere C_4 auf die fundamentale zweiblättrige Riemann'sche Fläche auf zwei Weisen bezogen werden.

Bezeichnen wir mit p''', p^{IV} die beiden Punkte unserer C_4, welche bei Anwendung der einen Beziehungsweise resultiren, so sind mit ihnen die anderen beiden Punkte, die bez. mit ihnen auf denselben durch den Doppelpunkt der C_4 laufenden geraden Linien liegen und die ich π''', π^{IV} resp. nennen will, gleichberechtigt. Wir verbinden jetzt p''', p^{IV} und ebenso π''', π^{IV} durch eine Gerade. *Wir werden die Ebenen* $(U) \pm C$ *bekommen, indem wir durch jede dieser Geraden diejenige Ebene hindurchlegen, welche zu* (U) *und zu* p''', p^{IV}, *bez. zu* π''', π^{IV}, *conjugirt ist.*

Wir fügen dem Gesagten noch folgende Bemerkung hinzu. Haben wir eine der beiden in Rede stehenden Ebenen gewählt, z. B. diejenige, die durch p''' und p^{IV} geht, so folgt, dass in ihr p''' und p^{IV} den Wurzeln $-\sqrt{f(\lambda''')}$ und $-\sqrt{f(\lambda^{IV})}$ zugeordnet werden müssen, womit die Beziehung der in der neuen Ebene enthaltenen Durchschnittscurve vierter Ordnung zur fundamentalen Riemann'schen Fläche festgelegt (sogar überbestimmt) ist. Handelt es sich also jetzt darum, aus der Ebene $(U) + C$ weitergehend eine neue Ebene $(U) + C + C'$ zu construiren (wo die C' irgend wie gegeben sein sollen), so ist dies eine Aufgabe, welche nur *eine* Lösung zulässt.

§ 14.

Verschiedene Polygonconstructionen.

Es giebt zweierlei Weisen, um durch Wiederholung der Additionsoperation des vorigen Paragraphen *geschlossene* Serien von Punkten (oder Ebenen) zu gewinnen. Entweder wir addiren zu einem anfänglichen Elemente solche Constante C, C', C'', ... zu, deren Summe unmittelbar verschwindet, oder aber, wir wählen C, C', C'', ... derart, dass ihre Summe gleich einem geraden Periodenvielfachen ist. Einen besonders einfachen Fall der ersten Art haben wir, wenn wir nach vorgängiger Addition beliebiger Grössen C, C', ... hinterher dieselben Grössen C, C', ... wieder subtrahiren. Wenn wir dabei die Reihenfolge der Summanden und Minoren noch beliebig permutiren, so bekommen wir Aggregate von Punkten oder Ebenen, deren Beziehung zu den früher betrachteten Configurationen auf der Hand liegt. Einen besonders einfachen Fall der zweiten Art bekommen wir, wenn wir C, C', ... einander gleich nehmen. Wir betrachten also etwa die Serie der Punkte

$$\cdots U - 2C, \quad U - C, \quad U, \quad U + C, \quad U + 2C, \cdots$$

Ist

$$C = 2 \cdot \frac{a_1 P^{(1)} + a_2 P^{(2)} + a_3 P^{(3)} + a_4 P^{(4)}}{n}, \tag{35}$$

(*wo* a_1, a_2, a_3, a_4 *vier ganze Zahlen vorstellen sollen, die mit der gleich-*

falls ganzen Zahl n keinen Factor gemein haben), *so wird unsere Punktreihe mit n Punkten abgeschlossen sein und zwar unabhängig von der Wahl des Ausgangspunktes**); *ist C nicht in solcher Form darstellbar, so kann sich die Punktreihe niemals schliessen.* Ich will n insbesondere (um Einzeldiscussionen zu entgehen, die hier zunächst kein Interesse haben) als ungerade Primzahl voraussetzen. Dann sind in der Formel (35) $[n^4 - 1]$ wesentlich verschiedene Werthe von C enthalten. Indem C und $-C$ immer gleichzeitig bei der Construction der einzelnen Punktreihe in Betracht kommen, erhalten wir im Ganzen $\frac{n^4-1}{2}$ verschiedene Serien. Aber jedesmal $\frac{n-1}{2}$ derselben enthalten dieselben Punkte. Denn ich werde, von U ausgehend, in allerdings veränderter Reihenfolge jeweils dieselben Elemente erhalten, wenn ich statt des anfänglich gewählten C das Doppelte, $2C$, oder das Dreifache, $3C$, etc. in Anwendung bringe. Die Anzahl der verschiedenen hier resultirenden Punktaggregate ist also $(n^4-1):(n-1) = n^3 + n^2 + n + 1$, gleich der Zahl der unterschiedenen Transformationen n^{ter} Ordnung. Es scheint vom geometrischen Standpunkte aus interessant, die sämmtlichen $n^4 - 1$ Punkte, welche durch

$$U + 2\,\frac{a_1 P^{(1)} + a_2 P^{(2)} + a_3 P^{(3)} + a_4 P^{(4)}}{n}$$

gegeben sind, mit dem Pnnkte U zu einer Figur zu vereinigen. —

§ 15.

Ueber eindeutige Transformationen der Kummer'schen Fläche in sich selbst.

Ich wünsche hier noch eine letzte Frage zu berühren. Wir kennen von früher her 32 eindeutige Transformationen der Kummer'schen Fläche in sich selbst: die oft genannten 16 Collineationen und 16 Reciprocitäten. Erstere erhält man, wenn man (um nur von den Punkten der Kummer'schen Fläche zu reden) $U' = U + \sum_1^4 \varepsilon^{(i)} P^{(i)}$ setzt, wo die $\varepsilon^{(i)}$ nach Belieben 0 oder 1 bedeuten, letztere, indem man $U = u' - u''$ nimmt und dann $U' = u' + u'' + \sum_1^4 \varepsilon^{(i)} P^{(i)}$ sein lässt. Hierüber hinaus erkennt man auf geometrischem Wege die

*) Sollte sich unter den Punkten unserer Reihe ein Doppelpunkt der Kummer'schen Fläche befinden, so muss unsere Behauptung in leicht erkennbarer Weise modificirt werden.

Existenz noch weiterer 32 eindeutiger Transformationen. Dieselben setzen solche zwei Punkte der Kummer'schen Fläche einander entsprechend, die entweder ihre Verbindungslinie durch einen der 16 Doppelpunkte der Fläche schicken oder deren Tangentialebenen sich in einer geraden Linie kreuzen, die einer der 16 Doppelebenen angehört. Die 32 neuen Transformationen erwachsen offenbar, indem man auf eine derselben die 32 Transformationen der ersten Art (die Collineationen und Reciprocitäten) anwendet. Es wird also genügen, wenn wir nur eine der neuen Transformationen analytisch darstellen. Dies aber wird durch Formel (30) geleistet. Dieselbe besagt, dass die Parameter solcher zwei Punkte, deren Verbindungslinie durch den Anfangspunkt der Kummer'schen Fläche geht, sich in der Form

$$2(w' + w'') \quad \text{und} \quad 2(w' - w'')$$

darstellen, unter w', w'' einfache Integrale verstanden. Um also zu einem Punkte U den in der betreffenden Transformation entsprechenden U' zu finden, hat man einfach $U = 2(w' + w'')$ zu setzen und dann $U' = 2(w' - w'')$ zu nehmen. *Es ist die Frage, ob mit den 64 eindeutigen Transformationen, welche wir sonach kennen, die sämmtlichen eindeutigen Transformationen der Kummer'schen Fläche in sich selbst erschöpft sind.*

Leipzig, den 28. September 1885.

Sur les racines de certaines équations.

Par

A. Markoff à St. Pétersbourg.

Les équations, dont nous allons parler, se rattachent au développement en fraction continue de la fonction suivante

$$F(z) = \int_a^b \frac{g(y)}{z-y}\,dy - \xi \int_c^d \frac{f(y)}{z-y}\,dy . \tag{1}$$

Nous supposons ici les nombres a, b, c, d et le paramètre variable ξ réels, les différences $b-a$, $c-b$, $d-c$ et les fonctions $g(y)$, $f(y)$ positives (au moins pour $a < y < b$ et pour $c < y < d$).

Posons en général

$$\int_a^b y^i g(y)\,dy = \alpha_i, \quad \int_c^d y^i f(y)\,dy = \beta_i . \tag{2}$$

Soit maintenant $\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$ une des fractions convergentes de la fonction $F(z)$ et

$$\varphi_n(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots + p_n z^n . \tag{3}$$

On aura le système des équations du premier degré

$$(4)^*) \quad \begin{cases} p_0(\alpha_0 - \xi\beta_0) + p_1(\alpha_1 - \xi\beta_1) + \cdots + p_n(\alpha_n - \xi\beta_n) = 0 \\ p_0(\alpha_1 - \xi\beta_1) + p_1(\alpha_2 - \xi\beta_2) + \cdots + p_n(\alpha_{n+1} - \xi\beta_{n+1}) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_0(\alpha_{n-1} - \xi\beta_{n-1}) + p_1(\alpha_n - \xi\beta_n) + \cdots + p_n(\alpha_{2n-1} - \xi\beta_{2n-1}) = 0, \end{cases}$$

qui définit les rapports

$$\frac{p_0}{p_n}, \frac{p_1}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n} .$$

*) Heine, Handbuch der Kugelfunctionen. 1878, p. 287.

Ces rapports s'expriment par les fractions, dont les dénominateurs sont égaux à la fonction entière de ξ du degré n

$$(5)\qquad \Phi_n(\xi) = \begin{vmatrix} \alpha_0 & -\xi\beta_0 & , & \alpha_1 - \xi\beta_1, & \ldots, & \alpha_{n-1} - \xi\beta_{n-1} \\ \alpha_1 & -\xi\beta_1 & , & \alpha_2 - \xi\beta_2, & \ldots, & \alpha_n - \xi\beta_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-1} - \xi\beta_{n-1}, & & \alpha_n - \xi\beta_n, & & \ldots, & \alpha_{2n-2} - \xi\beta_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

L'exception ne font que les cas, où $\Phi_n(\xi) = 0$.

On peut poser en ces cas exclusifs $p_n = 0$ et abaisser ainsi le degré de la fonction $\varphi_n(z)$, satisfaisante aux équations (4).

Dans notre but il est important de remarquer, que, $\Phi_n(\xi)$ n'étant pas $= 0$, toutes les racines de l'équation

$$\varphi_n(z) = 0$$

du degré n sont des nombres finis, et c'est à cause de celà, qu'avec l'accroissement infini d'une des racines de cette dernière équation ξ s'approche à l'une des racines de l'équation

$$\Phi_n(\xi) = 0.$$

La question à laquelle est consacrée cette note consiste, principalement, dans la détermination du nombre des racines de l'équation $\varphi(z) = 0$, comprises dans les intervalles

de $-\infty$ à a, de a à b, de b à c, de c à d, de d à $+\infty$

$(-\infty, a)$, (a, b), (b, c) (c, d), $(d, +\infty)$.

La résolution de cette question est renfermée dans les théorèmes suivants.

Théorème 1.

La fonction $\varphi_n(z)$ dans les intervalles (a, b) et (c, d) change son signe au moins $n - 1$ fois.

Démonstration.

Supposons, que dans les intervalles (a, b) et (c, d) la fonction $\varphi_n(z)$ change son signe précisement m fois pour

$$z = x_1, x_2, \ldots, x_m$$

et formons les fonctions

$$\Theta(z) = (z - x_1)(z - x_2) \ldots (z - x_m), \quad \Theta_1(z) = (z - \varepsilon)\Theta(z)$$

où ε est un nombre quelconque, compris entre b et c.

Alors les produits

$$\varphi_n(z)\,\Theta(z) \quad \text{et} \quad \varphi_n(z)\,\Theta_1(z)$$

ne changent leurs signes ni dans l'intervalle (a, b) ni dans celui (c, d): dans le premier de ces intervalles elles sont de signes contraires et dans le second de même signe.

De là il est aisé de voir, qu'une des expressions

$$(A) \qquad \int_a^b g(y)\,\Theta\,(y)\,\varphi_n(y)\,dy - \xi\int_c^d f(y)\,\Theta\,(y)\,\varphi_n(y)\,dy$$

et

$$(B) \qquad \int_c^d g(y)\,\Theta_1(y)\,\varphi_n(y)\,dy - \xi\int_c^d f(y)\,\Theta_1(y)\,\varphi_n(y)\,dy$$

n'est pas égale au zéro.

Mais d'après les équations (4) l'expression (A) se réduit au zéro, si $m < n$, et l'expression (B) —, si $m < n-1$.

Donc en tous cas m ne peut être moindre que $n-1$.

On démontrera sans peine, par les considérations tout à fait analogues, les scolies suivantes.

Scolie 1.

Soit ξ positif, toutes les racines de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ tombent dans les intervalles

$$(-\infty, b), \qquad (c, +\infty).$$

Soit ξ négatif, toutes les racines de même équation tombent entre a et d.

Scolie 2.

Pour $\xi = 0$ toutes les racines de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ sont comprises entre a et b.

Pour $\xi = \pm\infty$, au contraire, toutes les racines de même équation sont comprises entre c et d, car alors la fonction $-\frac{F(z)}{\xi}$ devient

$$\int_c^d \frac{f(y)}{z-y}\,dy.$$

Corollaire.

L'équation $\varphi_n(z) = 0$ n'a pas de racines égales; en d'autres termes la dérivée $\frac{\partial\varphi_n(z)}{\partial z}$ ne peut être réduite au zéro, quand $\varphi_n(z) = 0$.

Lemme.

La dérivée $\frac{\partial\varphi_n(z)}{\partial\xi}$ ne peut être réduite au zéro, quand

$$\varphi_n(z) = 0.$$

Démonstration.

D'après les équations (4) nous avons

$$(6) \qquad \int_a^b g(y)\,\Theta(y)\,\varphi_n(y)\,dy - \xi\int_c^d f(y)\,\Theta(y)\,\varphi_n(y)\,dy$$

quelque soit la fonction entière $\Theta(z)$ du degré $n-1$.

En différentiant l'équation (6) et en posant $\frac{\partial \varphi_n(z)}{\partial \xi} = \omega_n(z)$ nous déduisons

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_a^b g(y)\,\Theta(y)\,\omega_n(y)\,dy - \xi \int_c^d f(y)\,\Theta(y)\,\omega_n(y)\,dy \\ &\qquad - \int_c^d f(y)\,\Theta(y)\,\varphi_n(y)\,dy \end{aligned} \right\} = 0.$$

Admettons maintenant que les équations

$$\varphi_n(z) = 0 \quad \text{et} \quad \omega_n(z) = 0$$

ont une racine commune $z = \varepsilon$.

Alors rien ne nous empêche de poser

$$\text{dans la formule (6)} \qquad \Theta(z) = \frac{\omega_n(z)}{z - \varepsilon}$$

$$\text{et dans la formule (7)} \qquad \Theta(z) = \frac{\varphi_n(z)}{z - \varepsilon}.$$

Nous aurons ainsi les équations suivantes

$$\int_a^b g(y)\,\frac{\varphi_n(y)\cdot\omega_n(y)}{y-\varepsilon}\,dy - \xi \int_c^d f(y)\,\frac{\varphi_n(y)\cdot\omega_n(y)}{y-\varepsilon}\,dy = 0,$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_a^b g(y)\,\frac{\varphi_n(y)\cdot\omega_n(y)}{y-\varepsilon}\,dy - \xi \int_c^d f(y)\,\frac{\varphi_n(y)\cdot\omega_n(y)}{y-\varepsilon}\,dy \\ &\qquad - \int_c^d f(y)\,\frac{\varphi_n(y)\cdot\varphi_n(y)}{y-\varepsilon}\,dy \end{aligned} \right\} = 0,$$

d'où il suit

$$\int_c^d f(y)\cdot\frac{\varphi_n(y)\cdot\varphi_n(y)}{y-\varepsilon}\,dy = 0$$

et ensuite

$$\int_a^b g(y)\cdot\frac{\varphi_n(y)\cdot\varphi_n(y)}{y-\varepsilon}\,dy = 0.$$

Mais les deux égalités dernières sont impossibles.

Cette contradiction indique, que les fonctions $\varphi_n(z)$ et $\frac{\partial \varphi_n(z)}{\partial \xi}$ ne peuvent être simultanément égales au zéro.

Corollaire.

Lorsque ξ décroît continuellement de zéro jusqu'à $-\infty$, chaque racine de l'équation se varie aussi continuellement et toujours dans même sens: elle croit; car elle passe de l'intervalle (a, b) dans celui (c, d).

Et lorsque ξ croît continuellement de zéro jusqu'à $+\infty$ chaque racine de l'équation, en variant aussi continuellement, décroît toujours excepté les cas, où cette racine franchit $\pm\infty$.

De là résultent les théorèmes suivants.

Théorème 2.

Lorsque ξ décroît de 0 jusqu'à $-\infty$ toutes les racines de l'équation $\varphi_n(z)=0$, franchissant successivement b et c, passent de l'intervalle (a, b) dans celui (c, d).

Par conséquent toutes les racines des équations

$$\varphi_n(b)=0 \quad \text{et} \quad \varphi_n(c)=0,$$

du degré n par rapport à l'inconnue ξ, sont réelles et négatives.

D'ailleurs si nous désignons dans l'ordre décroissant les racines

$$\begin{aligned} &\text{de l'équation} \quad \varphi_n(b)=0 \quad \text{par} \quad \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \\ &\text{de l'équation} \quad \varphi_n(c)=0 \quad \text{par} \quad \eta_1', \eta_2', \ldots, \eta_n', \end{aligned}$$

nous aurons les inégalités suivantes

$$\eta_1 > \eta_1' > \eta_2 > \eta_2' > \cdots > \eta_n > \eta_n'.$$

Enfin quant aux racines de l'équation $\varphi_n(z)=0$ nous pouvons assurer, que

pour $\eta_i > \xi > \eta_i'$	$n-i$ *de celles sont comprises entre*	a *et* b
	une	b *et* c
	$i-1$	c *et* d
et pour $\eta_i' > \xi > \eta_{i+1}$	$n-i$ *de celles sont comprises entre*	a *et* b
	i	c *et* d.

Scolie.

Soient

$$z = x_1, x_2, \ldots, x_n$$

toutes les racines de l'équation $\varphi_n(z)=0$ dans l'ordre croîssant.

Alors aux inégalités

$$0 > \sigma > \sigma'.$$

correspond la suivante

$$(x_i)_{\xi=\sigma} < (x_i)_{\xi=\sigma'}$$

et par suite

$$\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)_{\xi=\sigma} > \left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)_{\xi=\sigma'}. \tag{8}$$

Théorème 3.

Lorsque ξ augmente de 0 jusqu'à $+\infty$ toutes les racines de l'équation $\varphi_n(z)=0$, franchissant successivement

$$a, \quad -\infty, \quad +\infty, \quad d$$

passent de l'intervalle (a, b) dans celui (c, d).

De là résulte que toutes les racines des équations

$$\varphi_n(a) = 0, \quad \Phi_n(\xi) = 0, \quad \varphi_n(d) = 0,$$

du degré n par rapport à l'inconnue ξ, *sont réelles et positives.*

D'ailleurs, si dans l'ordre croissant les racines de l'équation

$$\begin{aligned} &\varphi_n(a) = 0 \quad \textit{sont} \quad \xi_1, \ \xi_2, \ \ldots, \ \xi_n, \\ &\Phi_n(\xi) = 0 \qquad\quad \xi_1', \ \xi_2', \ \ldots, \ \xi_n', \\ &\varphi_n(d) = 0 \qquad\quad \xi_1'', \ \xi_2'', \ \ldots, \ \xi_n'', \end{aligned}$$

nous avons les inégalités suivantes

$$\xi_1 < \xi_1' < \xi_1'' < \xi_2 < \xi_2' < \xi_2'' < \cdots < \xi_n < \xi_n' < \xi_n''.$$

Enfin, quant aux racines de l'équation $\varphi_n(s) = 0$, *nous pouvons assurer que*

pour $\xi_i < \xi < \xi_i'$ — $n - i$ *de celles sont comprises entre* a *et* b,
une . . . . . a *et* $-\infty$,
$i - 1$ . . . . . c *et* d,

pour $\xi_i' < \xi < \xi_i''$ — $n - i$ *de celles sont comprises entre* a *et* b,
une . . . . . $+\infty$ *et* d,
$i - 1$ . . . . . c *et* d,

pour $\xi_i'' < \xi < \xi_{i+1}$ — $n - i$ *de celles sont comprises entre* a *et* b,
i . . . . . c *et* d.

Scolie.

Soient pour $\xi > 0$

$$x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n$$

toutes les racines de l'équation $\varphi_n(s) = 0$ dans le même ordre que nous représentent les nombres

$$b, \ a, \ -\infty, \ +\infty, \ d, \ c.$$

Soit encore h un nombre quelconque comprise entre b et c.

Alors aux inégalités

$$0 < \tau < \tau'$$

correspond

$$\left(\frac{1}{h - x_i}\right)_{\xi=\tau} > \left(\frac{1}{h - x_i}\right)_{\xi=\tau'}$$

et par suite

$$\left(\frac{\varphi_n'(h)}{\varphi_n(h)}\right)_{\xi=\tau} > \left(\frac{\varphi_n'(h)}{\varphi_n(h)}\right)_{\xi=\tau'}. \tag{9}$$

Lemme.

$$\begin{aligned} p_n \Phi_{n+1}(\xi) &= \left\{ \begin{array}{l} p_0(\alpha_n - \xi\beta_n) + p_1(\alpha_{n+1} - \xi\beta_{n+1}) + \cdots \\ \quad \cdots + p_{n-1}(\alpha_{2n-1} - \xi\beta_{2n-1}) + p_n(\alpha_{2n} - \xi\beta_{2n}) \end{array} \right\} \Phi_n(\xi) \\ &= \Phi_n(\xi) \left\{ \int_a^b g(y) . y^n \varphi_n(y) \, dy - \xi \int_c^d f(y) y^n \varphi_n(y) \, dy \right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Nous obtenons cette formule au moyen du théorème sur le développement d'un déterminant suivant les éléments de quelque colonne.

Lemme.

ξ étant positif, pour $\varphi_n(a) = 0$ le produit $\Phi_{n+1}(\xi) \cdot \Phi_n(\xi)$ est un nombre négatif; au contraire pour $\varphi_n(d) = 0$ le même produit est un nombre positif.

Démonstration.

Pour $\varphi_n(a) = 0$ l'expression $\frac{\varphi_n(z) \cdot (z-b)}{z-a}$ représente une fonction entière de z, du degré n.

Le coefficient de z^n dans cette fonction est égal à p_n. Cela étant il est aisé de transformer la formule (10) dans la suivante

$$p_n^2 \Phi_{n+1}(\xi)\Phi_n(\xi) = \big(\Phi_n(\xi)\big)^2 \left\{ \int_a^b g(y) \frac{(\varphi_n(y))^2 \cdot (y-b)}{y-a} dy - \xi \int_c^d g(y) \frac{(\varphi_n(y))^2 (y-b)}{y-a} dy \right\}$$

dont on déduit immédiatement l'inégalité

$$\Phi_n(\xi)\Phi_{n+1}(\xi) < 0.$$

Tout de même on peut démontrer la seconde partie de notre lemme.

Corollaire.

Toutes les racines de l'équation

$$\Phi_{n+1}(\xi) = 0$$

sont comprises, une à une, dans les intervalles suivantes

$$(0, \xi_1), (\xi_1'', \xi_2), (\xi_2'', \xi_3), \ldots, (\xi_{n-1}'', \xi_n), (\xi_n'', +\infty).$$

Théorème 4.

Soient

$$\xi_{s1}^0, \xi_{s2}^0, \ldots, \xi_{sn+1}^0$$

toutes les racines de l'équation $\Phi_{n+1}(\xi) = 0$ *dans l'ordre croissant.*

Alors pour

$$\xi = \xi_{sx}^0$$

$n - x + 1$ *racines de l'équation*

$$\varphi_n(z) = 0$$

sont comprises entre a et b et les autres $x - 1$ *entre c et d.*

En même temps nous avons les inégalités suivantes

$$\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)_{\xi=\xi_x^0} > \left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)_{\xi=\xi_{x+1}^0}, \tag{11}$$

$$\left(\frac{\varphi_n'(h)}{\varphi_n(h)}\right)_{\xi=\xi_x^0} > \left(\frac{\varphi_n'(h)}{\varphi_n(h)}\right)_{\xi=\xi_{x+1}^0} \tag{12}$$

où h est un nombre quelconque, compris entre b et c.

Démonstration.

Toutes les conclusions de ce théorème sont des corollaires évidents des propositions précédentes, excepté l'inégalité (11).

Quant à cette dernière inégalité, elle se réduit à l'inégalité (8), si nous remarquons, que pour $\Phi_{n+1}(\xi) = 0$ la fonction $\varphi_n(z)$ devient le dénominateur d'une fraction convergente de la fonction

$$F_1(z) = \int_a^b \frac{(b-y)\,g(y)}{z-y}\,dy - (-\xi)\int_c^d \frac{(y-b)\,f(y)}{z-y}\,dy$$

où

$$(b-y)\,g(y) > 0 \quad \text{pour} \quad a < y < b$$

et

$$(y-b)\,f(y) > 0 \quad \text{pour} \quad c < y < d.$$

Remarque.

Ces considérations sont analogues à plusieurs égards à celles de Sturm sur les racines des certaines équations, qui se rattachent à l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre.*)

D'ailleurs il faut remarquer que les fonctions de Lamé peuvent être considerées comme les cas particuliers des fonctions $\varphi_n(z)$.**)

De là il est aisé de voir la liaison entre nos théorèmes et celui de M. Klein, suppléé par M. Ljapounoff.***)

30. septembre 1885.

---

*) Sturm. Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre. Journal de M. Liouville, première série, tome I.

**) Heine. Handbuch der Kugelfunctionen 1878. § 102. — Sochotzky. Sur les intégrales définies et les fonctions, dont on se sert pour les développements dans les séries. 1873. Chapitre II (russe).

***) Klein. Ueber Lamé'sche Functionen. Mathematische Annalen XVIII. — Ljapounoff. De la stabilité des formes éllipsoidales de l'équilibre d'une masse liquide, douée d'une rotation (russe) 1884. Chapitre IV. — Voir aussi Stieltjes. Sur certaines polynômes qui vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé. Acta Mathematica VI.

Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der elliptischen Functionen.

Von

Alfred Pringsheim in München.

Will man die Umkehrungsfunctionen des elliptischen Integrales erster Gattung durch Quotienten von Thetafunctionen darstellen, so ist es vor allem unerlässlich zu zeigen, dass das Verhältniss der beiden durch gewisse bestimmte Integrale definirten Perioden einen wesentlich positiven (d. h. auch von Null verschiedenen) imaginären Theil besitzt, da nur in diesem Falle die betreffenden Thetareihen, deren Modul durch obiges Periodenverhältniss definirt wird, überhaupt existiren, d. h. convergent sind. Da man indessen die Vorzeichen jener Perioden beliebig wählen kann, so kommt es offenbar wesentlich nur darauf an, nachzuweisen, dass das Periodenverhältniss *niemals reell* ist, worauf dann jene Vorzeichen nur noch so zu fixiren sind, dass die oben genannte Convergenzbedingung erfüllt ist.

Obschon nun mit diesem Satze die ganze Berechtigung jener Methode, welche die Theorie der elliptischen Functionen in der Hauptsache auf diejenige der Thetafunctionen basirt, geradezu steht und fällt, so zeigen nichtsdestoweniger zwei der besten und bekanntesten Compendien über diesen Gegenstand — dasjenige von Briot und Bouquet*) und das von Thomae**) — in dieser Beziehung eine empfindliche Beweislücke, von zahlreichen anderen nicht zu reden, welche über diesen wichtigen Punkt mit völligem Stillschweigen hinweggehen.

Der Gedankengang, welcher von den genannten Autoren eingeschlagen wird, ist nämlich folgender. Es werden zunächst doppelt periodische Functionen mit zwei willkürlich angenommenen Perioden ω, ω' betrachtet, und hierbei wird gezeigt, dass *„eine eindeutige, doppelt-periodische Function mit reellem Periodenverhältniss nicht existirt“*,

*) Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques. Deuxième Édition 1875.

**) Thomae, Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen. Zweite Auflage 1873.

oder vielmehr genauer gesagt, wenn man auf den wahren Sinn dieses *„Nicht-Existirens"* zurückgeht: dass eine solche Function bei incommensurablem reellen Periodenverhältnisse entweder *constant oder total unstetig*, bei rationalem nur *scheinbar doppelt periodisch*, in Wahrheit aber *einfach periodisch* sein müsste.*)

Alsdann werden die elliptischen Functionen als eindeutige Umkehrungen des elliptischen Integrals erster Gattung eingeführt, und deren Perioden ω, ω' durch die bekannten bestimmten Integrale vollständig definirt. Nun aber wird ohne weiteres folgendermaassen geschlossen: da nach dem oben erwähnten Satze eine eindeutige doppelt periodische Function mit reellem Periodenverhältniss überhaupt *nicht existirt*, muss nun auch dieses besondere $\frac{\omega'}{\omega}$ eo ipso imaginär sein.**) Dieser Schluss ist indessen unzulässig. Denn zieht man die wahre Bedeutung jenes Satzes, wie sie oben ausdrücklich hervorgehoben wurde, in Betracht, so folgt daraus nur soviel, dass für die elliptischen Functionen $\frac{\omega'}{\omega}$ nicht reell und incommensurabel sein kann, da dieselben — wie man leicht ersieht — weder constant, noch total unstetig sind. Hingegen fehlt, um auch die Möglichkeit eines rationalen Periodenverhältnisses auszuschliessen, der Nachweis, dass jene Functionen auch *in Wahrheit und nicht bloss scheinbar doppelt periodisch* sind, d. h. dass zwischen den beiden vorhandenen Perioden ω, ω' keine homogene lineare Relation mit ganzzahligen Coefficienten besteht — was also schliesslich wiederum darauf hinausläuft, zu zeigen, dass $\frac{\omega'}{\omega}$ nicht reell und rational sein kann, sodass der oben gerügte Schluss thatsächlich einen vollkommenen circulus vitiosus enthält.

Mit anderen Worten: trotz der Existenz jenes allgemeinen Satzes über das Periodenverhältniss doppelt periodischer Functionen muss noch ganz speciell nachgewiesen werden, dass für die elliptischen Functionen jener Quotient $\frac{\omega'}{\omega}$ nicht reell oder zum mindesten nicht reell und rational ist.

Thatsächlich existiren nun aber bereits verschiedene directe Beweise dieses Satzes: zunächst derjenige, welchen Riemann in einer der Theorie der Abel'schen Functionen angepassten, verallgemeinerten Form gegeben

---

*) Briot et Bouquet, p. 231. 232. Thomae, p. 56.

**) Bei Thomae — a. a. O. p. 137 — ist dieser Schluss wörtlich so ausgeführt. Bei Briot und Bouquet wird p. 366 ohne jeglichen Beweis gesagt: „le rapport $\frac{\omega'}{\omega} = r + si$ variant d'une manière continue avec k et *restant imaginaire*" — eine Behauptung, deren Begründung auf Grund des Vorangehenden nicht wohl anders als wie bei Thomae verstanden werden kann.

hat*), und der späterhin von Neumann und Königsberger für elliptische Functionen specialisirt worden ist**). Obschon nun aber die Idee dieses Beweises vielleicht mit zu den bewunderungswürdigsten Eingebungen des Riemann'schen Geistes gehört, so wird man doch kaum umhin können zuzugestehen, dass derselbe in Wahrheit auf einem ziemlich unvermittelt auftretenden Kunstgriffe (nämlich der Betrachtung eines in der ganzen übrigen Theorie gar nicht weiter vorkommenden Randintegrales) beruht, und dass es wünschenswerth erscheinen muss, denselben — zunächst wenigstens für die Theorie der elliptischen Functionen — durch einen einfacheren und natürlicheren zu ersetzen.

Einen Beweis, der diesen letzteren Anforderungen mehr Rechnung trägt, liefert die Abbildungstheorie. Bildet man die zweiblättrige, durch zwei Querschnitte einfach zusammenhängend gemachte Riemann'sche s-Fläche, für welche das elliptische Integral erster Gattung

$$u = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

als eindeutige Function des Ortes erscheint, vermöge dieses Integrales auf die u-Ebene ab, so resultirt — wegen der beständigen Endlichkeit und Stetigkeit jenes Integrales — als Abbild ein völlig im Endlichen verlaufendes, einfach zusammenhängendes Flächenstück, und zwar in Folge der constanten Differenzen (Periodicitätsmoduln), ω und ω', welche die Integralwerthe auf den beiden Ufern je eines Querschnittes darbieten, ein (im allgemeinen irgendwie krummlinig begrenztes) Parallelogramm, welches einen gewissen endlichen Inhalt besitzen muss und sich nicht etwa in eine Linie zusammenziehen kann (da eine Fläche niemals conform auf eine Linie abgebildet werden kann). Bezeichnet man dann etwa den einen Eckpunkt dieses Parellelogramms (d. h. das Abbild eines von den 4 Schnittpunkten der beiden Querschnitte) mit u_0, so sind $u_0 + \omega$, $u_0 + \omega'$ die beiden benachbarten Ecken, und da diese drei Punkte, wie eben bemerkt, nicht in einer Geraden liegen, so folgt, dass $\frac{\omega'}{\omega}$ complex sein muss.***)

---

*) Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen § 21. — Ges. Werke, p. 124.

**) Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. Erste Auflage, 1865. p. 368. 369. — Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. 1874. pag. 295—299. Dieser Riemann'sche Beweis lehrt übrigens zugleich auch, wie die Periodicitätsmoduln zu normiren sind, damit die Convergenzbedingung für die ϑ-Functionen erfüllt ist (d. h. also speciell für elliptische Functionen: damit der imaginäre Theil von $\frac{\omega'}{\omega}$ wesentlich positiv ist).

***) Diese Abbildung findet sich auch bei Thomae (pag. 106): nur wird daraus nicht der Schluss gezogen, auf den es hier ankommt.

Dieser überaus einfache und anschauliche Beweis scheint mir (wie übrigens auch der zuerst erwähnte Riemann'sche) *das* gegen sich zu haben, dass er wesentlich auf der Einführung der Riemann'schen Flächen beruht.*) Ich bin nämlich der Ansicht, dass sich die Lehre von den elliptischen Functionen auch *ohne* dieses immerhin fremdartige geometrische Hülfsmittel mit ausreichender Strenge und Vollständigkeit functionentheoretisch behandeln lässt, und dass daher die Einführung der Riemann'schen Flächen — sofern es sich dabei nicht etwa mehr um eine Art Vorstudium für analoge Behandlung höherer Transcendenten oder um eine geeignete Grundlage für gewisse algebraische Untersuchungen (Modulargleichungen, Gleichungen fünften Grades etc.) handelt — als eine durchaus nicht gerechtfertigte Complication besser ganz zu vermeiden ist.

Hiernach bleibt also immer noch die Frage bestehen, ob der in Rede stehende Satz sich nicht auch ohne Anwendung der Riemann'schen Flächen beweisen lässt. Einen derartigen Beweis enthält nun eine im 83ten Bande des Crelle'schen Journals publicirte Abhandlung des Herrn Fuchs über die Periodicitätsmoduln der elliptischen Integrale**). In dieser Abhandlung wird u. a. der Quotient $\frac{a_2\omega + b_2\omega'}{a_1\omega + b_1\omega'}$, wo ω, ω' als Functionen des variabel gedachten Integralmoduls $\varkappa$ zu betrachten sind und a_1, a_2, b_1, b_2 gewisse ganze Zahlen bedeuten, auf Grund einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher ω und ω' als Functionen von $\varkappa$ Genüge leisten, eingehend untersucht, wobei dann unser Satz als ein specieller Fall des betreffenden Endresultates zum Vorschein kommt. Immerhin führt aber diese Untersuchung, wie schon aus dieser kurzen Andeutung ersichtlich sein dürfte, von der gewöhnlichen Theorie der elliptischen Functionen so weit ab, dass sich derselbe in den Rahmen einer Elementarvorlesung über diesen Gegenstand nicht eben leicht einfügen lassen würde.

Aus diesem Grunde habe ich versucht, jenen Satz noch auf einem mehr elementaren Wege zu erweisen, und in der That dürfte der von mir aufgefundene Beweis, der freilich nur ein apagogischer ist, in Bezug auf Kürze und Geringfügigkeit der dabei aufgewendeten Mittel wenig zu wünschen übrig lassen. Ich lasse denselben nunmehr folgen.

---

*) Wenigstens verliert er bei Anwendung der gewöhnlichen s-Ebene vollständig seine elegante und präcise Form.

**) Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces. — A. a. O. p. 13 ff.

Es sei

$$(1) \qquad u = \int_0^s \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \qquad R(z) = (1-z)^2\,(1-\varkappa^2 z^2)$$

so ist bekanntlich

$$(2) \qquad z = sn(u)$$

eine in der ganzen Ebene eindeutige Function von u, die sich mit Ausschluss der wesentlich singulären Stelle $u = \infty$ und gewisser anderer Punkte, wo sie von der ersten Ordnung unendlich wird, in Potenzreihen mit nicht durchweg verschwindenden Coefficienten entwickeln lässt: so ist also $sn(u)$ im allgemeinen stetig und *nicht* constant.

Aus der Untersuchung der verschiedenen Werthe, welche das Integral u für alle möglichen Arten von Integrationswegen und die nämliche obere Grenze z annimmt, folgt mit Hülfe der bekannten Cauchy'schen Integralsätze unmittelbar, dass $sn(u)$ die beiden Perioden

$$(3) \qquad \omega = 4K, \qquad \omega' = 2iK'$$

besitzt, wo K und iK' durch die geradlinig zu nehmenden Integrale

$$(4) \qquad K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \qquad iK' = \int_1^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

definirt sind*), und dass ausserdem

$$(5) \qquad sn\left(\frac{\omega}{2} - u\right) = sn(u).$$

Was nun das zu untersuchende Periodenverhältniss $\frac{\omega'}{\omega}$ betrifft, so ist vor allem nach dem oben erwähnten Satze über doppelt periodische Functionen ersichtlich, dass dasselbe nicht reell und incommensurabel sein kann, da $sn(u)$ weder constant, noch total unstetig ist.

Um jetzt auch zu zeigen, dass $\frac{\omega'}{\omega}$ auch nicht reell und rational sein kann, bedarf ich lediglich der bekannten Relationen für $sn\left(u+\frac{\omega}{2}\right)$, $sn\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $sn\left(\frac{\omega'}{2}\right)$ — deren Ableitungsweise ich aber an dieser Stelle ausdrücklich angeben muss, um die einfache Grundlage, auf welcher dieser ganze Beweis beruht, hinlänglich klar hervortreten zu lassen. Ich vermeide hierbei absichtlich die Anwendung des Additiontheorems der elliptischen Integrale erster Gattung, weil dasselbe bei dieser ganzen Behandlungsweise besser als eine Folgerung aus den Additionsformeln der Thetafunctionen erscheint.

---

*) Ueber die hier nicht weiter in Betracht kommende Bestimmung des Vorzeichens der Quadratwurzel sehe man z. B. Briot und Bouquet, p. 366.

Mit Hülfe der Substitution von $-z$ für z in Gl. (1) liefert Gl. (2) die Beziehung:

$$sn(-u) = -sn(u)$$

sodass nach Gl. (5)

$$sn\left(u - \frac{\omega}{2}\right) = -sn(u)$$

und durch Vermehrung des Arguments um die Periode ω die erste der gesuchten Beziehungen sich ergiebt:

$$(A) \qquad sn\left(u + \frac{\omega}{2}\right) = -sn(u).$$

Hieraus folgt für $u = 0$ — wenn man berücksichtigt, dass auf Grund der Definitionsgleichungen (1) und (2) $sn(0) = 0$ resultirt:

$$(B) \qquad sn\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0.$$

Um schliesslich noch die dritte der zu benützenden Relationen abzuleiten, transformire ich das Integral für iK' durch die Substitution

$$z^2 = \frac{1 - \xi^2}{1 - \varkappa^2 \xi^2},$$

wodurch sich

$$\frac{\omega'}{2} = \int_1^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = -\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}$$

ergiebt. Folglich ist

$$(C) \qquad sn\left(\frac{\omega'}{2}\right) = \infty.$$

Angenommen nun $\frac{\omega'}{\omega}$ wäre ein rationaler Bruch, dessen Zähler und Nenner wir dann als relativ prim voraussetzen dürfen, so müsste, wenn m und n ganze Zahlen bedeuten, einer der drei Fälle stattfinden

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{2m+1}{2n}, \qquad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{2m+1}{2n+1}, \qquad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{2m}{2n+1}$$

oder anders geschrieben, wenn man jede der betreffenden Gleichungen noch durch 2 dividirt:

$$n\omega' = \left(m + \frac{1}{2}\right)\omega,$$

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega' = \left(m + \frac{1}{2}\right)\omega,$$

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega' = m\omega$$

woraus mit Berücksichtigung der Periodicität von $sn(u)$ — wenn man noch in der ersten dieser Gleichungen auf beiden Seiten u addirt — folgen würde:

$$sn\left(u + \frac{\omega}{2}\right) = sn(u),$$

$$sn\left(\frac{\omega'}{2}\right) \quad = sn\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$sn\left(\frac{\omega'}{2}\right) \quad = 0.$$

Da aber diese Gleichungen durchweg mit den oben gefundenen Relationen (A), (B), (C) im Widerspruche stehen, so ist also die Annahme eines reellen rationalen Periodenverhältnisses unzulässig und daher der betreffende Satz vollständig bewiesen. —

München, October 1885.

Nachtrag.

Das während der Drucklegung dieses Aufsatzes erschienene Heft der Acta Mathematica (Bd. 7, Heft 2) enthält (S. 197 ff.) unter dem Titel: „Beweis eines Satzes aus der Theorie der Elliptischen Functionen von M. Falk in Upsala“ einen ebenfalls sehr einfachen und zwar directen Beweis des vorstehenden Satzes — unter Ausschluss des Falles, dass $\varkappa^2$ reell negativ oder positiv und $\geqq 1$. Uebrigens ergiebt sich alsdann — wie zur Vervollständigung des Falk'schen Beweises bemerkt werden möge — die Richtigkeit des Satzes ganz unmittelbar aus der blossen Betrachtung der beiden Perioden-Integrale (natürlich abgesehen von dem Specialfalle $\varkappa^2 = +1$, für welchen das betreffende Integral überhaupt aufhört ein elliptisches zu sein). —

München, Januar 1886.

Ueber die nothwendigen und hinreichenden covarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständiger Potenz.

Von

David Hilbert in Leipzig.

Die binäre Form $f_{(n)}$ vom Grade $n = \mu\nu$ sei die μ^{te} Potenz der Form $\varphi_{(\nu)}$ vom ν^{ten} Grade, so dass die Relation:

$$f_{(n)} = \varphi_{(\nu)}^{\mu}$$

besteht. Beide Seiten dieser Gleichung mögen in die $\frac{1}{\mu}^{te}$ Potenz erhoben und darauf $\nu+1$ mal nach der einen nicht homogenen Variabeln x differenzirt werden. Da der Ausdruck $\varphi_{(\nu)}$ die Variabele höchstens im Grade ν enthält, so folgt die Bedingung:

$$\frac{d^{\nu+1} f_{(n)}^{\frac{1}{\mu}}}{dx^{\nu+1}} = 0, \tag{1}$$

deren Existenz somit jedenfalls für die Form $f_{(n)}$ als nothwendig erscheint, damit dieselbe die μ^{te} Potenz einer Form $\varphi_{(\nu)}$ sein kann. Gehen wir nun umgekehrt von der Bedingung (1) aus, so ist klar, dass aus derselben durch $\nu+1$ fache Integration nach x eine Relation von der Gestalt:

$$f_{(n)}^{\frac{1}{\mu}} = \psi_{\nu} \tag{2}$$

entspringt, worin $\psi_{(\nu)}$ eine unbestimmte binäre Form ν^{ten} Grades bedeutet, deren Coefficienten nichts anderes als die $\nu+1$ auftretenden Integrationsconstanten sind. Da somit in Gleichung (2) rechter Hand eine rationale Form steht, so gilt das Gleiche von ihrer linken Seite d. h. die Form $f_{(n)}$ ist nothwendig in Folge der bestehenden Bedingung (1) eine vollständige μ^{te} Potenz, wodurch sich das oben gefundene Criterium (1) für die fragliche Darstellbarkeit der Form $f_{(n)}$ auch als ein hinreichendes erweist.

Es bleibt noch übrig, den gewonnenen Ausdruck linker Hand von (1) in seiner Eigenschaft als Covariante der Form $f_{(n)}$ zu erkennen und demselben zugleich eine für die Berechnung geeignete Gestalt zu geben. Als Hülfsmittel hiefür bedarf es einiger allgemeiner Sätze, welche sich auf die Darstellbarkeit einer jeden invarianten Form als Function der einseitigen Derivirten ihrer Grundform beziehen. Führen wir nämlich für die einseitigen Differentialquotienten der Grundform $f_{(n)}$ nach der einen nicht homogenen Variabeln x die Bezeichnungen ein:

$$f_0 = f_{(n)},$$
$$f_1 = \frac{(n-1)!}{n!}\,\frac{df_{(n)}}{dx},$$
$$f_2 = \frac{(n-2)!}{n!}\,\frac{d^2 f_{(n)}}{dx^2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n = \frac{1}{n!}\,\frac{d^n f_{(n)}}{dx^n},$$

so gelten mit Benutzung der beiden abkürzenden Differentiationssymbole:

$$D = f_0 \frac{\partial}{\partial f_1} + 2f_1 \frac{\partial}{\partial f_2} + 3f_2 \frac{\partial}{\partial f_3} + \cdots,$$
$$\Delta = nf_1 \frac{\partial}{\partial f_0} + (n-1) f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} + (n-2) f_3 \frac{\partial}{\partial f_2} + \cdots$$

die folgenden für unseren Zweck erforderlichen Sätze*):

I. *Jede homogene und isobare Function C der Differentialquotienten $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$ ist eine Invariante oder Covariante der Form $f_{(n)}$, wenn sie der Differentialgleichung:*

$$DC = 0$$

genügt.

II. *Die Quelle d. h. das erste Glied dieser Covariante ergiebt sich einfach, wenn wir in jenem Ausdrucke C die mit den bezüglichen Zahlenfactoren multiplicirten Differentialquotienten $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$ durch die entsprechenden Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ der Grundform ersetzen.*

III. *Die Anwendung des Differentiationssymboles Δ auf eine homogene und isobare Function der einseitigen Derivirten $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$ kommt einer Differentiation jener Function nach der einen nicht homogenen Variabelen x gleich.*

IV. *Für wiederholte und abwechselnde Anwendung der beiden Differentiationssymbole D und Δ auf eine Function der bezeichneten Art gelten allgemein die Formeln:*

---

*) Betreffs der Begründung und ausführlichen Behandlung derselben sei auf meine Inauguraldissertation „*Ueber die invarianten Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen*" § I und § II verwiesen. —

$$(3a)\quad D^k\Delta^l = \Delta^l D^k + \binom{\chi+k-l}{1}\cdot l\cdot k\Delta^{l-1}D^{k-1} + \binom{\chi+k-l}{2} l(l-1).k(k-1)\Delta^{l-2}D^{k-2} + \cdots,$$

$$(3b)\quad \Delta^l D^k = D^k\Delta^l + \binom{l-k-\chi}{1}\cdot l\cdot kD^{k-1}\Delta^{l-1} + \binom{l-k-\chi}{2} l(l-1)\cdot k(k-1)D^{k-2}\Delta^{l-2} + \ldots$$

worin χ den mit n multiplicirten Grad der fraglichen Function in den f, vermindert um ihr doppeltes Gewicht bedeutet.

Was nun unser Criterium (1) anbetrifft, so nimmt zunächst die linke Seite desselben nach III die Gestalt an:

$$(4)\qquad \Delta^{\nu+1} f_0^{\frac{1}{\mu}}.$$

Dieser Ausdruck reducirt sich nach einmaliger Anwendung des Symboles D unter Benutzung der Formel (3a) in IV auf Null wegen:

$$D\Delta^{\nu+1} f_0^{\frac{1}{\mu}} = \Delta^{\nu+1} D f_0^{\frac{1}{\mu}} + \binom{0}{1}\Delta^{\nu} f_0^{\frac{1}{\mu}} = 0$$

und ist dadurch nach I als Covariante der Grundform $f_{(n)}$ legitimirt. Schliesslich ist offenbar, dass wir die gebrochenen und irrationalen Bestandtheile des Ausdruckes (4) nachträglich durch einfache Multiplication desselben mit $f_0^{\nu-\frac{1}{\mu}+1}$ in Wegfall bringen, ohne dabei den invarianten Charakter des Ausdruckes oder seine Eigenschaft als nothwendiges und hinreichendes Criterium für die fragliche Darstellbarkeit der Form $f_{(n)}$ zu beeinträchtigen. Führen wir daher die Bezeichnung ein:

$$(5)\qquad C_\nu = f_0^{\nu-\frac{1}{\mu}+1}\,\Delta^{\nu+1} f_0^{\frac{1}{\mu}}, \qquad \nu\mu = n,$$

so können wir das gewonnene Resultat, wie folgt, zusammenfassen:

Das identische Verschwinden der Covariante C_ν (5), welche in den Coefficienten der Grundform $f_{(n)}$ den Grad $\nu+1$, das nämliche Gewicht $\nu+1$, mithin in den Variabeln den Grad $(n-2)(\nu+1)$ besitzt, liefert die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit der Form $f_{(n)}$ vom Grade $n = \mu\nu$ als vollständige μ^{te} Potenz einer Form $\varphi_{(\nu)}$ ν^{ten} Grades.

Es bleibt noch übrig, die gewonnene Covariante C_ν für die ersten Fälle mittelst ihrer Definitionsgleichung (5) wirklich auszuwerthen und durch bekannte und übersichtliche covariante Bildungen darzustellen. Wir erhalten nach Unterdrückung unwesentlicher Zahlenfactoren für $n = 1, 2, 3, 4$ die einfachen Werthe:

$$C_1 = H,$$
$$C_2 = T,$$
$$C_3 = 3(2n-3)H^2 - (n-2)Af_{(n)}^2,$$
$$C_4 = 4(3n-4)HT - (n-3)Bf_{(n)}^2,$$

worin die Bezeichnungen gelten:

$$f_{(n)} = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = a_x^n = b_x^n = c_x^n,$$

$$H = (a_0 a_2 - a_1^2) x^{2n-4} + \cdots = \frac{1}{2}(ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2},$$

$$T = (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) x^{3(n-2)} + \cdots = (ab)^2 (bc) a_x^{n-2} b_x^{n-3} c_x^{n-1},$$

$$A = (a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2) x^{2(n-4)} + \cdots = \frac{1}{2}(ab)^4 a_x^{n-4} b_x^{n-4},$$

$$B = (a_0^2 a_5 - 5a_0 a_1 a_4 + 2a_0 a_2 a_3 + 8a_1^2 a_3 - 6a_1 a_2^2) x^{3n-10} + \cdots$$
$$= (ab)^4 (ac) a_x^{n-5} b_x^{n-4} c_x^{n-1}.$$

Die für $\nu = 1$ und $\nu = 2$ gewonnenen Resultate stimmen sehr gut mit der bekannten Thatsache überein, der zu Folge das identische Verschwinden der Hesseschen Covariante H die Darstellbarkeit der Form $f_{(n)}$ als n^{te} Potenz einer linearen Form und das identische Verschwinden der Covariante T für die biquadratische Form die Ausartung derselben in ein Quadrat einer quadratischen Form bedingt.

Der Zweck dieser Note liegt zugleich darin, gelegentlich eines so einfachen und greifbaren Beispieles, wie das behandelte ist, auf die Brauchbarkeit desjenigen bisher verborgenen Verfahrens hinzuweisen, welches durch die vier oben kurz mitgetheilten Sätze an die Hand gegeben wird und vorwiegend dazu geeignet erscheint, in naturgemässer Weise die gebrochenen und irrationalen algebraischen Gebilde der invariantentheoretischen Forschung zugänglich zu machen.

Leipzig, den 30. November 1885.

Zusatz zu der Note „Einige allgemeine Sätze über Raumcurven."

(Diese Annalen, Bd. XXV, p. 287.)

Von

Adolf Hurwitz in Königsberg i. Pr.

Die in dem ersten Theile der obigen Note aufgestellten Sätze sind, wie ich kürzlich erfahren habe, schon vor längerer Zeit von anderer Seite publicirt worden, und ich möchte hier nachträglich die betreffenden Citate hinzufügen. — Nach einer Mittheilung des Herrn F. Klein findet sich der Satz über die Existenz der Maximalprojection einer geschlossenen Curve (Satz 2 meiner Note) auch bei Möbius im § 56 seines Werkes über Statik. Der Inhalt meines Satzes 1 coincidirt ferner im Wesentlichen mit einem Theoreme, welches Herr H. G. Zeuthen in der Tidsskrift for Mathematik, udgivet af C. Tychsen, im Jahrgang 1865, pag. 109 zum Beweise vorgelegt hat. Dieses Theorem ist dann, mit mehreren Zusätzen versehen, von Herrn L. Oppermann in derselben Zeitschrift, Jahrgang 1866, pag. 49 bewiesen worden und ebendaselbst (auf pag. 60) hat Herr Zeuthen seinen eigenen Beweis mitgetheilt. Beide Beweise sind in französischer Uebersetzung in den Astronomischen Nachrichten Bd. 66, Nr. 1569 in der Note „Nouveaux Théorèmes relatifs aux Secteurs dans l'espace" abgedruckt worden.

Königsberg i. Pr., December 1885.

Ueber die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses.

Von

Friedrich Schur in Leipzig.

Im Folgenden handelt es sich vornehmlich darum Beispiele zu geben für die Deformation von mehr als zweifach ausgedehnten Räumen, welche in sogenannten ebenen Räumen enthalten sind. Hier ist unter Deformation eines Raumes in einen anderen eine solche Abbildung derselben auf einander zu verstehen, bei welcher unendlich kleinen Linien des einen Raumes ihnen gleiche unendlich kleine Linien des andern entsprechen; und unter einem ebenen Raume verstehen wir einen solchen, in welchem das Quadrat des Linienelements durch die Summe der Quadrate der Coordinatenzuwachse dargestellt ist. Während ich, was die auf dieses Problem bezügliche Literatur betrifft, im Allgemeinen auf die Anmerkungen 28 und 29 des vor Kurzem erschienenen Buches von Herrn Killing*) verweisen möchte, will ich nicht unterlassen im Besondern auf eine nicht überall gehörig beachtete Arbeit des Herrn Monro**), „On flexure of spaces", die Aufmerksamkeit zu lenken. Herr Monro behandelt allerdings nur ein specielles Problem, das Problem nämlich, inwieweit ein Raum von n Dimensionen in einem ebenen Raume von $n + m$ Dimensionen in der Nähe eines Punktes deformirbar ist, wenn man bei Entwickelung der Gleichungen dieses Raumes in Potenzreihen, die in der Nähe des Punktes gelten, sich auf die Glieder zweiter Ordnung beschränkt. Insofern haben seine Schlüsse, wie er es selbst auch zugiebt, nur nach der negativen Seite hin Bedeutung, sie lehren nur, dass das Problem i. A. nur lösbar sein kann, wenn m eine gewisse Grenze übersteigt, dass z. B. ein Raum von n Dimensionen in einem solchen von $n + 1$ Dimensionen i. A. nicht deformirbar ist; aber es ergiebt sich bei Herrn Monro dies

*) Killing, Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung, Leipzig, 1885, p. 263 u. 264.

**) S. Monro, On flexure of spaces, Proceedings of the London Mathematical Society, vol. IX, p. 171 ff.

Resultat mit ungemein einfachen Mitteln, im Vergleiche zu den Beweisen, die andere Mathematiker dafür gegeben haben. Ein wirklicher Beweis für die Möglichkeit einer solchen Deformation ist erst durch Herrn Killing gegeben worden, indem er a. a. O. p. 222 zeigt, dass jeder n-dimensionale Raum, welcher eine Schaar von $(n-1)$-dimensionalen ebenen Räumen enthält, in einem $(n+1)$-dimensionalen ebenen Raume deformirbar ist. Durch die Ausführung einer solchen Deformation ist nun auch die von beliebig vielen andern Räumen gegeben, welche in dem zu deformirenden Raume enthalten sind*). Da indessen Herr Killing seinen Beweis durch geometrische Betrachtungen geführt hat, so dürfte es nicht überflüssig sein, analytisch ausgeführte Beispiele von Deformationen der Räume zu geben oder das Problem solcher Deformationen wenigstens auf das bekannte der Deformation von Flächen zurückzuführen. Wir werden uns hauptsächlich mit der Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses beschäftigen, wollen aber des besseren Verständnisses wegen einige allgemeinere Untersuchungen vorausschicken, welche vor dem Erscheinen des Killing'schen Buches fertig gestellt viel Berührungspunkte**) mit diesem haben.

§ 1.

Ueber das Riemann'sche Krümmungsmaass und das Linienelement der Räume, für welche dasselbe constant ist.

Ist in einem Raume von n Dimensionen das Linienelement gegeben in der Form:

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k, \tag{1}$$

wo die a_{ik} eindeutige analytische Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind, welche der Bedingung genügen, dass erstens $a_{ik} = a_{ki}$, zweitens die Discriminante obiger quadratischen Form nicht identisch verschwinde und diese Form eine definite oder stets positive sei, so hat man zunächst das Problem der Variationsrechnung zu lösen, die kürzesten Linien in diesem Raume zu finden. Sieht man dies Problem als gelöst an, so hat man nach Riemann diese kürzesten Linien in folgender Art in Flächen zusammenzufassen, die wir geodätische Flächen nennen können. Man verbinde irgend einen Punkt (x_i) des Raumes mit zwei ihm benachbarten Punkten $(x_i + dx_i)$ und $(x_i + \delta x_i)$ durch kürzeste Linien und ziehe nun die Gesammtheit der kürzesten Linien, welche

*) S. Killing, a. a. O. p. 239.

**) Vergl. im Besonderen § 12 im 2. Abschn. des gen. Buches.

den Punkt (x_i) mit den Punkten $(x_i + \alpha dx_i + \beta \delta x_i)$ verbinden, wo α und β ganz beliebig. Dies ist eine der durch den Punkt (x_i) gehenden geodätischen Flächen, als deren Coordinaten man die Grössen $dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i$ betrachten kann. *Das Gaussische Krümmungsmaass nun dieser geodätischen Fläche im Punkte* (x_i) *ist es, dem man den Namen des Riemann'schen Krümmungsmaasses*) gegeben hat.* Ist $n > 2$, so hängt dasselbe natürlich ausser von den Coordinaten x_i auch von den Coordinaten $dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i$ der geodätischen Fläche ab. Dasselbe hat folgende analytische Form:

$$(2)\quad K = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_{i,k;l,m}^{n} (i,k;l,m)(dx_i \delta x_m - dx_m \delta x_i)(dx_k \delta x_l - dx_l \delta x_k)}{\sum_{i,k;l,m}^{n} (a_{ik}a_{lm} - a_{km}a_{il})(dx_i \delta x_m - dx_m \delta x_i)(dx_k \delta x_l - dx_l \delta x_k)},$$

wo das Semikolon zwischen i, k und l, m bedeutet, dass nur über verschiedene Paare der Indices i, k und l, m summirt werden soll, wo ferner:

$$(3)\quad (i,k;l,m) = \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_l \partial x_m} + \frac{\partial^2 a_{lm}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 a_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 a_{km}}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu}^{n} A_{\lambda\mu}(p_{\lambda,ik}\, p_{\mu,lm} - p_{\lambda,il}\, p_{\mu,km}).$$

Hier bedeutet:

$$(4)\quad p_{\lambda,ik} = \frac{\partial a_{i\lambda}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{k\lambda}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_\lambda},$$

und es ist:

$$(5)\quad \sum_{\lambda}^{n} A_{i\lambda} a_{k\lambda} = 0 \text{ oder } 1,$$

je nachdem $i = k$ oder $i \gtrless k$ ist. Bezüglich des Beweises verweise ich auf die o. c. Arbeiten.

In denjenigen Räumen nun, in denen die gewöhnliche projective Geometrie Geltung behält, wenn man die kürzesten Linien als gerade Linien ansieht, ist dies Krümmungsmaass sowohl von den Coordinaten des Punktes als von den Coordinaten der geodätischen Fläche unabhängig, es finden also die Relationen statt:

$$(6)\quad K(a_{ik}a_{lm} - a_{km}a_{il}) + \frac{1}{2}(i,k;l,m) = 0.$$

---

*) Vergl. hierüber die Anm. von Dedekind in Riemann's ges. math. Werken p. 384 ff. und Voss, zur Theorie des Riemann'schen Krümmungsmasses, Math. Ann. Bd. XVI, p. 571.

Dem Linienelement eines Raumes, in welchem die projective Geometrie gilt, kann man nämlich unter Zugrundelegung einer projectiven Maassbestimmung, auf welche ich hier nicht näher eingehen kann, die Form geben:*)

$$(7) \qquad ds^2 = \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\left(\sum_i^n dx_i^2\right)\left(\sum_i^n x_i^2 - R^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\, dx_i\right)^2}{\left(\sum_i^n x_i^2 - R^2\right)^2},$$

wo der Nenner gleich 0 gesetzt den Ort der unendlich fernen Punkte darstellt, und R mit $\varkappa$ durch die Relation verbunden ist:

$$(8) \qquad R\sqrt{-1} = \cot \varkappa.$$

Es ist also:

$$(9) \qquad a_{kk} = \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\sum_i^n x_i^2 - R^2 - x_k^2}{\left(\sum x_i^2 - R^2\right)^2}$$

und:

$$(10) \qquad a_{kl} = -\frac{1}{\varkappa^2} \frac{x_k x_l}{\left(\sum x_i^2 - R^2\right)^2}, \quad \text{wenn } k \gtrless l.$$

Demnach wird: $a_{kk}^0 = -\frac{1}{\varkappa^2 R^2}$ und $a_{ik}^0 = 0$, wenn $k \gtrless l$, wo der Index 0 den Werth der betreffenden Function für den Punkt $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ bezeichnen soll. Es ist ferner stets $\left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_m}\right)^0 = 0$ und:

$$\left(\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_i \partial x_m}\right)^0 = -\frac{4}{\varkappa^2 R^4}, \quad \text{wenn } i = k = l = m;$$

$$= -\frac{2}{\varkappa^2 R^4}, \quad \text{wenn } i = k \lessgtr l = m;$$

$$= -\frac{1}{\varkappa^2 R^4}, \quad \text{wenn } i = l \gtrless k = m;$$

$$= 0 \text{ in allen übrigen Fällen.}$$

Demnach wird

$$(i, k;\ l, m)^0 = \mp \frac{2}{\varkappa^2 R^4},$$

je nachdem $i = k \lessgtr l = m$ oder $i = l \gtrless k = m$, in allen andern Fällen aber $= 0$.

*) S. Beltrami, Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, Annali di Mat. ser. II, tom. II, p. 232.

Daraus erkennt man, dass für den Anfangspunkt in der That die Gleichungen (6) erfüllt sind. Nun bleibt aber bei der Transformation:

$$(11)\quad x_1 = R^2\frac{y_1+a_1}{R^2+a_1y_1},\quad x_2 = R\sqrt{R^2-a_1^2}\,\frac{y_2}{R^2+a_1y_1},\ \cdots,$$
$$x_n = R\sqrt{R^2-a_1^2}\,\frac{y_n}{R^2+a_1y_1}$$

das Linienelement seiner Form nach unverändert und es hat jetzt der Anfangspunkt des neuen Systems im alten die Coordinaten $a_1, 0, \ldots, 0$, sodass also auch für diesen Punkt die Gleichungen (6) erfüllt sind. So weiter schliessend kann man zeigen, dass dieselben Gleichungen für jeden beliebigen Punkt des betrachteten Raumes erfüllt sind, sodass hierdurch auch direct nachgewiesen ist, dass die Form (7) des Linienelements einen Raum constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses bedingt.

Macht man die Substitution:

$$(12)\quad x_1 = \frac{2\sqrt{-1}\,\varkappa R z_1}{\varkappa^2\sum_\lambda^n z_\lambda^2 - 1},\ \cdots,\ x_{n-1} = \frac{2\sqrt{-1}\,\varkappa R z_{n-1}}{\varkappa^2\sum_\lambda^n z_\lambda^2 - 1},$$
$$x_n = R + \frac{2R}{\varkappa^2\sum_\lambda^n z_\lambda^2 - 1},$$

so geht das Linienelement (7) über in:

$$(13)\quad ds^2 = -\frac{dz_1^2+dz_2^2+\cdots+dz_n^2}{\varkappa^2 z_n^2}.$$

Diese Transformation ist nur für Räume constanten negativen Krümmungsmaasses auf reelle Weise möglich, d. h. nur wenn $\varkappa^2$ negativ und R^2 positiv. Die Räume $z_n = \text{const.}$, welche die constante Krümmung 0 haben, entsprechen den Lobatschewsky'schen Grenzflächen*).

Eine in jedem Falle reelle Transformation lautet:

$$(14)\quad \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-1}\,R\tan\varkappa u\cos v_1,\\ x_2 &= \sqrt{-1}\,R\tan\varkappa u\sin v_1\cos v_2,\\ x_3 &= \sqrt{-1}\,R\tan\varkappa u\sin v_1\sin v_2\cos v_3,\ \cdots,\\ x_{n-1} &= \sqrt{-1}\,R\tan\varkappa u\sin v_1\sin v_2\cdots\sin v_{n-2}\cos v_{n-1},\\ x_n &= \sqrt{-1}\,R\tan\varkappa u\sin v_1\sin v_2\cdots\sin v_{n-1} \end{aligned}$$

*) S. Beltrami, l. c. p. 249.

und giebt dem Linienelement (7) die Form:

$$(15)\quad ds^2 = du^2 + \frac{\sin^2 \varkappa u}{\varkappa^2}(dv_1^2 + \sin^2 v_1\, dv_2^2 + \sin^2 v_1 \sin^2 v_2\, dv_3^2 + \cdots + \sin^2 v_1 \cdots \sin^2 v_{n-2}\, dv_{n-1}^2).$$

Die geometrische Bedeutung der Grössen u, v_1, v_2 für $n = 3$ ist die der gewöhnlichen räumlichen Polarcoordinaten: Radiusvector, Polhöhe und geographische Länge.

§ 2.

Allgemeines über die Deformirbarkeit der Räume.

Bezogen sich unsre bisherigen Betrachtungen nur auf die Geometrie innerhalb jedes Raumes, so wollen wir uns jetzt mit der Frage beschäftigen, ob gewisse specielle Räume in sogenannten ebenen Räumen, d. h. solchen mit verschwindendem Riemann'schen Krümmungsmaasse, in denen also das Quadrat des Linienelements dargestellt ist durch die Summe der Quadrate der Zuwachse rechtwinkliger Coordinaten, enthalten sein können und inwieweit sie in diesen noch deformirbar sind, d. h. veränderlich ohne Veränderung ihres Linienelements.

In einem ebenen Raume von $n + 1$ Dimensionen werden wir einen beliebigen Raum von n Dimensionen, welcher durch den Anfangspunkt geht und den ebenen Raum $x_{n+1} = 0$ dort tangirt, in der Nähe des Anfangspunktes in rechtwinkligen Coordinaten darstellen können in der Form:

$$(16)\quad x_{n+1} = F(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{n} c_{ik}\, x_i\, x_k + \cdots.$$

Demnach wird das Linienelement dieses Raumes:

$$(17)\quad ds^2 = \sum_{i,k}^{n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\, dx_n\right)^2,$$

also:

$$(18)\quad a_{ii} = 1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 \text{ und } a_{ik} = \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_k} \text{ für } i \lesseqgtr k.$$

Ferner:

$$(19)\quad \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_l}\frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

und

$$(20)\quad \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_l \partial x_m} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_l}\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_m} + \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_l \partial x_m}\frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m}\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Daraus folgt weiter:

$$a_{ii}^0 = 1, \quad a_{ik}^0 = 0 \text{ für } i \lesseqgtr k \text{ und: } \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\right)^0 = 0,$$

ferner:

$$\left(\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_l \partial x_m}\right)^0 = 2(c_{il}\, c_{km} + c_{im}\, c_{kl}).$$

Demnach wird:

$$(21)\qquad (i, k; l, m)^0 = (c_{il}\, c_{km} - c_{ik}\, c_{lm}).$$

Das Riemann'sche Krümmungsmaass hat daher für unsern Raum im Anfangspunkte die Form:

$$(22)\quad K^0 = \frac{\sum_{i,k;l,m}^{n} (c_{ik}\, c_{lm} - c_{il}\, c_{km})\,(dx_i\, \delta x_m - dx_m\, \delta x_i)\,(dx_k\, \delta x_l - dx_l\, \delta x_k)}{\sum_{i;l}^{n} (dx_i \delta x_l - dx_l \delta x_i)^2}.$$

Wäre unser Raum von n Dimensionen nicht in einem ebenen Raume von $n + 1$ Dimensionen enthalten, sondern erst in einem solchen von $n + 2$ Dimensionen, so wäre er definirt durch die Gleichung (16) und durch die zweite:

$$(23)\qquad x_{n+2} = G(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{n} e_{ik}\, x_i\, x_k + \cdots,$$

wobei wir wieder annehmen, dass ihn die beiden ebenen Räume $x_{n+1} = 0$ und $x_{n+2} = 0$ tangiren; dann wird:

$$(24)\qquad a_{ii} = 1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial x_i}\right)^2$$

und

$$a_{ik} = \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial G}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_k} \quad \text{für } i \lesseqgtr k,$$

sodass schliesslich in dem Ausdrucke K^0 nur der Coefficient

$$c_{ik}\, c_{lm} - c_{il}\, c_{km} \quad \text{durch} \quad c_{ik}\, c_{lm} - c_{il}\, c_{km} + e_{ik} e_{lm} - e_{il} e_{km}$$

zu ersetzen ist. In analoger Weise würde, falls unser Raum erst in einem ebenen Raume von $n + m$ Dimensionen liegt, derselbe Coefficient durch eine Summe von m analog gebildeten zu ersetzen sein.

Der Ausdruck (22) erlaubt uns einige, allerdings zunächst nur negative Schlüsse zu ziehen. Stellen wir nämlich die Forderung, dass

durch die Gleichung (16) ein Raum constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses dargestellt sei, so müssen in jenem Ausdrucke die Coefficienten des Zählers denen des Nenners proportional sein, d. h. es muss für $n > 2$ sein:

$$c_{ii} = \sqrt{K^0}, \quad c_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i \lesseqgtr k.$$

Daraus folgt der Satz:

*In einem ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen giebt es, sobald $n > 2$, keinen Raum constanten negativen Krümmungsmaasses von n Dimensionen**).

Einen Raum constanten *positiven* Krümmungsmaasses von n Dimensionen giebt es dagegen stets in einem ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen, nämlich den sogenannten *sphärischen* Raum:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 2r x_{n+1}. \tag{25}$$

Denn für diesen ist in der Nähe des Anfangspunktes:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2r}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + \cdots. \tag{26}$$

Man erkennt ausserdem leicht, dass das Linienelement dieses Raumes nach der Substitution:

$$x_i = \frac{r y_i}{\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2 - R^2}} \tag{27}$$

die Form (7) annimmt, wenn $\varkappa^2 = \frac{1}{r^2}$ gesetzt wird.

Weiterhin aber ergeben sich aus dem für einen in einem $(m+n)$-dimensionalen ebenen Raume gelegenen n-dimensionalen Raume gebildeten Ausdrucke (22) keine Gründe gegen die Existenz eines n-dimensionalen Raumes constanten negativen Krümmungsmaasses in einem ebenen Raume von $n+m$ Dimensionen, wenn $m > 1$, wenigstens nicht ohne eine genauere Discussion der Abhängigkeit der dadurch bedingten Gleichungen von einander. *In der That existirt in einem ebenen Raume von $2n-1$ Dimensionen stets ein n-dimensionaler Raum constanten negativen Riemann'schen Krümmungsmaasses*, nämlich der Raum:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{r^2}{z_n}\cos\frac{z_1}{r}, & x_2 = \frac{r^2}{z_n}\sin\frac{z_1}{r}, \\ x_3 = \frac{r^2}{z_n}\cos\frac{z_2}{r}, & x_4 = \frac{r^2}{z_n}\sin\frac{z_2}{r}, \\ \cdots\cdots\cdots\

wo $-\frac{1}{r^2} = \varkappa^2$ die constante Krümmung ist*); denn man überzeugt sich leicht, dass in den Parametern $z_1, \ldots, z_n$ das Linienelement die Form (13) hat.

Was nun die *Deformirbarkeit* eines Raumes von n Dimensionen in einem ebenen Raume von $n + m$ Dimensionen betrifft, so lässt sich aus dem Ausdrucke (22) wieder nur der Schluss ziehen, dass ein n-dimensionaler Raum in einem ebenen Raume von $n + 1$ Dimensionen für $n > 2$ i. A. nicht so deformirt werden kann, dass im Anfangspunkte die ursprünglichen Anfangsbedingungen erfüllt bleiben. Denn dann müssen die geodätischen Flächen des deformirten Raumes im Anfangspunkte dieselben Krümmungen haben wie die sie berührenden des ursprünglichen Raumes, d. h. die den Ausdrücken $c_{ik}c_{lm} - c_{il}c_{km}$ analogen Ausdrücke müssen gegebene Werthe haben, wodurch die c_{ik} bekanntlich für $n > 2$ vollständig bestimmt sind, vorausgesetzt dass die Unterdeterminanten 3. Ordnung der Discriminante der quadratischen Form (16) nicht sämmtlich verschwinden sollen. Die beiden Räume, der ursprüngliche und seine Deformation haben also im Anfangspunkte nicht nur eine Berührung 1. Ordnung, sondern eine Berührung 2. Ordnung, d. h. sie berühren sich auch in allen dem Anfangspunkte benachbarten Punkten. Da nunmehr für diese Punkte dieselben Schlüsse gelten, so haben sie auch in diesen Berührungen 2. Ordnung, u. s. w. kurz sie fallen zusammen.

Was nun den Fall betrifft, dass jene Unterdeterminanten verschwinden, so ist es zunächst leicht zu sehen, dass jeder ebene n-dimensionale Raum in einem ebenen Raume von $n + 1$ Dimensionen deformirt werden kann. Wir beschränken uns, um dies zu erhärten, darauf eine solche Deformation des ebenen n-dimensionalen Raumes anzugeben, nämlich den durch die Gleichung:

$$x_{n+1} = \varphi(x_1) \tag{29}$$

definirten Raum, dessen Linienelement die Form:

$$ds^2 = dx_1^2(1 + \varphi'(x_1^2)) + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 \tag{30}$$

hat; dasselbe erhält in der That durch die Substitution:

$$z_1 = \int^{x_1} \sqrt{1 + \varphi'(x_1)^2}\, dx_1 \tag{31}$$

für x_1 die Form der Summe der Quadrate der Coordinatenzuwachse,

---

dann von Herrn Monro a. a. O. und neuerdings von Herrn Brill (Bemerkung über pseudosphärische Mannigfaltigkeiten von 3 Dimensionen, diese Ann. Bd. XXVI, p. 1). Der obige Beweis lehnt sich am directesten an das Riemann'sche Kriterium an.

*) Diese Formeln sind für $n = 3$ von Herrn Brill a. a. O. gegeben worden.

kann also als eine Deformation des Raumes $x_{n+1} = 0$ betrachtet werden.

Ja es ist leicht zu sehen, dass auch der durch die Gleichung:

$$x_{n+1} = \varphi(x_1, x_2) \tag{32}$$

definirte Raum stets deformirt werden kann; wir erhalten nämlich solche Deformationen durch jede Deformation der im Raume $x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$ durch die Gleichung (32) dargestellten Fläche. Wir verzichten darauf, was sich leicht erreichen liesse, noch allgemeinere deformirbare Räume aufzustellen, weil darum doch die Frage unentschieden bliebe, ob dies die allgemeinsten Räume von n Dimensionen sind, welche in einem ebenen Raume von $n + 1$ Dimensionen deformirbar sind. Zur Entscheidung dieser Frage muss wohl eine Verallgemeinerung des Riemann'schen Krümmungsmaasses aufgestellt werden, die sich zu den geodätischen Räumen von drei Dimensionen verhält wie dieses zu den geodätischen Flächen.

Bedenken wir noch, dass die Beibehaltung der Anfangsbedingungen in dem allgemeineren Falle offenbar mit einer Festsetzung der Lage der etwaigen Deformation gleichbedeutend ist, so können wir nur das folgende Resultat aussprechen:

Ein Raum von n Dimensionen kann in einem ebenen Raume von $n + 1$ Dimensionen nicht deformirt werden, wenn er nicht besonderen Bedingungen genügt, die in dem Verschwinden aller Unterdeterminanten 3. *Ordnung der Discriminante der quadratischen Form* (16) *ihren Ausdruck finden.*

Herr Killing glaubt zwar diese Bedingungen dahin präcisiren zu können, dass der n-dimensionale Raum eine Schaar $(n-1)$-dimensionaler ebener Räume enthalten muss, „wie nicht näher bewiesen werden soll.“ *) Da ich diesen Beweis nicht kenne, so glaubte ich die obige Formulirung vorziehen zu müssen. Sie genügt z. B. um zu erkennen, worauf es uns hier hauptsächlich ankommt, dass *der n-dimensionale sphärische Raum in einem ebenen Raume von $n + 1$ Dimensionen nicht deformirbar ist.*

Weitere Schlüsse lassen sich wiederum aus den dem verallgemeinerten Ausdrucke (22) entspringenden Gleichungen nicht ziehen, und diejenigen Schlüsse, welche Herr Monro a. a. O. aus denselben, allerdings auf anderem Wege gewonnenen Gleichungen gezogen hat, können als bindend oder erheblich nicht erachtet werden. Denn wenn wir in dem speciellen Falle wenigstens die Bedingungen angeben konnten, unter welchen der *im Allgemeinen* richtige Satz zu gelten aufhört, so dürfte dies in dem allgemeineren Falle sehr schwierig sein. Und in der That lässt sich ein Raum constanter positiver Krümmung

*) S. Killing, a. a. O. p. 238.

von n Dimensionen in einem ebenenen Raume von $n+2$ Dimensionen stets deformiren, was man nach dem Satze des Herrn Monro zunächst nicht vermuthen würde.

Will man, falls ein n-dimensionaler Raum in einem ebenen Raume von $n+m$ Dimensionen soll deformirt werden können, eine im Allgemeinen geltende untere Grenze für m erhalten, so geht man wohl am einfachsten auf die Differentialgleichungen des Problems zurück. Darnach müssen $n+m$ Functionen $x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}$ von n unabhängigen Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ so bestimmt werden, dass die $\frac{1}{2}n(n+1)$ aus den ersten partiellen Differentialquotienten dieser Functionen gebildeten Ausdrücke: $\sum_{i,k}^{n+m} \frac{\partial x_i}{\partial u_l} \frac{\partial x_k}{\partial u_h}$ gleich werden $\frac{1}{2}n(n+1)$ gegebenen Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Diese $\frac{1}{2}n(n+1)$ partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung für $n+m$ Functionen also werden im Allgemeinen nur lösbar sein, wenn $m \geqq \frac{n(n-1)}{2}$.*) Man könnte allerdings daran denken, dass, wenn für $m < \frac{n(n-1)}{2}$ diese $\frac{n(n+1)}{2}$ Differentialgleichungen überhaupt eine Lösung haben, weil ja der n-dimensionale Raum in einem solchen von $n+m$ Dimensionen angenommen ist, sie vielleicht in jedem Falle unendlich viele haben müssten, also auch noch deformirbar wären. Indessen zeigt unser Satz für $m = 1$, dass dem nicht so ist.

§ 3.

Ueber die Deformation der Räume constanter Krümmung.

Wir wollen zunächst beweisen, dass *ein n-dimensionaler Raum constanter positiver Krümmung stets deformirbar ist.*

Man erkennt dies leicht aus den Gleichungen:

$$(33)\quad \begin{cases} x_1 = \frac{\sin \varkappa u}{\varkappa} \cos v_1, \quad x_2 = \frac{\sin \varkappa u}{\varkappa} \sin v_1 \cos v_2, \\ x_3 = \frac{\sin \varkappa u}{\varkappa} \sin v_1 \sin v_2 \cos v_3, \ldots, \\ x_{n-1} = \frac{\sin \varkappa u}{\varkappa} \sin v_1 \sin v_2 \ldots \sin v_{n-2} \cos v_{n-1}, \\ x_n = \frac{\sin \varkappa u}{\varkappa} \sin v_1 \sin v_2 \ldots \sin v_{n-2} \sin v_{n-1}, \\ x_{n+1} = f(u), \quad x_{n+2} = \varphi(u), \end{cases}$$

*) Da $m+n$ partielle Differentialgleichungen für $m+n$ Functionen stets Lösungen mit willkürlichen Functionen haben, so ist wohl die Angabe des Herrn Killing a. a. O. p. 240, dass auch für $m = \frac{n(n-1)}{2}$ besondere Bedingungen zu erfüllen sind, damit eine Deformation möglich sei, nicht richtig.

wodurch nach Formel (15) ein Raum constanten positiven Riemann'schen Krümmungsmaasses definirt ist, sobald:

$$f'(u)^2 + \varphi'(u)^2 = \sin^2 \varkappa u, \tag{34}$$

wobei also noch eine der beiden Functionen ganz willkürlich gewählt werden kann.

Ebenso lässt sich zeigen, dass der durch die Gleichungen (28) dargestellte Raum auf mannigfache Weise deformirbar ist. Denn es ist:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_{2n-1}^2 = \frac{r^2\left(s_n^2 ds_1^2 + (s_n^2 - (n-2)r^2)\, ds_n^2\right)}{s_n^4}. \tag{35}$$

So oft es also gelingt x_1, x_2, x_{2n-1} so als Function von s_1 und s_n darzustellen, dass diese Identität befriedigt wird, so oft ergiebt sich eine Deformation unseres Raumes. Da durch die Form rechts das Linienelement einer auf eine Rotationsfläche abwickelbare Fläche dargestellt ist, *so ist hiermit das Problem der Deformation eines in einem* $(2n-1)$*-dimensionalen ebenen Raume enthaltenen n-dimensionalen Raumes constanten negativen Riemann'schen Krümmungsmaasses auf das Biegungsproblem einer Rotationsfläche in unserm gewöhnlichen Raume zurückgeführt.* Diejenigen Deformationen, welche, wie Herr Brill a. a. O. bemerkt, durch die Beweglichkeit eines solchen Raumes in sich gegeben sind, wären erst dann als wirkliche Deformationen nachgewiesen, wenn gezeigt wäre, dass solche Bewegungen des Raumes in sich auch mit wirklichen Formveränderungen desselben in Bezug auf den ihn enthaltenden ebenen Raum von $2n-1$ Dimensionen verbunden sind. Dies ist zwar wahrscheinlich, aber in Rücksicht auf die Ausnahmefälle, welche beim Uebergange zu höheren Dimensionen einzutreten pflegen, doch nicht selbstverständlich. Da bei unserer Deformationsmethode noch über zwei willkürliche Functionen verfügt werden kann, so dürfte an einer wirklichen Formveränderung nicht zu zweifeln sein.

Es wird zuletzt nicht ohne Interesse sein, wenn wir neben diesen auf der Hand liegenden Deformationsprocessen zunächst in dem speciellen Falle eines dreidimensionalen Raumes constanten positiven Krümmungsmaasses eine andre Deformationsmethode desselben in einem ebenen Raume von 5 Dimensionen angeben, welche noch zwei willkürliche Functionen je einer Variablen enthält. Während wir nämlich die durch die Formeln (33) definirten dreidimensionalen Räume in einem Raume von 5 Dimensionen auffassen können als entstanden durch Rotation einer Curve in einem Raume von drei Dimensionen um eine in diesem befindliche Ebene, was noch eine doppelte Beweglichkeit giebt, können wir auch fragen nach solchen dreidimensionalen Räumen constanten Krümmungsmaasses, die entstanden sind durch Rotation einer Fläche in einem ebenen vierdimensionalen Raume um einen in diesem

befindlichen ebenen Raum von 3 Dimensionen, was nur noch eine einfache Beweglichkeit giebt.*) Solche Räume werden allgemein dargestellt werden können in der Form:

$$(36)\qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(u, v), \quad x_2 = \varphi_2(u, v), \quad x_3 = \varphi_3(u, v), \\ x_4 = \psi(u, v)\cos w, \quad x_5 = \psi(u, v)\sin w. \end{cases}$$

Soll dieser Raum constantes Krümmungsmaass haben und bezeichnen u, v, w Radiusvector, Polhöhe und Länge in ihm, so muss nach (15) sein:

$$(37)\qquad \begin{cases} \sum_1^5 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 = 1, \\ \sum_i^5 \frac{\partial \varphi_i}{\partial u}\frac{\partial \varphi_i}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} = 0, \\ \sum_i^5 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 = \frac{\sin^2 \varkappa u}{\varkappa^2}, \\ \psi^2(u, v) = \frac{\sin^2 \varkappa u}{\varkappa}\sin^2 v. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$(38)\qquad \begin{cases} \sum_i^5 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u}\right)^2 = E = 1 - \cos^2 \varkappa u \sin^2 v, \\ \sum_i^5 \frac{\partial \varphi_i}{\partial u}\frac{\partial \varphi_i}{\partial v} = F = -\frac{\sin \varkappa u \cos \varkappa u}{\varkappa}\sin v \cos v, \\ \sum_i^5 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial v}\right)^2 = G = \frac{\sin^2 \varkappa u}{\varkappa^2}\sin^2 v. \end{cases}$$

Es wird demnach:

$$(39)\qquad E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$= \sin^2 \varkappa u\,du^2 + \left(\cos \varkappa u \cos v\,du - \frac{\sin \varkappa u}{\varkappa}\sin v\,dv\right)^2 = du'^2 + dv'^2,$$

*) Es ist bemerkenswerth, dass in einem ebenen Raume von 4 Dimensionen durch Rotation einer gemeinen Schraubenlinie in einem ebenen dreidimensionalen Raume um eine in diesem befindliche und durch die Axe der Schraubenlinie gehende Ebene eine Fläche constanten positiven Krümmungsmaasses entsteht, wie die Formeln lehren:

$$x_1 = \frac{\sqrt{1-c^2}}{\varkappa}\varkappa u, \quad x_2 = \frac{c}{\varkappa}\cos \varkappa u, \quad x_3 = \frac{c}{\varkappa}\sin \varkappa u \cos \frac{v}{c},$$
$$x_4 = \frac{c}{\varkappa}\sin \varkappa u \sin \frac{v}{c}.$$

wenn gesetzt wird:

$$(40) \qquad u' = \frac{\cos \varkappa u}{\varkappa}, \qquad v' = \frac{\sin \varkappa u}{\varkappa} \cos v.$$

Wir werden daher die Gleichungen (37) auf die allgemeinste Weise befriedigt haben, wenn *wir φ_1, φ_2, φ_3 gleich solchen Functionen von u' und v' setzen, dass φ_1, φ_2, φ_3 die drei rechtwinkligen Coordinaten einer abwickelbaren Fläche darstellen, für welche die Linien $u' = const.$ und $v' = const.$ geodätische Isothermen sind.* Hiermit ist also die Lösung unseres Problems auf die bekanntere zurückgeführt.

Soll diese abwickelbare Fläche die Ebene selbst sein, so können wir $\varphi_1 = u'$, $\varphi_2 = v'$ und $\varphi_3 = 0$ setzen und erhalten den schon bekannten sphärischen Raum. Der nächste einfachere Fall wäre der des Kreiscylinders. Dann können wir setzen:

$$(41) \qquad \varphi_1 = a \cos \frac{u'}{a}, \quad \varphi_2 = a \sin \frac{u'}{a}, \quad \varphi_3 = v',$$

und erhalten den Raum constanten positiven Krümmungsmaasses:

$$(42) \quad \begin{cases} x_1 = a \cos\left(\frac{\cos \varkappa u}{a\varkappa}\right), \quad x_2 = a \sin\left(\frac{\cos \varkappa u}{a\varkappa}\right), \quad x = \frac{\sin \varkappa u}{\varkappa} \cos v, \\ x_4 = \frac{\sin \varkappa u}{\varkappa} \sin v \cos w, \quad x_5 = \frac{\sin \varkappa u}{\varkappa} \sin v \sin w. \end{cases}$$

Würde man für die letzten beiden Gleichungen (36) die Gleichungen setzen:

$$(43) \quad \begin{cases} x_4 = \psi(u, v_1) \cos v_2, \quad x_5 = \psi(u, v_1) \sin v_2 \cos v_3, \\ x_6 = \psi(u, v_1) \sin v_2 \sin v_3, \ldots \\ x_{n+1} = \psi(u, v_1) \sin v_2 \sin v_3 \ldots \sin v_{n-2} \cos v_{n-1}, \\ x_{n+2} = \psi(u, v_1) \sin v_2 \sin v_3 \ldots \sin v_{n-1}, \end{cases}$$

so hätte man auch das Problem der Deformation eines n-dimensionalen Raumes constanter Krümmung in einem ebenen Raume von $n+2$ Dimensionen auf die Biegung der Ebene im gewöhnlichen Raume zurückgeführt, also auch Lösungen des Problems mit zwei willkürlichen Functionen erhalten. Obwohl ich nicht zu behaupten wage, dass hiermit das Problem in allgemeinster Weise gelöst sei, so dürften die obigen Beispiele immerhin der Beachtung werth sein.

Leipzig, im November 1885.

Sur les racines de certaines équations.

(Seconde note.)

Par

André Markoff à St. Pétersbourg.

Soit $V(y, \xi)$ une fonction de deux variables y et ξ.

Nous allons considérer la fonction

$$\varphi_n(y, \xi) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \cdots + p_{n-1} y + p_n, \tag{1}$$

où les coefficients

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$$

sont des fonctions d'une seule variable ξ, qu'on détermine par la condition:

$$\int_a^b \varphi_n(y, \xi)\, V(y, \xi)\, \omega(y)\, dy = 0 \tag{2}$$

pour chaque fonction entière $\omega(y)$ du degré $n - 1$.

Tous les nombres de nos calculs nous supposerons réels.

Outre cela nous supposons, que $V(y, \xi)$ reste constamment positive pour toutes les valeurs considérées de ξ à condition que $a < y < b$.

Alors, comme on sait*), à chaque valeur de ξ correspondent n différentes valeurs de z

$$z = x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

satisfaisantes à l'équation

$$\varphi_n(z, \xi) = 0, \tag{3}$$

et tous ces nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se contiennent entre a et b. Pour les définir mieux on peut supposer

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < b.$$

Le but de cette note consiste dans la démonstration de quelques propositions sur les changements des x_i correspondants aux changements de ξ.

---

*) Heine, Handbuch der Kugelfunctionen. Zweite Auflage p. 286—297.

Théorème.

Si, pour $a < y < b$, *l'on a constamment*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{V}\cdot\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) > 0$$

tous les nombres x_i *croissent, lorsque* ξ *augmente.*

Démonstration.

Différentiant la formule (2) par rapport à ξ, on a

$$\int_a^b \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi} V\omega\, dy + \int_a^b \varphi_n \frac{\partial V}{\partial \xi}\omega\, dy = 0.$$

Posons maintenant dans la dernière formule

$$\omega = \frac{\varphi_n(y,\xi)}{y - x_i}$$

et dans la formule (2)

$$\omega = \frac{\dfrac{\partial \varphi_n(y,\xi)}{\partial \xi} - \dfrac{\partial \varphi_n(x_i,\xi)}{\partial \xi}}{y - x_i}.$$

De cette manière nous trouvons

$$\int_a^b \frac{\partial \varphi_n(y,\xi)}{\partial \xi}\cdot\frac{\varphi_n(y,\xi)}{y-x_i} V dy + \int_a^b \frac{\varphi_n(y,\xi)\cdot\varphi_n(y,\xi)}{y-x_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial \xi} dy = 0$$

et

$$\int_a^b \left(\frac{\partial \varphi_n(y,\xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_n(x_i,\xi)}{\partial \xi}\right)\frac{\varphi_n(y,\xi)}{y-x_i} V dy = 0,$$

d'où il suit

$$(4)\quad \frac{\partial \varphi_n(x_i,\xi)}{\partial \xi}\int_a^b \frac{\varphi_n(y,\xi)}{y-x_i} V dy = -\int_a^b \frac{\varphi(y,\xi)\cdot\varphi_n(y,\xi)}{y-x_i}\cdot\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial \xi} dy.$$

Enfin ayant égard aux égalités

$$\frac{\partial \varphi_n(x_i,\xi)}{\partial x_i}\int_a^b \frac{\varphi_n(y,\xi)}{y-x_i} V(y,\xi)\, dy - \int_a^b \frac{\varphi_n(y,\xi)\cdot\varphi_n(y,\xi)}{(y-x_i)^2} V(y,\xi)\, dy$$

$$= \int_a^b \varphi_n(y,\xi)\cdot\frac{\dfrac{\partial \varphi_n(x_i,\xi)}{\partial x_i}(y-x_i) - \varphi_n(y,\xi)}{(y-x_i)^2} V(y,\xi)\, dy = 0$$

et

$$V(x_i,\xi)\int_a^b \frac{\varphi_n(y,\xi)\,\varphi_n(y,\xi)}{y-x_i}\,\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial\xi}\,dy$$

$$=\int_a^b \left(V(x_i,\xi)\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial\xi}-V(y,\xi)\frac{\partial V(x_i,\xi)}{\partial\xi}\right)\frac{[\varphi_n(y,\xi)]^2\,dy}{y-x_i}$$

il est facile de transformer la formule (4) en ce qui suit

$$\frac{dx_i}{d\xi}=-\frac{\dfrac{\partial\varphi_n(x_i,\xi)}{\partial\xi}}{\dfrac{\partial\varphi_n(x_i,\xi)}{\partial x_i}}$$

$$\cdot\frac{\displaystyle\int_a^b \varphi_n(y,\xi)\,\varphi_n(y,\xi)\cdot\frac{V(x_i,\xi)\dfrac{\partial V(y,\xi)}{\partial\xi}-\dfrac{\partial V(x_i,\xi)}{\partial\xi}V(y,\xi)}{y-x_i}\,dy}{V(x_i,\xi)\displaystyle\int_a^b\left(\frac{\varphi_n(y,\xi)}{y-x_i}\right)^2 V(y,\xi)\,dy} \tag{5}$$

D'autre part d'après la condition, dite plus haut, l'expression

$$\frac{1}{V}\cdot\frac{\partial V}{\partial\xi}$$

doit croître ou décroître en même temps que y augmente ou diminue, et il s'en suit que les différences

$$\frac{1}{V(y,\xi)}\cdot\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial\xi}-\frac{1}{V(x_i,\xi)}\,\frac{\partial V(x_i,\xi)}{\partial\xi}=\frac{V(x_i,\xi)\dfrac{\partial V(y,\xi)}{\partial\xi}-\dfrac{\partial V(x_i,\xi)}{\partial\xi}V(y,\xi)}{V(y,\xi)\cdot V(x_i,\xi)}$$

et

$$y-x_i$$

doivent être de même signe.

Par conséquent le rapport

$$\frac{V(x_i,\xi)\dfrac{\partial V(y,\xi)}{\partial\xi}-\dfrac{\partial V(x_i,\xi)}{\partial\xi}V(y,\xi)}{y-x_i}$$

est un nombre positif.

Donc les deux intégrales de la formule (5) sont positifs et par conséquent $\frac{dx_i}{d\xi}$ est aussi positif; en d'autres termes, x_i et ξ croissent ou décroissent simultanément.

Application.

Posons

$$a=-1,\quad b=+1,\quad V(y,\xi)=\frac{(1+y)^{\alpha\xi}}{(1-y)^{\beta\xi}}\,f(y).$$

Alors

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial \xi} = \alpha \log(1+y) - \beta \log(1-y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{V}\cdot\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) = \frac{\alpha}{1+y} + \frac{\beta}{1-y}.$$

Par conséquent toutes les conditions du théorème précédent seront satisfaites, si l'on a

$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ f(y) > 0 \quad \text{pour} \quad -1 < y < +1.$$

Arrêtons nous sur le cas, où

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(y) = 1,$$

et considérons les fonctions

$$\varphi_n(y, -1),\quad \varphi_n(y, 0),\quad \varphi_n(y, 1).$$

Dans ce cas on peut poser

$$\varphi_n(y, -1) = \frac{\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos y\right\}}{\sqrt{1-y}},$$

$$\varphi_n(y, 0) = \frac{d^n(y^2-1)^n}{dy^n},$$

$$\varphi_n(y, +1) = \frac{\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos y\right\}}{\sqrt{1+y}}$$

et par suite les racines de l'équation $\varphi_n(y, -1) = 0$ en ordre ascendant seront

$$\cos\frac{2n\pi}{2n+1},\ \cos\frac{2(n-2)\pi}{2n+1},\ \cdots,\ \cos\frac{4\pi}{2n+1},\ \cos\frac{2\pi}{2n+1}$$

et les racines de l'équation $\varphi_n(y, +1) = 0$ aussi en ordre ascendant seront

$$\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1},\ \cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1},\ \cdots,\ \cos\frac{3\pi}{2n+1},\ \cos\frac{\pi}{2n+1}.$$

Ayant cela, d'après le théorème précédent il est facile de conclure que les racines de l'équation connue

$$\frac{d^n(y^2-1)^n}{dy^n} = 0$$

se trouvent, une à une, dans les intervalles suivants

$$\left(\cos\frac{2n\pi}{2n+1},\ \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}\right),\ \left(\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1},\ \cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}\right),\ \cdots$$

$$\cdots,\ \left(\cos\frac{2\pi}{2n+1},\ \cos\frac{\pi}{2n+1}\right).$$

Théorème.

Soit

$$\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial \xi} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y}\cdot\left[\frac{(y-e)\,V(y,\xi)}{\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial \xi}}\right] < 0,$$

e étant un nombre compris entre a et b.

Alors $(x_i - e)^2$ *augmente, lorsque* ξ *croit.*

Démonstration.

Il est facile de transformer la formule (5) en ce qui suit

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d(x_i-e)^2}{d\xi}\,V(x_i,\xi)\cdot\int_a^b\left(\frac{\varphi_n(y,\xi)}{y-x_i}\right)^2 V(y,\xi)\,dy$$

$$=\int_a^b \varphi_n(y,\xi)\cdot\varphi_n(y,\xi)\,\frac{(x_i-e)\;V(x_i,\xi)\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial \xi}-(y-e)\,V(y,\xi)\frac{\partial V(x_i,\xi)}{\partial \xi}}{y-x_i}$$

$$+\frac{\partial V(x_i,\xi)}{\partial \xi}\int_a^b \varphi_n(y,\xi)\,\varphi_n(y,\xi)\;V(y,\xi)\,dy$$

et de cette formule notre proposition découle immédiatémment.

Application.

Posons

$$a=-1,\quad b=+1,\quad e=0,\quad V(y,\xi)=(1-y^2)^{-\xi}.$$

Dans ce cas les conditions du théorème précédent sont satisfaites, car

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial \xi} = -(1-y^2)^{-\xi}\log(1-y^2) > 0\\ &\text{et}\\ &\frac{\partial}{\partial y}\cdot\left[\frac{y\cdot V(y,\xi)}{\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial \xi}}\right] = -\frac{\log(1-y^2)+\frac{2y^2}{1-y^2}}{\{\log(1-y^2)\}^2} < 0\end{aligned}\right\}\text{pour } -1<y<+1.$$

Considérant maintenant les fonctions

$$\varphi_n\left(y,\tfrac{1}{2}\right),\quad \varphi_n(y,0),\quad \varphi_n\left(y,-\tfrac{1}{2}\right),$$

qui en vertu de nos positions deviennent

$$\cos(n\arccos y),\qquad \frac{d^n(y^2-1)^n}{dy^n},\qquad \frac{\sin((n+1)\arccos y)}{\sqrt{1-y^2}},$$

nous pouvons conclure, que les racines de l'équation

$$\frac{d^n(y^2-1)^n}{dy^n} = 0$$

sont comprises, une à une, dans les intervalles suivants

$$\left(\cos\frac{\pi}{2n}, \cos\frac{\pi}{n+1}\right), \left(\cos\frac{3\pi}{2n}, \cos\frac{2\pi}{n+1}\right), \left(\cos\frac{5\pi}{2n}, \cos\frac{3\pi}{n+1}\right), \cdots$$

$$\cdots, \left(\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}, \cos\frac{n\pi}{n+1}\right).$$

Ces intervalles sont plus étroits que les précédents.

St. Pétersbourg, le 17. novembre 1885.

Ueber endliche Gruppen linearer Substitutionen, welche in der Theorie der elliptischen Transcendenten auftreten.

Von

Adolf Hurwitz in Königsberg i. Pr.

Einleitung.

Durch die Untersuchungen über die Anwendung der Theorie der elliptischen Modulfunctionen auf die Zahlentheorie, mit welchen ich seit längerer Zeit beschäftigt bin, wurde ich veranlasst einen Theil derjenigen Resultate weiter zu verfolgen, welche Herr Klein in seinen neusten Publicationen über elliptische Modulfunctionen*) dargelegt hat. Ich meine hier namentlich die Sätze über das Verhalten der n-gliedrigen σ-Producte $X_\alpha(u)$ bei linearer Transformation der Perioden ω_1, ω_2**). Diese Sätze habe ich zunächst auf den Fall auszudehnen versucht, welchen Herr Klein ausschliesst, um seinen Entwicklungen eine grössere Gleichmässigkeit zu geben, nämlich den Fall wo die Zahl n einen *geraden* Werth besitzt. Es stellte sich dabei heraus, dass auch in diesem Falle n σ-Producte $X_\alpha(u)$ so definirt werden können, dass dieselben bei linearen Transformationen der Perioden lineare homogene Substitutionen mit rein *numerischen* Coefficienten erfahren. Dieses Resultat und die Untersuchung der Substitutionsgruppe der Functionen $X_\alpha(u)$, welche entsteht, wenn man die Perioden allen möglichen linearen Transformationen unterwirft, bezeichnen den wesentlichen Inhalt der ersten fünf Paragraphen der nächfolgenden Abhandlung. Dabei habe ich jedoch auf's Neue auch die zu ungeraden

*) „Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ter} Stufe," Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften vom 14. November 1884; „Ueber die elliptischen Normalcurven der N^{ten} Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der N^{ten} Stufe," Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 13, No. IV. Letztere Abhandlung soll in der Folge mit *M.* citirt werden. Man findet dort auch zahlreiche Citate auf verwandte Untersuchungen anderer Mathematiker.

**) *M.* § 15—17.

Zahlen n gehörigen $X_\alpha(u)$ behandelt, indem ich stets die beiden Fälle eines geraden und ungeraden n nebeneinander betrachte. Es erschien mir dieses wünschenswerth, um die Analogie und den Unterschied zwischen beiden Fällen deutlich hervortreten zu lassen, abgesehen davon, dass dadurch auch die Klarheit der Darstellung erheblich gewann.

Die weiteren an die erhaltenen Resultate anknüpfenden Entwicklungen sind theils gruppentheoretischer, theils functionentheoretischer Natur, wie sich überhaupt in dieser ganzen Untersuchung beide Disciplinen — Gruppentheorie und Functionentheorie — sich gegenseitig unterstützend in merkwürdiger Weise durchsetzen. Auf der einen Seite ergiebt die functionentheoretische Betrachtung jene σ-Producte $X_\alpha(u)$ und mit ihnen die Existenz gewisser endlicher Gruppen von homogenen linearen Substitutionen. Indem diese letzteren nunmehr vom gruppentheoretischen Standpunkte aus betrachtet werden (in den §§ 6, 9, 11, 13), ergeben sich rein gruppentheoretische Sätze, welche ihrerseits wieder der Functionentheorie neue Resultate zuführen, namentlich unendlich viele neue Systeme von Functionen bilden lehren, die sich bei linearen Transformationen der Perioden ω_1, ω_2 wie die Functionen $X_\alpha(u)$ verhalten (§§ 10, 12, 14, 15).

Diese Herstellung neuer Functionssysteme gründet sich in letzter Instanz auf einen in § 8 abgeleiteten gruppentheoretischen Satz von grosser Allgemeinheit, welcher auch bei anderen Untersuchungen von Vortheil sein dürfte. Derselbe entspringt der Verallgemeinerung einer von Herrn Klein*) für zwei isomorphe Gruppen von homogenen linearen Substitutionen behandelten Aufgabe, welche solche Functionen der Variabeln der einen Gruppe zu bilden verlangt, die sich wie die Variabeln der anderen Gruppe substituiren. Meine Verallgemeinerung besteht darin, dass ich an Stelle von zwei Gruppen deren drei (oder auch beliebig viele), welche in einer dem Isomorphismus zweier Gruppen analogen Beziehung zu einander stehen, betrachte.

Auf die zahlentheoretischen Anwendungen der vorliegenden Untersuchungen denke ich demnächst zurückzukommen. In Rücksicht auf diese Anwendungen habe ich in den Schlussparagraphen einige Bemerkungen über jene überall endlichen Functionen des Periodenverhältnisses $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ aufgenommen, welche unter anderem bei den Classen-

*) „Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade," diese Annalen Bd. 15, pag. 253—255. Für meine Zwecke würden schon die von Herrn Klein entwickelten Resultate ausgereicht haben; doch hätte die Darstellung ihre Eleganz eingebüsst, wenn ich auf die oben erwähnte Verallgemeinerung hätte verzichten wollen. (Vgl. die Anmerkung zu pag. 211.)

zahlrelationen von Wichtigkeit werden. Die Untersuchung dieser Functionen ist es auch gewesen, welche mir die erste Veranlassung zu den nachfolgenden Entwicklungen gegeben hat.

§ 1.

Der Hermite'sche Satz.

Die Elemente, aus denen sich die doppeltperiodischen Functionen zusammensetzen, sind bekanntlich solche eindeutige für alle endlichen Werthe des Argumentes stetige Functionen $X(u)$, welche sich bei Vermehrung des Argumentes um die Perioden ω_1, ω_2 den folgenden Gleichungen gemäss verhalten:

$$(1) \qquad \begin{cases} X(u+\omega_1) = e^{a_1 u + b_1} X(u), \\ X(u+\omega_2) = e^{a_2 u + b_2} X(u). \end{cases}$$

Dabei bedeuten

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2$$

Grössen, welche von u unabhängig sind. Was die Perioden angeht, so will ich gleich hier festsetzen, dass der Quotient

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}$$

einen positiv-imaginären Bestandtheil besitzen soll, was stets (durch eventuelle Vertauschung von ω_1 mit ω_2) erreicht werden kann. Unter dieser Festsetzung ist die Grösse

$$(2) \qquad \frac{a_1\omega_2 - a_2\omega_1}{2\pi i} = n$$

eine positive ganze Zahl, welche angiebt wie häufig $X(u)$ im Periodenparallelogramme verschwindet. Betrachten wir nun alle Functionen, welche zu derselben Zahl n gehören! Es ist dann keine wesentliche Beschränkung, wenn wir nur diejenigen Functionen $X(u)$ berücksichtigen, für welche die Grössen

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2$$

feste Werthe besitzen. Sollte nämlich $\overline{X}(u)$ zu anderen Grössen

$$a_1',\ b_1',\ a_2',\ b_2'$$

gehören, so würde doch bei passender Wahl der Constanten

$$M,\ N,\ k$$

die Function

$$X(u) = e^{M(u-k)^2 - N(u-k)}\,\overline{X}(u-k)$$

zu den ungestrichelten Grössen gehören. Es drückt sich also die allgemeinste Function $\overline{X}(u)$ in der Form

(3) $$\overline{X}(u) = e^{Mu^2+Nu} X(u+k)$$

durch die von uns allein zu betrachtenden $X(u)$ aus. Es ist aber leicht die letzteren Functionen sämmtlich anzugeben. Da nämlich der Quotient irgend zweier eine doppeltperiodische Function mit den Perioden ω_1, ω_2 vorstellt, so lassen sich die Constanten

$$q, r$$

so bestimmen, dass die Functionen

(4) $$\varphi(u) = e^{qu^2+ru} X(u)$$

sämmtlich die Periode ω_1 erhalten. Alsdann wird offenbar:

(5) $$\begin{cases} \varphi(u+\omega_1) = \varphi(u), \\ \varphi(u+\omega_2) = e^{au+b}\varphi(u) \end{cases}$$

und, da die Nullstellen von $\varphi(u)$ mit denen von $X(u)$ übereinstimmen, muss nach Gleichung (2)

$$a = -\frac{2\pi i}{\omega_1} \cdot n$$

sein. Setzen wir nun:

(6) $$z = e^{\frac{2i\pi}{\omega_1}u}, \quad h = e^{\frac{2i\pi}{\omega_1}\cdot\omega_2},$$

Bezeichnungen, welche in der Folge stets beibehalten werden sollen*), so ist $\varphi(u)$ jedenfalls in der Form

$$\varphi(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s z^{-s}$$

darstellbar, da diese Function die Periode ω_1 besitzt.

In Folge der zweiten Gleichung (5) ergiebt sich aber

(7) $$A_{s-n} = e^{-b} h^{-s} A_s$$

und diese Recursionsformel für die Coefficienten A_s zeigt, dass dieselben sich auf die n willkürlich bleibenden Grössen

$$A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$$

reduciren. Wir wollen

$$A_\alpha = c_\alpha \cdot \varrho_\alpha$$

setzen, unter c_α eine willkürlich bleibende und unter ϱ_α eine später fest zu bestimmende Constante verstanden. Alsdann wird die allgemeinste Function $\varphi(u)$ in der Form

*) Die Grössen z, h sind die Weierstrass'schen z^2, h^2. (Siehe die „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen." Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Professor K. Weierstrass, bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz). Im Uebrigen weichen meine Bezeichnungen, wie die des Herrn Klein, nur insofern von den Weierstrass'schen ab, als $2\omega, 2\omega', 2\eta, 2\eta'$ bez. durch $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2$ ersetzt werden.

(8) $$\varphi(u) = c_0\varphi_0(u) + c_1\varphi_1(u) + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(u)$$

und also, in Folge der Gleichung (4), die allgemeinste Function $X(u)$ in der Form

(9) $$X(u) = c_0 X_0(u) + c_1 X_1(u) + \cdots + c_{n-1} X_{n-1}(u)$$

enthalten sein. Dabei ist:

(10) $$\varphi_\alpha(u) = \varrho_\alpha \sum_{-\infty}^{+\infty s} \left(e^{-b} h^{-\frac{n}{2}}\right)^s h^{\frac{(sn-\alpha)^2}{2n}} g^{sn-\alpha}$$

und

(11) $$X_\alpha(u) = e^{-qu^2-ru}\varphi_\alpha(u)$$

gesetzt worden.

Alle Functionen $X(u)$ setzen sich also aus n von einander unabhängigen linear und homogen zusammen, welches der Hermite'sche Satz ist.

Die vorstehende, übrigens wohlbekannte, Betrachtung ergiebt aber zugleich ein (bis auf die Factoren ϱ_α) *bestimmtes* System von n unabhängigen Functionen

$$X_0(u),\ X_1(u),\ \cdots,\ X_{n-1}(u).$$

Und hieran knüpft sich nun die Aufgabe, deren Erledigung unser nächstes Ziel bildet, nämlich:

Man soll diese Functionen $X_\alpha(u)$, insbesondere ihr Verhalten bei linearen Transformationen der Perioden einer eingehenden Untersuchung unterwerfen.

§ 2.

Nähere Bestimmung der Functionen $X_\alpha(u)$. Eigenschaften dieser Functionen.

Das soeben formulirte Problem wird erst dann vollständig bestimmt sein, wenn wir uns über die Wahl der festen Grössen

$$\alpha_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2;\ \varrho_0,\ \varrho_1,\ \cdots,\ \varrho_{n-1}$$

schlüssig gemacht haben. Was die ersten vier Grössen angeht, so verfügen wir über dieselben, indem wir festsetzen, dass die Function

$$[\sigma(u)]^n$$

zu den von uns betrachteten Functionen $X(u)$ gehören soll. Dabei bedeutet $\sigma(u)$ die Weierstrass'sche Function, welche den Gleichungen

(12) $$\begin{cases} \sigma(u+\omega_1) = e^{\eta_1\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)+\pi i}\sigma(u), \\ \sigma(u+\omega_2) = e^{\eta_2\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right)+\pi i}\sigma(u) \end{cases}$$

genügt, während

$$\frac{\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1}{2\pi i} = 1 \tag{13}$$

ist, so dass $\sigma(u)$ eine zur Zahl $n = 1$ gehörige Function $X(u)$ vorstellt. Diese Festsetzung erweist sich für uns darum so zweckmässig, weil die Function $\sigma(u)$ bei allen linearen Transformationen der Perioden ungeändert bleibt, was wir in der Gleichung

$$\sigma(u \mid \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\ \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \sigma(u \mid \omega_1, \omega_2) \tag{14}$$

zum Ausdruck bringen.

Die nunmehr bis auf die Factoren ϱ_α bestimmten Functionen $X_\alpha(u)$ können wir ohne Schwierigkeit durch die Function $\sigma(u)$ darstellen. Da nämlich, zufolge der Gleichung (10)

$$\varphi_\alpha\left(u + \frac{\omega_1}{n}\right) = e^{-\frac{2i\pi}{n}\alpha}\varphi_\alpha(u) \tag{15}$$

und überdies, zufolge (5),

$$\varphi_\alpha(u + \omega_2) = e^{au+b}\varphi_\alpha(u) \tag{16}$$

ist, so lässt sich $\varphi_\alpha(u)$ als eine zu den Perioden $\frac{\omega_1}{n}$, ω_2 gehörige Function $X(u)$ auffassen. Die Zahl der incongruenten Nullstellen dieser Function findet sich (cf. Gleichung (2)) gleich

$$\frac{-a\cdot\frac{\omega_1}{n}}{2\pi i} = 1,$$

und es ist daher nach Gleichung (3) $\varphi_\alpha(u)$ und folglich auch $X_\alpha(u)$ in der Form:

$$X_\alpha(u) = \text{const.}\, e^{M_\alpha u^2 + N_\alpha u}\,\sigma\left(u + k_\alpha \mid \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)$$

darstellbar. Die Grössen M_α, N, k_α bestimmen sich durch die Gleichung (15) und die Forderung, dass

$$\frac{X_\alpha(u)}{[\sigma(u)]^n}$$

die Perioden ω_1 und ω_2 besitzen soll. Das schliessliche Resultat stellt sich am einfachsten dar, wenn wir mit Herrn Klein*):

---

*) *M.* Formel (13). Es ist hier im Exponenten von e nach u das Plus- in das Minuszeichen zu verändern. Zwei andere Druckfehler finden sich in Formel (22), wo es im Exponenten von e $\frac{l\omega_1 + m\omega_2}{2}$ statt $\frac{l\omega_1 + m\omega_2}{n}$ heissen muss, und in Formel (33), wo der Nenner $\sigma(u, \omega_1, \omega_2)^n$ fortgelassen ist. (Einige weitere Unrichtigkeiten sind mir von Hrn. Kiepert mitgetheilt worden; ich lasse dieselben am Schlusse der vorliegenden Arbeit folgen. — F. Klein.)

(17) $\sigma_{x,y}(u \mid \omega_1, \omega_2) = e^{(x\eta_1+y\eta_2)\left(u-\frac{x\omega_1+y\omega_2}{2}\right)} \cdot \sigma(u - x\omega_1 - y\omega_2 \mid \omega_1, \omega_2)$

setzen. Man findet nämlich nach kurzer Rechnung:

(18) $$X_\alpha(u) = \mu_\alpha \cdot e^{-G_1 u^2} \cdot \sigma_{\varepsilon, \varepsilon+\frac{\alpha}{n}}\left(u \mid \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right),$$

wobei

(19) $$\varepsilon = \frac{1}{2} \text{ oder } \varepsilon = 0$$

zu nehmen ist, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Die Bedeutung von G_1 ist aus der Gleichung:

(20) $$G_1 = \frac{n\bar{\eta}_1 - n\eta_1}{2\omega_1} = \frac{\bar{\eta}_2 - n\eta_2}{2\omega_2}$$

ersichtlich, in welcher $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ die Werthe bezeichnen, die η_1, η_2 bei Ersetzung von ω_1 durch $\frac{\omega_1}{n}$ annehmen. Die Grössen μ_α endlich bezeichnen Constanten, deren Fixirung mit einer bestimmten Wahl der Factoren ϱ_α übereinkommt.

Wir reduciren diese Constanten auf eine einzige noch willkürlich bleibende μ, indem wir festsetzen, dass

(21) $$\begin{cases} \mu_\alpha = e^{-\frac{i\pi}{2n}\alpha} \cdot e^{-\frac{5i\pi}{4}} \cdot \mu^*), \text{ oder} \\ \mu_\alpha = (-1)^\alpha \cdot \mu \end{cases}$$

sein soll, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Dadurch erreichen wir einerseits, dass die rechte Seite der Gleichung (18) sich ungeändert reproducirt, wenn die Zahl α um ein Multiplum von n wächst und dass also

$$X_{\alpha+n}(u) = X_\alpha(u)$$

wird, wenn wir, was nunmehr geschehen soll, die Function $X_\alpha(u)$ für einen *beliebigen* ganzzahligen Index α durch die Gleichung (18) definiren. Andererseits gestalten sich durch die getroffene Wahl der Factoren μ_α diejenigen Formeln besonders einfach, zu welchen die Vermehrung des Argumentes u um Perioden-n^{tel} Anlass giebt. Wir haben nämlich nunmehr folgende fundamentalen Relationen**), deren Beweise ich hier unterdrücken kann, da sie gänzlich elementarer Natur sind:

---

*) Der Factor $e^{-\frac{5i\pi}{4}}$, welcher zunächst vollständig willkürlich erscheint und an dieser Stelle auch noch hätte fortbleiben können, ist hinzugesetzt worden, um demnächst (§ 3 Gleichung 27) eine grössere Annäherung zwischen den Formeln für gerade und ungerade Werthe von n zu erzielen.

**) Vgl. *M.* Formeln (58), (59), (60), (62), (63).

$$\text{I)} \quad X_{\alpha+n}(u) = X_\alpha(u),$$

$$\text{II)} \quad X_\alpha(-u) = (-1)^n X_{n-\alpha}(u),$$

$$\text{III)} \quad X_\alpha\left(u + \frac{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2}{n}\right) = (-1)^{n(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot e^{-\frac{2i\pi}{n}\alpha\lambda_1 + \frac{i\pi}{n}\cdot\lambda_1\lambda_2} \cdot e^{(\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2)\left(u+\frac{\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2}{2n}\right)} \cdot X_{\alpha-\lambda_2}(u),$$

$$\text{III}^a) \quad X_\alpha(u) = (-1)^{n\alpha} \cdot e^{\alpha\eta_2\left(u-\frac{\alpha\omega_2}{2n}\right)} \cdot X_0\left(u - \frac{\alpha\omega_2}{n}\right).$$

Dabei bedeuten in der Gleichung III) die Grössen

$$\lambda_1, \lambda_2$$

irgend welche ganze Zahlen; die Gleichung III^a) entsteht aus III), indem man

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \alpha$$

und sodann $u - \frac{\alpha\omega_2}{n}$ an Stelle von u setzt.

Wollen wir den Fall eines geraden n von dem eines ungeraden ausdrücklich unterscheiden, so werden die Vorzeichen

$$(-1)^n, \quad (-1)^{n(\lambda_1+\lambda_2)}, \quad (-1)^{n\alpha}$$

im ersteren Falle sämmtlich gleich $+1$, in letzterem der Reihe nach gleich

$$-1, \quad (-1)^{\lambda_1+\lambda_2}, \quad (-1)^\alpha.$$

§ 3.

Nullstellen der Functionen $X_\alpha(u)$. Darstellung dieser Functionen durch ϑ-Reihen.

Ausser den im vorigen Paragraphen entwickelten Eigenschaften der $X_\alpha(u)$ stelle ich hier noch zwei weitere zusammen, welche für die späteren Untersuchungen unentbehrlich sind. Erstens geben die Nullstellen unserer Functionen zu folgendem Satze Anlass:

Die Function $X_\alpha(u)$ verschwindet an den n Stellen:

$$(22) \quad u = \varepsilon\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{n}\right) + \alpha \cdot \frac{\omega_2}{n} + \varkappa \cdot \frac{\omega_1}{n}, \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

Die Gesammtheit der Nullstellen erhält man, indem man zu diesen n Stellen noch alle ihnen (mod. ω_1, ω_2) congruenten Stellen hinzunimmt.

Dabei ist wie oben

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \varepsilon = 0$$

zu setzen, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Zweitens will ich die Function $X_\alpha(u)$ durch ϑ-Functionen dar-

stellen, eine Darstellung, welche übrigens implicite schon in Gleichung (10) enthalten ist.

Hierbei wird die Discriminante Δ von Wichtigkeit, welche durch den Ansatz:

$$(23) \qquad \sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi}} \cdot \sqrt[24]{\Delta} = h^{\frac{1}{24}} \prod_1^{\infty} (1 - h^r), \quad \left(h = e^{2i\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}}\right)$$

definirt werden kann. Die $\sqrt[24]{\Delta}$ ist als Function von ω_1, ω_2 offenbar nur bis auf das Vorzeichen bestimmt, während das Product $\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi}} \cdot \sqrt[24]{\Delta}$ eine völlig bestimmte einwerthige Function des Quotienten $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ ist, dieselbe Function, welche in den fundamentalen Arbeiten des Herrn Dedekind*) mit $\eta\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ bezeichnet ist. Wir werden in der Folge unter

$$\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^s \cdot \Delta^t$$

stets den Werth

$$\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{s-12t} \cdot \left[\eta\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right]^{24t}$$

verstehen und dieser wird eine bestimmte einwerthige Function von ω_1, ω_2 sein, wenn nur

$$s - 12t \text{ und } 24t$$

ganze Zahlen vorstellen.

Es sollen ferner, wenn erforderlich, die Argumente ω_1, ω_2 in die Bezeichnung von Δ aufgenommen werden, so dass wir

$$\Delta(\omega_1, \omega_2)$$

statt Δ schlechthin schreiben; endlich wollen wir zur Abkürzung:

$$\Delta\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right) = \overline{\Delta}$$

setzen.

Dies vorausgeschickt ist nun bekanntlich

$$(24) \qquad \begin{cases} \sigma(u \mid \omega_1, \omega_2) = \dfrac{e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi}} \cdot \sqrt[8]{\Delta}} \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1} \,\middle|\, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right), \\ \sigma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(u \mid \omega_1, \omega_2) = \dfrac{e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi}} \cdot \sqrt[8]{\Delta}} \cdot e^{\frac{5i\pi}{4}} \vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_1} \,\middle|\, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right), \end{cases}$$

*) „Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen" Crelle's Journal Bd. 83, pag. 265.

Siehe auch die Erläuterungen zu den Riemann'schen Fragmenten über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen in Riemann's Werken pag. 438.

wobei

$$(25)\quad \begin{cases} \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\,\middle|\,\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{s}(-1)^s h^{\frac{(2s+1)^2}{8}} z^{\frac{2s+1}{2}}, \\ \vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_1}\,\middle|\,\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h^{\frac{s^2}{2}} z^s \end{cases}$$

ist. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (18), (19), (21) ergiebt sich daher:

$$(26)\quad X_0(u) = \mu \cdot \frac{e^{\frac{\pi\eta_1}{2\omega_1}u^2}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi n}}\sqrt[8]{\Delta}}\,\vartheta_{1+4\varepsilon}\left(\frac{nu}{\omega_1}\,\middle|\,\frac{n\omega_2}{\omega_1}\right).$$

Ziehen wir noch die Gleichung III[a]) des vorigen Paragraphen zu Hülfe, so erhalten wir folgendes Resultat:

Die Functionen $X_\alpha(u)$ drücken sich durch ϑ-Functionen in nachstehender Weise aus:

$$(27)\quad X_\alpha(u) = \mu \cdot \frac{e^{\frac{\pi\eta_1}{2\omega_1}u^2}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi n}}\sqrt[8]{\Delta}} \cdot (-1)^{n\alpha} z^{-\alpha} h^{\frac{\alpha^2}{2n}}\,\vartheta_{1+4\varepsilon}\left(\frac{nu-\alpha\omega_2}{\omega_1}\,\middle|\,\frac{n\omega_2}{\omega_1}\right),$$

wobei, wie früher $\varepsilon = \frac{1}{2}$ oder $\varepsilon = 0$ zu setzen ist, je nachdem n einen geraden oder einen ungeraden Werth besitzt.

Tragen wir für die ϑ-Functionen ihre Reihenentwicklungen (25) ein, so kommt

$$(28)\quad X_\alpha(u) = \mu \cdot \frac{e^{\frac{\pi\eta_1}{2\omega_1}u^2}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi n}}\sqrt[8]{\Delta}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{s} h^{\frac{(ns-\alpha)^2}{2n}} \cdot z^{ns-\alpha}$$

für einen geraden Werth von n, und

$$(28^a)\quad X_\alpha(u) = \mu \cdot \frac{e^{\frac{\pi\eta_1}{2\omega_1}u^2}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi n}}\sqrt[8]{\Delta}} \cdot \frac{(-1)}{i} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{s}(-1)^s h^{\frac{((2s+1)n-2\alpha)^2}{8n}} z^{\frac{(2s+1)n-2\alpha}{2}}$$

für einen ungeraden Werth von n*).

*) Als n-gliedriges σ-Product stellt sich $X_\alpha(u)$ in der Form

$$f \cdot \mu \cdot \sqrt[12]{\frac{\Delta^n}{\Delta}} \cdot \prod_0^{n-1}{}_k\, \sigma_{\frac{k}{n}+\frac{\varepsilon}{n},\frac{\alpha}{n}+\varepsilon}(u)$$

§ 4.

Lineare Transformation der Perioden.

Nunmehr komme ich zu der Hauptfrage, welche uns hier beschäftigen soll, nämlich wie sich die Functionen $X_\alpha(u)$ gegenüber linearer Transformation der Perioden verhalten. Es treten hier diejenigen Ueberlegungen ein, welche Herr Klein für die zu ungeradem n gehörigen $X_\alpha(u)$ im § 15 seiner Abhandlung „Ueber die elliptischen Normalcurven der N^{ten} Ordnung, und zugehörige Modulfunctionen der N^{ten} Stufe" angestellt hat und die sich ohne Weiteres auf den Fall eines geraden n übertragen. Der Vollständigkeit halber will ich diese Ueberlegungen hier wiederholen, indem ich n als eine beliebige Zahl voraussetze.

In den Quotienten

$$\frac{X_\alpha(u)}{[\sigma(u)]^n}$$

möge statt ω_1, ω_2 respective ω_1', ω_2' gesetzt werden, wo

$$(29) \qquad \begin{cases} \omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2, \end{cases}$$

und a, b, c, d ganze Zahlen der Determinante

$$ad - bc = 1$$

sind. Bei dieser Substitution bleibt $\sigma(u)$ ungeändert; unser Quotient geht also etwa in

$$\frac{X_\alpha'(u)}{[\sigma(u)]^n}$$

über. Offenbar wird aber letzterer Bruch, wie der ursprüngliche, die Perioden ω_1, ω_2 besitzen. Daher ist nach dem Hermite'schen Satze (cf. § 1):

$$(30) \qquad X_\alpha'(u) = c_{\alpha 0} X_0(u) + c_{\alpha 1} X_1(u) + \cdots + c_{\alpha, n-1} X_{n-1}(u),$$

wo die Coefficienten $c_{\alpha\beta}$ von u unabhängige Grössen bedeuten. Diese Gleichung vertritt im Ganzen n Gleichungen, da α die Werthe $0, 1, 2, \cdots, n-1$ annehmen kann. Ihr Inhalt drückt sich in Worten dahin aus, dass die Functionen $X_\alpha(u)$ eine homogene lineare Substitution mit von u unabhängigen Coefficienten erfahren, falls die Perioden einer linearen Transformation (29) unterworfen werden.

---

dar, wobei der Factor f gleich $e^{-\frac{ni\pi}{4}+\frac{3i\pi}{2}\alpha}$ oder $e^{\frac{i\pi}{n}\frac{n+1}{2}\alpha}$ zu nehmen ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Von dieser Darstellung wird jedoch in der Folge kein Gebrauch gemacht. Vgl. wegen (27) und (28[a]) die Gleichungen *M.* (71) und (73).

Was die Bestimmung der Substitutionscoefficienten $c_{\alpha\beta}$ angeht, so lässt sich dieselbe bis zu einem gewissen Punkte fast ohne jede Rechnung ausführen.

Zunächst ist klar, dass von den n Gleichungen (30) nur die erste, also

$$(30^a) \qquad X_0'(u) = c_{00} X_0(u) + c_{01} X_1(u) + \cdots + c_{0,n-1} X_{n-1}(u)$$

aufgestellt zu werden braucht. Denn vermöge der Gleichung III^a) im § 2 geht man von $X_0'(u)$ sofort zu $X_\alpha'(u)$ über, indem man statt u das Argument

$$u - \frac{\alpha\omega_2'}{n} = u - \frac{\alpha c\omega_1 + \alpha d\omega_2}{n}$$

einträgt. Die Coefficienten $c_{0\beta}$ lassen sich ferner im Allgemeinen sämmtlich durch den ersten c_{00} ausdrücken, indem man in (30^a)

$$u + \frac{\lambda\omega_1'}{n} = u + \frac{\lambda a\omega_1 + \lambda b\omega_2}{n}$$

an Stelle von u setzt und sodann die Gleichung III) im § 2 berücksichtigt. Die Bestimmung der Coefficienten $c_{\alpha\beta}$ werden wir vor allem für die beiden Transformationen:

$$(31) \qquad S\begin{cases}\omega_1' = \omega_1,\\ \omega_2' = \omega_1 + \omega_2;\end{cases} \qquad T\begin{cases}\omega_1' = -\omega_2,\\ \omega_2' = \omega_1\end{cases}$$

ausführen. Wir werden dann das ganze System der Substitutionen (30) insofern beherrschen, als sich jede Transformation (29) aus S und T zusammensetzen lässt und also auch jede Substitution (30) durch Zusammensetzung der beiden zu S und T gehörigen Substitutionen erhalten werden kann. Zur Abkürzung werde für einen Augenblick

$$(32) \qquad \frac{\mu}{\sqrt[8]{\Delta}} = \nu$$

gesetzt und mit ν' dasjenige bezeichnet, was aus ν bei Ersetzung von ω_1, ω_2 durch ω_1', ω_2' entsteht.

Ist nun zuerst n eine gerade Zahl, so haben wir nach (26):

$$X_0(u) = \nu \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi n}}}\, \vartheta_3\left(\frac{nu}{\omega_1}\middle|\frac{n\omega_2}{\omega_1}\right)$$

und folglich

$$(S) \qquad X_0'(u) = \nu' \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi n}}} \cdot \vartheta_3\left(\frac{nu}{\omega_1}\middle|\frac{n\omega_2}{\omega_1} + n\right)$$

$$= \frac{\nu'}{\nu} X_0(u).$$

Ebenso erhalten wir der Transformation T entsprechend:

$$(T) \qquad X_0'(u) = \nu' \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt{\frac{-\omega_2}{2\pi n}}} \vartheta_3\left(\frac{-nu}{\omega_2} \,\middle|\, \frac{-n\omega_1}{\omega_2}\right),$$

und wenn wir hier die bekannte Formel für die lineare Transformation von ϑ_3 zu Hülfe ziehen, ergiebt sich nach leichter Zwischenrechnung:

$$(T) \qquad X_0'(u) = \frac{\nu'}{\nu} \cdot \sqrt{i}\sqrt{\frac{1}{n}}\,(X_0(u) + X_1(u) + \cdots + X_{n-1}(u)).$$

Gehen wir nun vermöge der Gleichung III[a]) von X_0' zu X_α' über, so kommt:

Den Transformationen (S) und (T) entsprechend wird respective:

$$(33) \qquad \begin{cases} (S) \quad X_\alpha'(u) = \dfrac{\nu'}{\nu} \cdot e^{\frac{\alpha^2 i\pi}{n}} X_\alpha(u), \\ (T) \quad X_\alpha'(u) = \dfrac{\nu'}{\nu} \cdot \sqrt{\dfrac{i}{n}} \cdot \sum_0^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n}\alpha\beta} X_\beta(u). \end{cases}$$

Ein Blick auf diese Formeln zeigt, dass die Substitutionen der X_α rein numerische Coefficienten erhalten, falls nur $\frac{\nu'}{\nu}$ beide Mal einen numerischen Werth besitzt; oder, anders ausgedrückt, falls ν eine solche Function von ω_1, ω_2 ist, welche sich bei allen linearen Transformationen bis auf einen numerischen Factor reproducirt. Um dieses zu erreichen verfügen wir nun über den noch unbestimmt gebliebenen Factor μ, indem wir

$$\mu = \sqrt[s]{\Delta} \cdot \sqrt[s]{\Delta^2}$$

setzen; dabei werden wir s als eine *ungerade* Zahl annehmen, damit μ und also auch die $X_\alpha(u)$ *eindeutige* Functionen von ω_1, ω_2 werden.

Wenn n nicht wie soeben als gerade sondern als ungerade Zahl vorausgesetzt wird, so führt die analoge Betrachtung zu derselben Annahme für μ.

Was die Zahl s angeht, so ist es für die Untersuchung des Substitutionssystems der X_α gleichgültig, welcher Werth ihr beigelegt wird, da das Verhalten von $\sqrt[s]{\Delta}$ gegenüber linearer Transformation der Perioden bekannt ist. Jedoch ist es zweckmässig eine bestimmte Wahl zu treffen; wir wollen mit Herrn Klein*), für ungerade Werthe von n die Zahl s gleich $-n$ setzen; dagegen sei für gerade Werthe von n die Zahl s gleich 1. Es ist also definitiv:

*) *M.* § 10.

$$(34)\qquad \begin{cases} \mu = \sqrt[8]{\bar{\Delta}\cdot\Delta}, \\ \text{oder } \mu = \sqrt[8]{\dfrac{\bar{\Delta}}{\Delta^n}}, \end{cases}$$

je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Die Substitutionen (33) nehmen nunmehr folgende definitive Gestalt an:

$$(35)\qquad \begin{cases} (S)\quad X_\alpha'(u) = e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{i\pi}{n}\alpha^2} X_\alpha(u), \\ (T)\quad X_\alpha'(u) = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_0^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n}\alpha\beta} X_\beta(u), \end{cases}$$

wo unter $\sqrt{n}$ der positive Werth der Quadratwurzel zu verstehen ist*).

Die entsprechenden Formeln für den Fall eines ungeraden Werthes von n lauten**):

$$(36)\qquad \begin{cases} (S)\quad X'(u) = e^{-\frac{2i\pi}{n}\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} X_\alpha(u), \\ (T)\quad X_\alpha'(u) = \frac{1}{i^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}} \sum_0^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n}\alpha\beta} X_\beta(u). \end{cases}$$

Auch hier ist unter $\sqrt{n}$ der positive Werth der Quadratwurzel zu verstehen.

§ 5.

Untersuchung der bei linearer Transformation der Perioden entstehenden Substitutionsgruppe der $X_\alpha(u)$.

Die Gesammtheit der zu allen möglichen linearen Transformationen (29) der Perioden gehörigen Substitutionen (30) der X_α bildet eine Gruppe homogener linearer Substitutionen, welche nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen aus den beiden Substitutionen (35) bez. (36) erzeugt werden kann. Die nächstliegende Frage ist, wie viele verschiedene Substitutionen diese Gruppe umfasst. Da jeder linearen Transformation der Perioden eine bestimmte Substitution der Gruppe entspricht, so scheint es zunächst als ob die letztere unendlich viele Substitutionen enthält, da es unendlich viele verschiedene Transformationen der Perioden giebt.

*) Setzen wir hier $n = 2$, so haben wir die 48 homogenen Substitutionen von der Determinante 1, welche den 24 Octaederdrehungen entsprechen (vergl. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, p. 38, 39). In der That ist $X_0(u) : X_1(u)$ für $u = 0$ in diesem Falle die Octaederirrationalität.

**) Vgl. *M.* Formeln (106) und (109).

In der That tritt aber eine Reduction dadurch ein, dass immer unzählig vielen linearen Transformationen der Perioden ein und dieselbe Substitution der X_α entspricht.

Sind S_1 und S_2 zwei verschiedene lineare Transformationen der Perioden, so wird ihnen dann und nur dann dieselbe Substitution der X_α entsprechen, falls zu der Transformation

$$S_1 S_2^{-1}$$

die identische Substitution $X_\alpha' = X_\alpha$ gehört. Wir untersuchen deshalb, wann einer Transformation

$$\begin{cases} \omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2 \end{cases}$$

die Identität

$$X_\alpha'(u) = X_\alpha(u)$$

entspricht. Soll dieses eintreten, so müssen jedenfalls die Nullstellen von $X_\alpha'(u)$ mit denen von $X_\alpha(u)$ übereinstimmen.

Nach § 3 muss also die Gesammtheit der Stellen

$$\varepsilon\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{n}\right) + \alpha\frac{\omega_2}{n} + \varkappa\frac{\omega_1}{n} \text{ (mod. } \omega_1, \omega_2)$$

in sich übergehen, falls ω_1', ω_2' an Stelle von ω_1, ω_2 gesetzt werden. Diese Forderung ergiebt die Bedingungen:

$$\left.\begin{matrix} b \equiv 0 \text{ (mod. } 2n) \\ d \equiv 1 \text{ (mod. } n) \end{matrix}\right\}, \quad \text{bezüglich} \quad \left.\begin{matrix} b \equiv 0 \text{ (mod. } n) \\ d \equiv 1 \text{ (mod. } n) \end{matrix}\right\},$$

je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Falls nun die Zahl b durch n theilbar ist, aber über a, c, d keine weiteren Voraussetzungen gemacht werden, ausser dass $ad - bc = 1$ sein soll, so erhält man ohne Schwierigkeit*)

$$X_\alpha' = e^{\frac{i\pi}{n}cd\alpha^2} \cdot (-1)^{\frac{b}{n}c\alpha}\left(\frac{n}{d}\right) \cdot e^{\frac{i\pi}{4}\left[(a-d)\frac{b}{n} + (c-b)d\right]} X_{\frac{b}{2}+d\alpha},$$

bezüglich:

$$X_\alpha' = e^{\frac{i\pi}{n}cd\alpha^2} \cdot (-1)^{(d+c+1)\alpha} \cdot \left(\frac{a}{n}\right) X_{d\alpha},$$

wobei $\left(\frac{n}{d}\right)$ und $\left(\frac{a}{n}\right)$ das Legendre-Jacobische Zeichen vorstellt. Es wird daher für einen geraden Werth von n:

$$X_\alpha' = \left(\frac{n}{d}\right) \cdot e^{\frac{i\pi}{n}cd\alpha^2 + \frac{i\pi}{4}(c-b)d} X_\alpha,$$

*) Dabei ist die Definitionsgleichung (18) zu Grunde zu legen und die Formeln, welche sich auf die lineare Transformation von $\sqrt[8]{\Delta}$ beziehen, zu berücksichtigen.

wenn $b \equiv 0 \pmod{2n}$ und $d \equiv 1 \pmod{n}$; und für einen ungeraden Werth von n kommt:

$$X_\alpha' = (-1)^{(d+c+1)\alpha} e^{\frac{i\pi}{n} cd\alpha^2} X_\alpha,$$

wenn $b \equiv 0 \pmod{n}$ und $d \equiv 1 \pmod{n}$.

Untersuchen wir nun, wann die hier auftretenden Factoren für alle Werthe des Index α sich auf $+1$ reduciren*), so ergiebt sich:

Soll der Transformation

$$\begin{cases} \omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2 \end{cases}$$

die identische Substitution

$$X_\alpha'(u) = X_\alpha(u)$$

entsprechen, so ist dazu nothwendig und hinreichend:

1) *wenn n eine ungerade Zahl ist, dass*

$$a \equiv d \equiv 1, \quad b \equiv c \equiv 0 \pmod{n};$$

2) *wenn n durch 4 theilbar ist, dass*

$$a \equiv d \equiv 1 \pmod{n}, \quad b \equiv c \equiv 0 \pmod{2n},$$

3) *wenn n durch 2 nicht aber durch 4 theilbar ist, dass*

$$a \equiv d \equiv 1 \pmod{n}, \quad b \equiv c \equiv 0 \pmod{2n}$$

und überdiess, falls

$$a \equiv d \equiv 1 + \varkappa n \pmod{4n} \text{ ist},$$
$$b - c \equiv \varkappa(\varkappa + 1)\, n \pmod{4n} \text{ wird}.$$

Insofern die Transformationen von ω_1, ω_2, welche die Functionen $X_\alpha(u)$ ungeändert lassen, durch Congruenzen in Bezug auf den Modul n, $2n$ oder $4n$ charakterisirt werden, sind diese Functionen nach der Ausdrucksweise des Herrn Klein als Modulfunctionen der n^{ten}, $2n^{\text{ten}}$ oder $4n^{\text{ten}}$ Stufe zu bezeichnen.

Es ergiebt sich nun ferner als Antwort auf die eingangs aufgeworfene Frage, dass die Zahl der verschiedenen Substitutionen eine endliche ist. Zur Bestimmung dieser Zahl hat man einmal zu beachten, dass die Anzahl der (mod. n) betrachteten Transformationen (29) sich auf

$$f(n) = n^3\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{q^2}\right)\cdots$$

beläuft, wo $p, q, \ldots$ die verschiedenen in n aufgehenden Primzahlen bedeuten, dass andererseits die Transformationen, welche die X_α un-

*) Dabei ist im Falle eines geraden $n = 2^\varepsilon \cdot n'$ zu beachten, dass

$$\left(\frac{n}{d}\right) = (-1)^{\varepsilon\frac{d^2-1}{8} + \frac{d-1}{2}\cdot\frac{n'-1}{2}}$$

ist.

geändert lassen, sich auf eine einzige (mod. n) bez. auf 4 Transformationen (mod. $2n$), bez. auf 8 Transformationen (mod. $4n$) reduciren.

Daher besteht die Gruppe der Substitutionen der X_α *aus* $N = f(n)$ *oder* $= \frac{1}{4} f(2n)$ *oder* $= \frac{1}{8} f(4n)$ *Substitutionen, je nachdem* $n \equiv 1$ (*mod.* 2) *oder* $n \equiv 0$ (*mod.* 4) *oder* $n \equiv 2$ (*mod.* 4) *ist.*

§ 6.

Spaltung der bisherigen Resultate in einen gruppentheoretischen und einen functionentheoretischen Theil. — Folgerungen.

Bei der gruppentheoretischen Auffassung einer Substitution spielen die Variabeln, welche der Substitution unterworfen werden, nur eine untergeordnete formale Rolle; es sind vielmehr die Coefficienten der Substitution, welche das Wesentliche der letzteren ausmachen. Lassen wir diese Auffassung Platz greifen, so können wir den rein gruppentheoretischen Theil unserer Resultate folgendermassen formuliren:

Aus der Zusammensetzung der beiden Substitutionen (35) oder (36), in welcher jetzt die Zeichen X_α, X_α' nur die Bedeutung der Substitutionsvariabeln besitzen, entsteht eine endliche Gruppe G_N von N Substitutionen. Diese Gruppe ist isomorph auf die unendliche Gruppe T_∞ bei zwei Variabeln

$$\begin{cases} \omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2, \end{cases} \quad ad - bc = 1$$

bezogen, und zwar entspricht jeder Substitution der Gruppe T_∞ *eine* Substitution der Gruppe G_N, während umgekehrt jeder Substitution von G_N unendlich viele Substitutionen von T_∞ correspondiren. Diese letzteren bilden nur eine Classe (mod. n) oder 4 Classen (mod. $2n$) oder 8 Classen (mod. $4n$), je nachdem $n \equiv 1$ (mod. 2) oder $n \equiv 0$ (mod. 4) oder $n \equiv 2$ (mod. 4) ist.

Dabei sind zwei Substitutionen von T_∞, etwa $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ in eine Classe modulo einer Zahl s zu rechnen, falls

$$a \equiv a',\ b \equiv b',\ c \equiv c',\ d \equiv d' \text{ (mod. } s) \text{ ist.}$$

Sind nun überhaupt irgend zwei isomorphe Substitutionssysteme gegeben, so kann man sich die Aufgabe stellen, Functionen der Variabeln des einen Systems zu construiren, welche sich wie die Variabeln des anderen Systems substituiren.*)

---

*) Dabei muss der Isomorphismus so beschaffen sein, dass jeder Substitution des einen Systems nur *eine* Substitution des andern entspricht, während umgekehrt jeder Substitution dieses Systems beliebig viele Substitutionen des ersten corre-

In dem vorliegenden Falle lösen offenbar die Functionen $X_\alpha(u)$ diese Aufgabe und hiermit ist gleichzeitig der *functionentheoretische* Theil unseres Resultates gekennzeichnet, nämlich:

Die Functionen $X_\alpha(u)$ sind Functionen der Variabeln ω_1, ω_2, welche sich wie die Variabeln der Gruppe G_N substituiren, wenn ω_1, ω_2 den Substitutionen der Gruppe T_∞ unterworfen werden.

Man beachte, dass hierbei das Argument u als eine feste Grösse anzunehmen ist, so dass man den unendlich vielen Werthen von u entsprechend unendlich viele Systeme von Functionen der Grösse ω_1, ω_2 erhält, welche sämmtlich unserer Aufgabe Genüge leisten.

Betrachten wir nun das Substitutionssystem (35) oder (36) vom gruppentheoretischen Standpunkte, so interessirt uns vor allem das System der contragredienten Variabeln. Verlangen wir nämlich die Y'_α als homogene lineare Functionen der Y_α so zu bestimmen, dass

$$X_0' Y_0' + X_1' Y_1' + \cdots + X_{n-1}' Y_{n-1}' = X_0 Y_0 + X_1 Y_1 + \cdots + X_{n-1} Y_{n-1}$$

wird, so erhalten wir jeder Substitution der X entsprechend eine Substitution der „contragredienten" Variabeln Y.

Wollen wir die zu (S) und (T) gehörigen contragredienten Substitutionen aufstellen — aus welchen sich offenbar alle anderen erzeugen lassen — so bedarf es bei (S) nur eines Blickes auf die Formel (35) bez. (36) um die betreffende Substitution sofort hinzuschreiben. Dagegen hat man bei (T) zunächst die inverse Substitution zu bilden. Man verificirt ohne Weiteres, dass diese folgendermassen lauten:

bei (35):
$$X_\alpha = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_0^{n-1} {}_\beta\, e^{-\frac{2i\pi}{n}\alpha\beta} X'_\beta,$$

bei (36):
$$X_\alpha = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{i^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}} \sum_0^{n-1} {}_\beta\, e^{-\frac{2i\pi}{n}\alpha\beta} X'_\beta.$$

Nunmehr ergiebt eine leichte Rechnung folgende erzeugenden Substitutionen für die contragredienten Variabeln Y_α:

---

spondiren dürfen. — Die Aufgabe ist für den Fall, dass beide Substitutionssysteme nur endlich viele Substitutionen enthalten, von Herrn Klein (über Gleichungen 7ten und 8ten Grades, diese Annalen, Bd. 15, p. 251) gelöst worden. Da man die im Texte vorkommende Gruppe T_∞ durch die endliche Gruppe der mod. n, $2n$ oder $4n$ betrachteten linearen Transformationen von ω_1, ω_2 ersetzen kann, so sind die allgemeinen Sätze des Hrn. Klein auf den im Texte vorliegenden Fall anwendbar. Hierher gehörige Entwickelungen giebt Herr Morera unter der Voraussetzung, dass n eine ungerade Primzahl sei, in der Note „Ueber einige Bildungsgesetze etc.", diese Annalen Bd. 25, pag. 203. Herr Morera behandelt indess nicht direct das System der X_α, sondern zieht andere in der Litteratur vorkommende Substitutionssysteme von verwandtem Charakter in Betracht.

$$(37)\qquad \begin{cases} (S) & Y'_\alpha = e^{-\frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{n}\alpha^2}\, Y_\alpha, \\ (T) & Y'_\alpha = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_0^{n-1} e^{-\frac{2i\pi}{n}\alpha\beta}\, Y_\beta, \end{cases}$$

wenn n eine gerade Zahl ist, und

$$(38)\qquad \begin{cases} (S) & Y'_\alpha = e^{\frac{2i\pi}{n}\cdot\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}\, Y_\alpha, \\ (T) & Y'_\alpha = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{i^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}} \sum_0^{n-1} e^{-\frac{2i\pi}{n}\alpha\beta}\, Y_\beta, \end{cases}$$

wenn n eine ungerade Zahl ist.

Eine andere Bemerkung, welche sich beim Anblick der Substitutionen (35), (36) aufdrängt, ist diese: Bekanntermassen ist*)

$$(a)\qquad i^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-3)}{8}} \sum_0^{n-1} e^{\alpha^2\cdot\frac{2\pi i}{n}}$$

wenn n eine ungerade Zahl ist, und

$$(b)\qquad \sqrt{n} = \frac{1}{1+i} \sum_0^{n-1} e^{\alpha^2\cdot\frac{2\pi i}{n}}$$

wenn n durch 4 theilbar ist, also auch

$$(c)\qquad \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)} \sum_0^{2n-1} e^{\alpha^2\cdot\frac{2\pi i}{2n}} = \frac{1}{2\cdot e^{\frac{i\pi}{4}}} \cdot \sum_0^{2n-1} e^{\alpha^2\cdot\frac{2\pi i}{2n}}$$

wenn n durch 2 theilbar ist.

Es sind daher die Coefficienten der Substitutionen (36) als rationale Functionen von $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ mit ganzzahligen Coefficienten darstellbar. Desgleichen können die Coefficienten der Substitutionen (35) als ebensolche Functionen von $e^{\frac{2i\pi}{2n}}$ oder von $e^{\frac{2i\pi}{4n}}$ aufgefasst werden, je nachdem $n \equiv 0$ oder $n \equiv 2 \pmod 4$ ist. Dieser Charakter der Coefficienten bleibt offenbar auch bei der Zusammensetzung der Substitutionen gewahrt. Da nun wegen der Irreductibilität der Kreistheilungsgleichungen jede rationale Function von $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ mit rationalen Zahlencoefficienten,

*) Siehe z. B. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von R. Dedekind, I. Supplement.

welche den Werth 0 oder 1 besitzt, diesen Werth behält, wenn $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ durch $e^{\varrho\cdot\frac{2i\pi}{n}}$ ersetzt wird, wenn ϱ relative Primzahl zu n ist, so folgt:

Setzt man in den Formeln (35) *bez.* (36) *überall* e^{ϱ} *an Stelle von* e, *wo* ϱ *eine relative Primzahl zu* n *bedeutet, so entstehen je zwei neue Substitutionen, aus deren Zusammensetzung ein zu dem Substitutionssystem der bez.* X_α *holoedrisch isomorphes Substitutionssystem hervorgeht.*

Bei dieser Ersetzung von e durch e^{ϱ} hat man nur zu beobachten, dass die Grössen $i^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}$, $\sqrt{n}$ durch die Formeln (a)—(c) auszudrücken sind. Es ist also bezüglich zu ersetzen:

$$i^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n} \quad \text{durch} \quad \left(\frac{\varrho}{n}\right)\cdot i^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n},$$

$$\sqrt{n} \quad \text{durch} \quad \left(\frac{n}{\varrho}\right)\cdot\sqrt{n}^{*})$$

je nachdem n ungerade oder gerade ist. Die im vorigen Satze bezeichneten Substitutionssysteme werden also bezüglich durch die folgenden erzeugenden Substitutionen zu definiren sein:

$$(39)\qquad \begin{cases} (S) & X'_\alpha = e^{\varrho\frac{i\pi}{4}+\varrho\frac{i\pi}{n}\alpha^2}X_\alpha, \\ (T) & X'_\alpha = -\dfrac{1}{\left(\frac{n}{\varrho}\right)\sqrt{n}}\sum_0^{n-1}{}_\beta\, e^{\varrho\cdot\frac{2i\pi}{n}\alpha\beta}X_\beta \end{cases}$$

und

$$(40)\qquad \begin{cases} (S) & X'_\alpha = e^{-\varrho\cdot\frac{2i\pi}{n}\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}X_\alpha, \\ (T) & X'_\alpha = \dfrac{1}{\left(\frac{\varrho}{n}\right)\cdot i^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}}\sum_0^{n-1}{}_\beta\, e^{\varrho\cdot\frac{2i\pi}{n}\alpha\beta}X_\beta, \end{cases}$$

wobei sich wieder das erste System auf den Fall eines geraden, das zweite auf den Fall eines ungeraden Werthes von n bezieht.

---

*) Man kann bei der Bestimmung des Factors $\left(\frac{n}{\varrho}\right)$ statt von den Formeln (b), (c) auch von der Bemerkung ausgehen, dass, wenn $n = 2^\varepsilon\cdot n'$ gesetzt wird,

$$\sqrt{n} = 2^{\frac{\varepsilon}{2}}\, i^{-\frac{n'-1}{2}}\cdot\left(i^{\frac{n'-1}{2}}\sqrt{n'}\right)$$

der

$$= 2^{\frac{\varepsilon-1}{2}}\left(e^{-\frac{i\pi}{4}}+e^{\frac{i\pi}{4}}\right)i^{-\frac{n'-1}{2}}\left(i^{\frac{n'-1}{2}}\sqrt{n'}\right)$$

ist, je nachdem ε einen geraden oder ungeraden Werth besitzt.

Ausdrücklich muss hier hervorgehoben werden, dass in diesen Formeln die Zeichen X_α nur die Rolle der Substitutionsvariabeln spielen und zunächst keinerlei functionentheoretische Bedeutung besitzen. Vielmehr ist es eine neue sich hier anknüpfende Frage, wie die Substitutionssysteme (39) und (40) functionentheoretisch zu realisiren sind, also die Frage nach solchen Functionen von ω_1, ω_2, welche sich bei den linearen Transformationen (S) und (T) der Grössen ω_1, ω_2 gemäss den Gleichungen (39) bez. (40) substituiren.

Solche Functionen (welche wir in der Folge auf mannigfache Weise bilden werden) lassen sich für gewisse Werthe der Zahl ϱ sehr leicht angeben. Man setze nämlich

$$Z_\alpha(u) = X_{\varkappa\alpha}(u), \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{41}$$

wo $\varkappa$ irgend eine relative Primzahl zu n bedeutet, so dass die Functionen $Z_\alpha(u)$ in ihrer Gesammtheit mit den $X_\alpha(u)$ identisch sind. Dann ergiebt sich für die $Z_\alpha(u)$ folgendes Substitutionssystem:

$$\begin{cases} (S) & Z'_\alpha(u) = e^{\varkappa^2\left(\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi}{n}\alpha^2\right)} Z_\alpha(u), \\ (T) & Z'_\alpha(u) = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_0^{n-1}{}_\beta e^{\varkappa^2 \cdot \frac{2i\pi}{n}\alpha\beta} Z_\beta(u), \end{cases} \tag{42}$$

wenn n eine gerade Zahl ist, und

$$\begin{cases} (S) & Z'_\alpha(u) = e^{-\varkappa^2 \cdot \frac{2i\pi}{n} \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}\alpha\beta} Z_\alpha(u) \\ (T) & Z'_\alpha(u) = \frac{1}{i^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}} \sum_0^{n-1}{}_\beta e^{\varkappa^2 \cdot \frac{2i\pi}{n}\alpha\beta} Z_\beta(u), \end{cases} \tag{42a}$$

wenn n eine ungerade Zahl ist. Die Functionen $Z_\alpha(u)$ realisiren also die Systeme (39), (40), falls die Zahl ϱ eine Quadratzahl, oder einer solchen modulo $2n$, $4n$ oder n congruent ist.

Hat n einen geraden Werth, so führen wir durch die Gleichungen

$$W_\alpha(u) = (-1)^\alpha X_{\varkappa\alpha + \frac{n}{2}}(u), \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{43}$$

in welchen $\varkappa$ wieder eine relative Primzahl zu n bedeutet, ein Functionssystem ein, welches sich folgendermassen substituirt:

$$\begin{cases} (S) & W'_\alpha(u) = e^{(\varkappa^2+n)\left(\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi}{n}\alpha^2\right)} W_\alpha(u), \\ (T) & W'_\alpha(u) = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_0^{n-1}{}_\beta e^{(\varkappa^2+n)\cdot\frac{2i\pi}{n}\alpha\beta} W_\beta(u). \end{cases} \tag{44}$$

Es werden also die Substitutionssysteme (39), in welchen ϱ einem Werthe der Form $x^2 + n$ modulo $2n$ oder $4n$ congruent ist, durch die Functionen $W_\alpha(u)$ realisirt.

§ 7.

Grössen erster Stufe, welche aus den Functionen $X_\alpha(u)$ zusammengesetzt sind.

Es sei gestattet hier beiläufig einige Folgerungen aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen zu ziehen, welche mir der Beachtung werth erscheinen. Wenn die Zahl x so bestimmt werden kann, dass die Congruenz

$$x^2 \equiv -1 \pmod{n}$$

erfüllt ist, so geht offenbar das Substitutionssystem (42a) in das der contragredienten Variabeln Y_α (38) über. Es wird dann folglich

$$\sum_0^{n-1\alpha} X_\alpha(u)\, Z_\alpha(v) = \sum_0^{n-1\alpha} X_\alpha(u)\, X_{x\alpha}(v) \tag{45}$$

bei allen linearen Transformationen von ω_1, ω_2 invariant bleiben, also eine Grösse „erster Stufe" sein, wenn wir die Terminologie des Herrn Klein gebrauchen.

Ist n nicht, wie soeben vorausgesetzt wurde, eine ungerade sondern eine gerade Zahl, für welche die Congruenz

$$x^2 \equiv -1 \pmod{n}$$

lösbar ist (woraus folgt, dass n das Doppelte einer ungeraden Zahl sein muss), so wird der Ausdruck (45) zwar bei (T) nicht aber bei (S) invariant bleiben. Jedoch tritt die Invarianz bei S^2 wieder ein und der Ausdruck (45) ist also in dem jetzt betrachteten Falle eine Invariante der durch Zusammensetzung von (T) und (S^2) entstehenden Gruppe. Diese besteht, wie nach bekannten Principien leicht festzustellen ist, aus allen linearen Transformationen von ω_1, ω_2, welche (mod. 2) mit (T) oder (S^2) in dieselbe Classe gehören.

Wir können aber auch für gerade Werthe von n Invarianten für die *ganze* Gruppe der linearen Transformationen bilden.

Eine leichte Rechnung ergiebt nämlich, dass der Ausdruck

$$\sum_0^{n-1\alpha} X_\alpha(u)\, W_\alpha(v) = \sum_0^{n-1\alpha} (-1)^\alpha X_\alpha(u)\, X_{x\alpha+\frac{n}{2}}(v)$$

bei (T) invariant ist und bei (S) das Vorzeichen wechselt.

Dieselbe Eigenschaft besitzt $\sqrt{\Delta}$; folglich wird

$$(46) \qquad \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{0}^{n-1} (-1)^{\alpha} X_{\alpha}(u) X_{\varkappa\alpha+\frac{n}{2}}(v)$$

ein absolute Invariante sein.

Man wird vermuthen, dass die Functionen (45) und (46) sich in einer solchen Form darstellen lassen, in welcher ihre Invarianteneigenschaft sofort in die Augen springt. Es gelingt dies in der That auf folgendem Wege.

Da zu jeder Wurzel $\varkappa$ der Congruenz

$$\varkappa^2 \equiv -1 \pmod{n}$$

eine eigentliche Darstellung der Zahl n in der Form

$$(47) \qquad n = \nu^2 + \varrho^2$$

gehört, welche dadurch als zu jener Wurzel gehörig charakterisirt ist, dass die Congruenz

$$\varrho \equiv \varkappa \nu \pmod{n}$$

besteht, so können wir die Functionen (45) auch durch die Summe

$$(48) \qquad J = \sum_{0}^{n-1} X_{\nu\alpha}(u) \cdot X_{\varrho\alpha}(v)$$

darstellen. Man trage hier die Reihenentwickelungen (28a) der X_{α} ein, wobei der Werth (34) von μ zu berücksichtigen ist; dann kommt:

$$(49) \qquad J = -\frac{e^{\frac{n\eta_1}{2\omega_1}(u^2+v^2)}}{\frac{\omega_1}{2\pi n}\cdot\sqrt{\Delta^n}} \sum (-1)^{\alpha(\varrho+\nu)+s+s'} h^{\frac{S^2+S'^2}{8n}} \varepsilon^{\frac{S}{2}} \varepsilon_1^{\frac{S'}{2}},$$

wo das Summenzeichen über α, s, s' zu erstrecken, $\varepsilon_1 = e^{\frac{2i\pi v}{\omega_1}}$ gesetzt ist und unter S, S' die Ausdrücke

$$S = (2s+1)n - 2\nu\alpha,$$
$$S' = (2s'+1)n - 2\varrho\alpha$$

zu verstehen sind. Wir führen jetzt neue Summationsbuchstaben x und y ein, indem wir

$$S = \nu x + \varrho y,$$
$$S' = \varrho x - \nu y$$

setzen. Man überzeugt sich ohne Schwierigkeit, dass jede zulässige Combination S, S', und jede nur einmal entsteht, wenn x, y alle ungeraden Zahlen durchlaufen. Ferner zeigt sich, dass der Exponent von -1 in der Gleichung (49) congruent

$$\frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{2} + \varrho - 1 \pmod{2} \quad \text{ist.}$$

Daher folgt:

$$(50)\quad J = (-1)^{\varrho} \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_1}{2\omega_1}(u^2+v^2)}}{\frac{\omega_1}{2\pi n}\sqrt{\Delta^n}} \sum (-1)^{\frac{x-1}{2}+\frac{y-1}{2}} h^{\frac{x^2+y^2}{8}} \cdot z^{\frac{\nu x+\varrho y}{2}} z_1^{\frac{\varrho x+\nu y}{2}}.$$

Die Summe rechter Hand zerfällt aber sofort in das Product zweier ϑ-Reihen. Substituirt man für diese aus den Gleichungen (24), (25) ihre Ausdrücke durch die σ-Function, so kommt nach leichter Rechnung folgendes Resultat, bei dessen Ausspruch das Zeichen J wieder durch seinen Werth (48) ersetzt werden möge:

Bezeichnet n eine ungerade Zahl, welche eine eigentliche Darstellung, in der Form

$$n = \nu^2 + \varrho^2$$

zulässt, so hat man für die zu dieser Zahl n gehörigen Functionen $X_\alpha(u)$ die nachstehende Relation:

$$(51)\quad \sum_0^{n-1} X_{\nu\alpha}(u) \cdot X_{\varrho\alpha}(v) = \frac{(-1)^{\varrho+1} \cdot n}{\Delta^{\frac{n-1}{4}}} \sigma(\nu u + \varrho v) \cdot \sigma(\varrho u - \nu v).$$

In dieser Darstellung tritt die Invarianteneigenschaft der Summe linker Hand unmittelbar in Evidenz, da die einzelnen Factoren der rechten Seite bei allen linearen Transformationen der Perioden ω_1, ω_2 ungeändert bleiben.

Auf analoge Weise lassen sich die Summen (46) umformen, wobei man zu folgendem Satze gelangt:

Bezeichnet n das Doppelte einer ungeraden Zahl, welches eine eigentliche Darstellung in der Form

$$n = \nu^2 + \varrho^2$$

zulässt, so hat man für die zu dieser Zahl n gehörigen Functionen $X_\alpha(u)$ die nachstehende Relation:

$$(52)\quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_0^{n-1} (-1)^\alpha X_{\nu\alpha}(u) \cdot X_{\varrho\alpha+\frac{n}{2}}(v) = (-1)^{\frac{\nu+\varrho+2}{2}} \cdot n \cdot \sigma(\nu u + \varrho v)\sigma(\varrho u - \nu v).$$

Aus den Relationen (51) und (52), welche schon als bemerkenswerthe ϑ-Relationen Interesse verdienen, lassen sich eine grosse Zahl weiterer Resultate gewinnen*), worauf ich jedoch an dieser Stelle nicht eingehen will, um mich nicht zu sehr von dem Zwecke dieser Abhandlung zu entfernen.

*) Z. B. Durch Vermehrung von u und v um n^{te} Theile von Perioden.

§ 8.

Aufstellung und Lösung eines gruppentheoretischen Problemes.

Die Beziehung, welche man als Isomorphismus zweier Gruppen zu bezeichnen pflegt, lässt sich dahin erklären, dass es möglich sei, die Substitutionen der Gruppen zu paaren, dergestalt, dass jedes Paar aus einer Substitution R_1 der einen und einer Substitution R_2 der anderen Gruppe besteht und dass gleichzeitig mit den Paaren (R_1, R_2) (R_1', R_2') auch das Paar $(R_1 R_1', R_2 R_2')$ auftritt. Ueberdiess wird noch verlangt, dass jede in den beiden Gruppen enthaltene Substitution mindestens in Einem Paare vorkommt, weil man es sonst nicht mit den ganzen Gruppen, sondern mit Untergruppen derselben zu thun hätte.

Diese auf zwei Gruppen bezügliche Erklärung lässt sich leicht auf den Fall ausdehnen, dass man beliebig viele Gruppen simultan betrachtet. Es wird genügen, dieses für den Fall dreier Gruppen näher zu begründen.

Unter einem „Tripel" verstehe man die Zusammenstellung von drei Substitutionen R_1, R_2, R_3, welche der Reihe nach der ersten, zweiten, dritten Gruppe angehören. Wenn nun ein System von Tripeln existirt von solcher Beschaffenheit, dass gleichzeitig mit den Tripeln (R_1, R_2, R_3) und (R_1', R_2', R_3') auch $(R_1 R_1', R_2 R_2', R_3 R_3')$ dem Systeme angehört und dass jede den Gruppen angehörige Substitution mindestens in einem Tripel vorkommt, so ist hierdurch im Allgemeinen eine bestimmte Beziehung zwischen den drei Gruppen gekennzeichnet. Diese Beziehung ist die Verallgemeinerung des Begriffes „Isomorphismus zweier Gruppen", welche ich darlegen wollte.

Es giebt einen Fall, in welchem aus der Existenz eines Tripelsystems (ebenso wie bei zwei Gruppen aus der Existenz eines Paarsystems) keinerlei innere Beziehung zwischen den Gruppen gefolgert werden kann, nämlich den Fall, in welchem je drei (zwei) beliebig aus den Gruppen ausgewählte Substitutionen ein Tripel (Paar) bilden, welches dem Systeme angehört.

Aus der Erklärung des Tripelsystems und dem Begriffe der Gruppe ergeben sich die folgenden Sätze:

Man theile die N Tripel eines Systems in Classen ein, indem man in eine Classe alle diejenigen rechnet, welche ein und dieselbe Substitution R_1 der ersten Gruppe enthalten. Es entstehen dabei offenbar so viele Classen, als die erste Gruppe Substitutionen R_1 enthält, d. h. als die Ordnung n_1 der ersten Gruppe angiebt. Man beweist nun leicht, dass in jeder Classe ebenso viele Tripel enthalten sind, wie in jeder anderen. Nennen wir diese Anzahl μ_1, so wird

$$n_1 \cdot \mu_1 = N$$

und ebenso

$$n_2 \cdot \mu_2 = n_3 \cdot \mu_3 = N$$

sein, wen n_2, μ_2, n_3, μ_3 die analoge Bedeutung für die zweite, dritte Gruppe besitzen, wie n_1, μ_1 für die erste Gruppe.

Theilen wir ferner die oben erwähnten Classen in Unterclassen, indem wir immer diejenigen Tripel zusammenfassen, welche ein und dieselbe Substitution R_2 der zweiten Gruppe enthalten, so umfasst auch jede Unterclasse eben so viele Tripel wie jede andere. Wir bezeichnen diese Zahl mit ν_3. Die analoge Bedeutung besitzen die Zeichen ν_1, ν_2.

Wir können die Zahlen μ, ν ersichtlich auch so definiren:

Es giebt $\mu_1 (\mu_2, \mu_3)$ den Grad der Beweglichkeit an, welcher einem Tripel bleibt, wenn wir die erste (zweite, dritte) Substitution des Tripels fixiren. Ferner giebt $\nu_3(\nu_1, \nu_2)$ den Grad der Beweglichkeit des Tripels an, wenn die erste und zweite (zweite und dritte, erste und dritte) Substitution des Tripels fixirt wird.

Da endlich in jedem Tripelsystem das Tripel (1, 1, 1) auftritt, so kann z. B. ν_1 auch als die Zahl der verschiedenen in dem Systeme enthaltenen Tripel $(R_1, 1, 1)$ erklärt werden.

Auf eine weitere Untersuchung der Tripelsysteme brauche ich hier nicht einzugehen, da dieselbe für die folgenden Entwicklungen nicht nöthig ist.

Es seien jetzt die drei Gruppen, aus welchen das Tripelsystem gebildet ist, Gruppen von homogenen linearen Substitutionen.

Die Variabeln der ersten, zweiten, dritten Gruppe seien bez.

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}; \quad y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}; \quad z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}.$$

Ferner werde die Voraussetzung eingeführt, dass jedes Tripel des Systems durch seine zweite und dritte Substitution eindeutig bestimmt ist; mit anderen Worten, es werde vorausgesetzt, dass die Zahl $\nu_1 = 1$ ist. Dann kann man die Aufgabe stellen, *solche n Functionen der Variabeln y, z zu bilden, welche sich wie die Variabeln x substituiren, wenn die y und z den Substitutionen R_2, R_3, welche in den Tripeln (R_1, R_2, R_3) vorkommen, simultan unterworfen werden.*

Man wird in dieser Aufgabestellung sofort die Verallgemeinerung derjenigen Frage erkennen, welche Herr Klein bei zwei isomorphen Gruppen linearer Substitutionen behandelt hat, und welche oben im § 6 berührt wurde. In der That führt der Gedankenkang des Herrn Klein in einer durch die veränderte Fragestellung gebotenen Modification zur Lösung unserer Aufgabe.

Man bezeichne nämlich mit $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ die den $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ contragredienten Variabeln, so wird jeder Substitution der x eine solche der Variabeln u correspondiren. Nun bilde man eine beliebige Function f der Variabeln y, z und wende auf das Product

$$f \,.\, u_0$$

der Reihe nach alle N Substitutionstripel $(R_1\, R_2\, R_3)$ an; d. h. man unterwerfe simultan die Variabeln y der Substitution R_2, die Variabeln z der Substitution R_3 und die Variable u_0 derjenigen Substitution, welche der Substitution R_1 der Variabeln x correspondirt. Dabei gehe das Product $f \,.\, u_0$ der Reihe nach über in:

$$f^{(1)} \cdot u_0^{(1)},\ f^{(2)} \cdot u_0^{(2)},\ \cdots,\ f^{(N)} \cdot u_0^{(N)}.$$

Die Summe dieser Grössen bleibt offenbar bei der Anwendung irgend eines Tripels (R_1, R_2, R_3) ungeändert. Andererseits lässt sich diese Summe aber in der Form

$$F_0(y, z) \cdot u_0 + F_1(y, z) \cdot u_1 + \cdots + F_{n-1}(y, z) \cdot u_{n-1}$$

darstellen, da die Ausdrücke $u_0^{(i)}$ lineare Functionen von $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ bedeuten.

Es werden nun die Functionen

$$F_0(y, z),\ F_1(y, z),\ \cdots,\ F_{n-1}(y, z)$$

unsere Aufgabe lösen, denn sie substituiren sich contragredient zu den Variabeln u, also genau wie die Variabeln x.

Das angegebene Verfahren wird natürlich dann illusorisch, wenn die Functionen $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ identisch verschwinden, und es ist daher die Wahl der Function f so zu beschränken, dass dieses identische Verschwinden nicht eintritt.

§ 9.

Anwendung auf die Substitutionsgruppen des § 6.

Die allgemeinen Betrachtungen des vorigen Paragraphen finden eine unmittelbare Anwendung auf die Substitutionssysteme der X_α, welche wir oben ausführlich abgeleitet und untersucht haben. Denn da alle diese Substitutionssysteme auf die Gruppe der linearen Transformationen von ω_1, ω_2 bezogen sind, so dass jeder solchen linearen Transformation eine ganz bestimmte Substitution jedes Systemes X_α entspricht, so sind die letzteren Substitutionssysteme auch auf einander leicht zu beziehen. Hierbei wollen wir, um die zu verschiedenen Werthen der Zahl n gehörenden Systeme X_α bequem von einander unterscheiden zu können, diese Zahl als oberen Index in die Bezeichnung der Variabeln aufnehmen.

Es werden hiernach

$$X_0^{(n)},\ X_1^{(n)},\ \ldots,\ X_{n-1}^{(n)},$$
$$X_0^{(p)},\ X_1^{(p)},\ \ldots,\ X_{p-1}^{(p)},$$
$$X_0^{(r)},\ X_1^{(r)},\ \ldots,\ X_{r-1}^{(r)},$$

die Variabeln dreier Substitutionssysteme bedeuten, welche bezüglich zu den Zahlen n, p, r gehören.

Sucht man nun zu jeder linearen Transformation von ω_1, ω_2 die entsprechenden Substitutionen R_1, R_2, R_3 der Variabeln $X^{(n)}$, $X^{(p)}$, $X^{(r)}$ resp., so werden die verschiedenen Tripel

$$(R_1, R_2, R_3),$$

welche auf diese Weise entstehen, ein Tripelsystem im Sinne des vorigen Paragraphen bilden.

Es seien nun n, p, r *ungerade* Zahlen; dann lässt sich leicht feststellen unter welcher Bedingung das einzelne Tripel durch die beiden Substitutionen R_2, R_3 fixirt ist. Alle linearen Transformationen

$$\begin{cases} \omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2, \end{cases}$$

zu welcher eine bestimmte Substitution der $X^{(p)}$ gehört, sind nämlich dadurch gekennzeichnet, dass die Coefficienten a, b, c, d feste Werthe (mod. p) besitzen; ebenso müssen dieselben feste Werthe (mod. r) besitzen, damit den Transformationen eine bestimmte Substitution der $X^{(r)}$ entspricht. Soll nun einem Paare bestimmter Substitutionen der $X^{(p)}$ und $X^{(r)}$ eine Substitution der $X^{(n)}$ unzweideutig correspondiren, so ist erforderlich und hinreichend, dass die Zahlen a, b, c, d, wenn sie feste Werthe (mod. p) und (mod. r) besitzen, von selber auch festen Werthen (mod. n) congruent werden. Mit anderen Worten, die in Rede stehende Bedingung lautet:

„Das kleinste gemeinsame Multiplum von p und r muss durch n theilbar sein."

Ist diese Bedingung erfüllt, so lehrt die allgemeine Methode des vorigen Paragraphen solche Functionen der Grössen $X^{(p)}$ und $X^{(r)}$ finden, welche sich wie die Grössen $X^{(n)}$ substituiren. Die einfachsten Functionen dieser Art werden entstehen, wenn die Function f, auf welche jene Methode angewendet wird, als eine bilineare Function der Variabeln $X^{(p)}$, $X^{(r)}$ angenommen wird. Es ergeben sich dann, wie aus der Natur der Methode hervorgeht, auch die Functionen $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ als bilineare Ausdrücke, also in der Form:

$$F_\alpha = \sum_0^{p-1} \sum_0^{r-1} c_{\lambda\mu}^{\alpha} X_\lambda^{(p)} X_\mu^{(r)} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Statt nun diese Ausdrücke vermöge der allgemeinen Methode des vorigen Paragraphen herzustellen, ist es einfacher die Coefficienten $c_{\lambda\mu}^{\alpha}$ aus der Forderung zu bestimmen, dass die Summen F_α sich wie die $X^{\alpha(n)}$ substituiren sollen.

Es möge jedoch diese Bestimmung nur für den speciellen Fall

durchgeführt werden, dass p relative Primzahl zu n und $r = np$ ist. Ferner sollen in den erzeugenden Substitutionen (40) für die $X^{(p)}$ und $X^{(np)}$ die Zahl $\varrho = 1$ vorausgesetzt werden (eine Beschränkung, welche nur behufs grösserer Durchsichtigkeit der folgenden Betrachtungen gemacht wird), während für die $X^{(n)}$ diese Zahl vorläufig unbestimmt bleibe. Wir können unsere Aufgabe jetzt offenbar so formuliren:

„Man soll die Coefficienten $c_{\lambda\mu}^{\alpha}$ in den n Summen:

$$(53) \qquad F_\alpha = \sum_0^{p-1} \sum_0^{np-1}{}_\mu c_{\lambda\mu}^{\alpha} X_\lambda^{(p)} X_\mu^{(np)} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

*so bestimmen, dass bei simultaner Anwendung der Substitution (S) bez. (T) auf die Variabeln $X^{(p)}$, $X^{(np)}$ sich die Summen F_α ebenso substituiren, wie die Variabeln $X^{(n)}$ bei Anwendung der Substitution (S) bez. (T).“**)

Der Substitution (S) entsprechend geht nun F_α über in

$$F'_\alpha = \sum\sum c_{\lambda\mu}^{\alpha} e^{-\frac{2i\pi}{p}\cdot\frac{\lambda(p-\lambda)}{2} - \frac{2i\pi}{np}\cdot\frac{\mu(np-\mu)}{2}} X_\lambda^{(p)} X_\mu^{(np)};$$

wir verlangen aber, dass

$$F'_\alpha = e^{-\varrho\frac{2i\pi}{n}\cdot\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} F_\alpha = \sum\sum c_{\lambda\mu}^{\alpha} e^{-\varrho\cdot\frac{2i\pi}{n}\cdot\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} X_\lambda^{(p)} X_\mu^{(np)}$$

---

*) Betrachtet man die $p \,.\, np$ Producte

$$Y_{\lambda\mu} = X_\lambda^{(p)} X_\mu^{(np)},$$

so erfahren dieselben homogene lineare Substitutionen, wenn die $X^{(p)}$ und $X^{(np)}$ ihren simultanen Substitutionen unterworfen werden. Das auf diese Weise entstehende Substitutionssystem der $Y_{\lambda\mu}$ ist nun, wie leicht zu sehen, in der Art isomorph auf das System der $X^{(n)}$ bezogen, dass jeder Substitution der $Y_{\lambda\mu}$ nur eine Substitution der $X^{(n)}$ entspricht. Wir werden also nach der Methode des Herrn Klein solche Functionen, z. B. auch lineare Functionen F_α, der $Y_{\lambda\mu}$ bestimmen können, welche sich wie die $X^{(n)}$ substituiren. So gelangen wir auch durch diese kurze Betrachtung zu der oben formulirten Aufgabe. Im Texte habe ich es vorgezogen einen umständlicheren Weg einzuschlagen, um zu zeigen, wie sich unsere Aufgabe aus allgemeineren Fragestellungen (§ 8) entwickelt. —

Ein einfacheres hierhergehöriges Problem besteht in der Forderung, solche *lineare* Functionen der $X^{(np)}$ zu bilden, welche sich wie die Variabeln $X^{(n)}$ substituiren. Diese Aufgabe lässt sich in eine interessante und zu ihrer Behandlung nützliche geometrische Form bringen. Man betrachte die Verhältnisse der $X^{(np)}$ als Coordinaten eines Raumes von $np - 1$ Dimensionen; dann bedeuten die Substitutionen der $X^{(np)}$ gewisse Collineationen dieses Raumes. Unsere Aufgabe kommt nun auf die Frage nach solchen Ebenen hinaus, welche bei einer bestimmten, in der Gruppe jener Collineation enthaltenen Untergruppe invariant bleiben. Für den Fall $p = 3$ ist die Aufgabe leicht zu lösen und ergiebt jenes System der Variabeln $\overline{X}_\gamma$, welches Herr Klein in *M.* p. 395 aufgestellt hat.

werde. Es muss folglich

$$c^{\alpha}_{\lambda\mu} \cdot e^{-\frac{2i\pi}{p}\frac{\lambda(p-\lambda)}{2} - \frac{2i\pi}{np}\frac{\mu(np-\mu)}{2}} = c^{\alpha}_{\lambda\mu}\, e^{-\varrho\frac{2i\pi}{n}\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}$$

sein; d. h. es muss jedes Mal

$$c_{\lambda\mu} = 0$$

genommen werden, wenn nicht

$$\frac{\lambda(p-\lambda)}{2p} + \frac{\mu(np-\mu)}{2np} - \varrho \cdot \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}$$

eine ganze Zahl ist. Letzteres wird dann und nur dann eintreten, wenn die Congruenz

$$n\lambda^2 + \mu^2 \equiv \varrho p \alpha^2 \pmod{np},$$

oder — da n und p als relative Primzahlen vorausgesetzt wurden — wenn gleichzeitig die Congruenzen

$$\text{(54)} \qquad \begin{cases} \mu^2 \equiv \varrho p \alpha^2 \pmod{n}, \\ \mu^2 + n\lambda^2 \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

bestehen. Sobald also eine Werthcombination λ, μ, α diese Congruenzen nicht erfüllt, ist der betreffende Coefficient $c^{\alpha}_{\lambda\mu}$ gleich 0 zu setzen.

Indem wir jetzt bestimmen, dass ein beliebiger Index μ in dem Zeichen $X^{(np)}_{\mu}$ stets auf seinen kleinsten positiven Rest (mod. np) reducirt werden soll, können wir an Stelle von μ vermöge der Gleichung

$$\text{(55)} \qquad \mu = n\sigma + p\beta$$

zwei neue Summationsbuchstaben σ und β einführen, von welchen der erstere ein vollständiges Restsystem (mod. p), der letztere ein vollständiges Restsystem (mod. n) durchlaufen muss.

Die Congruenzen (54) gehen nun in die folgenden über:

$$\text{(56)} \qquad \begin{cases} p\beta^2 \equiv \varrho\alpha^2 \pmod{n}, \\ \lambda^2 \equiv -n\sigma^2 \pmod{p}. \end{cases}$$

Nehmen wir irgend einen nicht verschwindenden Coefficienten $c^{1}_{\lambda\mu}$ und bezeichnen den zugehörigen Werth von β mit $\varkappa$, so folgt aus den vorstehenden Congruenzen:

$$\varrho \equiv p \cdot \varkappa^2 \pmod{n}.$$

Wir sehen also, dass die Zahl ϱ, welche in dem Substitutionssysteme der $X^{(n)}$ vorkommt, einer Einschränkung unterworfen ist: der Quotient $\frac{\varrho}{p}$ muss (mod. n) einem Quadrate congruent sein. Unbeschadet der Allgemeinheit dürfen wir sogar

$$\text{(57)} \qquad \varrho \equiv p \pmod{n}$$

voraussetzen, da in dem Substitutionssysteme (40) der $X^{(n)}$ die Ersetzung von X_{α} durch $X_{\varkappa\alpha}$ auf die Aenderung der Zahl ϱ in $\varrho\varkappa^2$

hinauskommt. Wir wollen nun annehmen, dass mindestens in Einer der Summen F_α ein $X_\lambda^{(p)}$ wirklich vorkommt, dessen Index λ relative Primzahl zu p ist. (Ob diese Annahme eine nothwendige ist, lasse ich dahingestellt; möglicherweise werden durch dieselbe gewisse Functionssysteme F_α ausgeschlossen). Dann ergiebt die zweite der Congruenzen (56), dass

$$1 \equiv -nq^2 \pmod{p} \tag{58}$$

durch eine ganze Zahl q gelöst werden kann. Die Zahlen n und p sind also der Bedingung zu unterwerfen, dass $-n$ quadratischer Rest von p ist. Unter Berücksichtigung von (57), (58) gehen die Bedingungen (56) über in:

$$\begin{cases} \beta^2 \equiv \alpha^2 \pmod{n}, \\ \sigma^2 \equiv q^2\lambda^2 \pmod{p}, \end{cases} \tag{59}$$

und wir werden alle Coefficienten $c^{(\alpha)}_{\lambda, n\sigma+p\beta}$ gleich Null zu setzen haben, deren Indices die vorstehenden Congruenzen *nicht* erfüllen.

Statt dessen wollen wir nun sogar alle diejenigen Coefficienten gleich Null setzen, für welche die Congruenzen

$$\begin{cases} \beta \equiv \alpha \pmod{n}, \\ \sigma \equiv q\lambda \pmod{p} \end{cases} \tag{60}$$

nicht bestehen. Dadurch scheiden wir möglicherweise wieder gewisse Functionssysteme F_α aus, indem wir mehr Coefficienten $c^\alpha_{\lambda\mu}$ gleich Null annehmen, als unbedingt nöthig ist.

Indem wir alle verschwindenden Coefficienten fortlassen, für die übrigen neue Bezeichnungen einführen und (55) sowie (60) beachten, erhalten wir nun für die F_α folgenden Ansatz:

$$F_\alpha = \sum_0^{p-1\lambda} c^\alpha_\lambda X^{(p)}_\lambda X^{(np)}_{nq\lambda+p\alpha} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{61}$$

Hier sind jetzt die Coefficienten c^α_λ noch so zu bestimmen, dass auch bei Anwendung der Substitution (T) die F_α sich wie die $X^{(n)}$ substituiren.

Bei der Anwendung von (T) geht nun F_α über in:

$$\frac{1}{i^{\frac{p-1}{2}+\frac{np-1}{2}} \cdot p\sqrt{n}} \sum_{\lambda,\nu,\mu} c^\alpha_\lambda e^{\frac{2i\pi}{p}\lambda\nu + \frac{2i\pi}{np}[nq\lambda+p\alpha]\mu} X^{(p)}_\nu X^{(np)}_\mu$$

und dieser Ausdruck soll gleich

$$\frac{1}{\left(\frac{p}{n}\right) i^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{n}} \sum_\beta e^{\frac{2i\pi}{n} p\alpha\beta} F_\beta,$$

d. h. gleich

$$\frac{1}{\left(\frac{p}{n}\right) i^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n}} \sum_{\lambda,\beta} c_\lambda^\beta e^{\frac{2i\pi}{n} p\alpha\beta} X_\lambda^{(p)} X_{nq\lambda+p\beta}^{(np)}$$

werden. Dabei laufen die Summationsbuchstaben λ, ν von 0 bis $p-1$, dagegen μ von 0 bis $np-1$ und β von 0 bis $n-1$.

Führen wir in der ersten Summe statt μ neue Summationsbuchstaben σ, β durch die Gleichung $\mu = n\sigma + p\beta$ ein und vertauschen die Buchstaben ν, λ untereinander, so nimmt die Summe die Gestalt an:

$$\frac{1}{i^{\frac{p-1}{2}+\frac{np-1}{2}} p\sqrt{n}} \sum_{\lambda,\nu,\sigma,\beta} c_\nu^\alpha e^{\frac{2i\pi}{p}\nu(\lambda+nq\sigma)+\frac{2i\pi}{n}p\alpha\beta} X_\lambda^{(p)} X_{n\sigma+p\beta}^{(np)}.$$

Infolge der Congruenz (58) findet sich nun

$$\left(\frac{p}{n}\right) i^{\frac{n-1}{2}} = i^{\frac{p-1}{2}+\frac{np-1}{2}},$$

und der Vergleich der beiden Summen ergiebt daher für die c_λ^α folgende Bedingungen:

$$\frac{1}{p}\sum_\nu c_\nu^\alpha e^{\frac{2i\pi}{p}\nu[\lambda+nq\sigma]} = c_\lambda^\beta \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem $\sigma \equiv q\lambda \pmod p$ ist oder nicht, d. h. je nachdem

$$(\lambda+nq\sigma) - [\lambda+nq^2\lambda] \equiv 0 \pmod p$$

ist oder nicht.

Schreiben wir $\varkappa$ für $\lambda + nq\sigma$, so lauten die Bedingungen:

$$\frac{1}{p}\sum_\nu c_\nu^\alpha e^{\frac{2i\pi}{p}\nu\varkappa} = c_\lambda^\beta \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem $\varkappa \equiv 0 \pmod p$ ist oder nicht. Es müssen folglich alle Coefficienten c_λ^α unter einander gleich sein. Den gemeinsamen Werth derselben können wir unbeschadet der Allgemeinheit gleich 1 annehmen und haben dann folgendes Resultat:

Es seien n und p zwei ungerade relative Primzahlen so beschaffen, dass die Congruenz

$$nq^2 \equiv -1 \pmod p$$

durch eine ganze Zahl q lösbar ist. Dann haben die n Summen

$$F = \sum_0^{p-1} X_\lambda^{(p)} X_{nq\lambda+p\alpha}^{(np)} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{62}$$

die Eigenschaft, sich wie die zur Zahl n gehörigen $X_\alpha^{(n)}$ zu substituiren, wenn die $X_\lambda^{(p)}$ und $X_\mu^{(np)}$ ihren simultanen Substitutionen unterworfen

werden. Dabei hat die in den erzeugenden Substitutionen (40) *der Substitutionssysteme der X auftretende Zahl* ϱ *den Werth* 1 *für die zu den Zahlen* p *und* np *gehörigen* X, *während sie für die* $X_\alpha^{(n)}$ *den Werth* p *besitzt.*

§ 10.

Systeme von Functionen, welche aus den zu ungeraden Zahlen gehörigen Functionen $X_\alpha(u)$ zusammengesetzt sind.

Das im vorigen Paragraphen gewonnene gruppentheoretische Resultat gestattet unmittelbar eine functionentheoretische Anwendung, welche darin besteht, dass wir in (62) die $X_\lambda^{(p)}$ und $X_\mu^{(np)}$ durch die zu den Zahlen p resp. np gehörigen Functionen $X_\lambda(u)$ bez. $X_\mu(v)$ (cf. (18)) ersetzen. Wir erhalten dann n Functionen $F_\alpha(u, v)$:

$$(63) \qquad F_\alpha(u, v) = \sum_0^{p-1} X_\lambda^{(p)}(u) \cdot X_{nq\lambda+p\alpha}^{(np)}(v) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1),$$

welche als Functionen von ω_1, ω_2 aufgefasst, die Eigenschaft haben, sich bei allen linearen Transformationen von ω_1, ω_2 homogen linear zu substituiren und zwar dergestalt, dass den Transformationen (S) und (T) bez. die folgenden Substitutionen correspondiren:

$$(64) \qquad \begin{cases} (S) & F'_\alpha = e^{-p \cdot \frac{2i\pi}{n} \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} F_\alpha, \\ (T) & F'_\alpha = \dfrac{1}{\left(\frac{p}{n}\right) i^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n}} \sum_0^{n-1} e^{p \cdot \frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} F_\beta. \end{cases}$$

Die Zahl p kann irgend eine ungerade Zahl sein, für welche die Congruenz

$$nq^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

möglich ist. Durch Abänderung dieser Zahl p erhalten wir unendlich viele verschiedene Systeme von Functionen $F_\alpha(u, v)$.

Es ist nun sehr bemerkenswerth, dass alle diese Systeme sich in einfacher Weise aus einer endlichen Anzahl derselben, welche ihrerseits ein in arithmetischer Hinsicht vollständig abgeschlossenes System bilden, ableiten lassen.

Um dieses näher auszuführen tragen wir in die Definitionsgleichung (63) der F_α die Reihenentwickelungen (28a) der X_α ein; dann kommt:

$$(65) \quad F_\alpha(u,v) = -\frac{1}{\sqrt[8]{\Delta^{p(n+1)}}} \cdot \frac{e^{\frac{p\eta_1}{2\omega_1}(u^2+nv^2)}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi p}}\sqrt{\frac{\omega_1}{2n\pi p}}} \sum_{\lambda,s,s'} (-1)^{\lambda+nq\lambda+p\alpha+s+s'} h^{\frac{S^2 n+S'^2}{8np}} \varepsilon^{\frac{S}{2}} \varepsilon_1^{\frac{S'}{2}},$$

wobei zur Abkürzung $\varepsilon_1 = e^{\frac{2i\pi}{\omega_1}}$, sowie

$$S = (2s+1)p - 2\lambda,$$
$$S' = (2s'+1)np - 2nq\lambda - 2p\alpha$$

gesetzt ist. Da die Zahl q um p vermehrt werden kann, ohne dass sich die Functionen F_α verändern, so dürfen wir, wie geschehen soll, q als ungerade voraussetzen; dadurch kommt der Term $\lambda + nq\lambda$ in dem Exponenten von -1 in Wegfall. Wir führen nun an Stelle der Summationsbuchstaben λ, s, s' zwei neue x und y ein indem wir

$$S = y,$$
$$S' = nqy + 2px$$

setzen. Man überzeugt sich ohne Schwierigkeit, dass y alle ungeraden Zahlen und unabhängig davon x alle Zahlen, welche $\equiv -\alpha \pmod{n}$ sind, durchlaufen muss, damit jede zulässige Combination λ, s, s' und jede nur Ein Mal berücksichtigt wird. Ueberdies wird

$$S + S' \equiv p(1+n) + 2sp + 2s'np + 2p\alpha$$
$$\equiv y(1+nq) + 2px \pmod{4},$$

woraus

$$p\alpha + s + s' \equiv x + \frac{q-1}{2} \pmod{2}$$

folgt. Es ergiebt sich also die in (65) auftretende Summe gleich

$$(-1)^{\frac{q-1}{2}} \sum_{x,y} (-1)^x h^{\frac{ny^2+(nqy+2px)^2}{8np}} \varepsilon^{\frac{y}{2}} \varepsilon_1^{\frac{nqy+2px}{2}}.$$

Um dieser Entwicklung eine übersichtlichere Form zu geben, möge

$$nq^2 + 1 = 2pr$$

gesetzt, und die quadratische Form

$$\varphi(x, y) = 2px^2 + 2nqxy + nry^2 \tag{66}$$

der Determinante

$$(2nq)^2 - 4 \cdot 2p \cdot nr = -4n \tag{67}$$

eingeführt werden. Ferner wollen wir $u + \frac{nqv}{2p}$ und $-\frac{v}{2p}$ an Stelle von u, v als Argumente nehmen und endlich

$$F_\alpha\left(u + \frac{nqv}{2p}, -\frac{v}{2p}\right) = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}} \cdot p\sqrt{n}}{\sqrt[8]{\Delta^{p(n+1)}}} \Phi_\alpha(u, v) \tag{68}$$

setzen. Alsdann findet sich nach kurzer Rechnung

$$(69) \qquad \Phi_\alpha(u,v) = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot e^{\frac{\eta_1}{4\omega_1}\varphi(u,v)} \sum (-1)^x h^{\frac{\varphi(x,y)}{4n}} e^{\frac{i\pi}{\omega_1}(yu-xv)},$$

wobei die Summation zu erstrecken ist über alle ungeraden Zahlen y und alle diejenigen Zahlen x, welche $\equiv -\alpha \pmod{n}$ sind.

Diese Gleichungen (68), (69) können wir jetzt auch als Definitionsgleichungen für die F_α auffassen und demgemäss folgenden Satz aussprechen:

Versteht man unter $\varphi(x, y)$ eine quadratische Form (66) *der Determinante $-4n$, deren erster Coefficient das Doppelte einer ungeraden Primzahl zu n, deren zweiter Coefficient durch $2n$, deren dritter Coefficient durch n theilbar ist, so werden durch die Gleichungen* (68), (69) *n Functionen $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ von u, v, ω_1, ω_2 definirt, welche als Functionen der Grössen ω_1, ω_2 aufgefasst, sich bei allen linearen Transformationen dieser Grössen homogen und linear substituiren. Und zwar entsprechen insbesondere den erzeugenden Transformationen (S) und (T)* (siehe (31)) *die Substitutionen* (64) *der F_α.*

Es sei jetzt

$$(70) \qquad \bar{\varphi}(x, y) = 2\bar{p}x^2 + 2n\bar{q}xy + n\bar{r}y^2$$

eine zweite Form der Determinante $-4n$. Das zu dieser Form gehörige System von Functionen (69) werde entsprechend mit $\bar{\Phi}_\alpha(u, v)$ bezeichnet, so dass

$$(71) \qquad \bar{\Phi}_\alpha(u, v) = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot e^{\frac{\eta_1}{4\omega_1}\bar{\varphi}(u,v)} \sum (-1)^x h^{\frac{\bar{\varphi}(x,y)}{4n}} e^{\frac{i\pi}{\omega_1}(yu-xv)}$$

ist. Wenn nun die beiden Formen $\varphi(x, y)$ und $\bar{\varphi}(x, y)$ äquivalent sind, dergestalt dass identisch

$$(72) \qquad \varphi(ax + by,\ cx + dy) = \bar{\varphi}(x, y)$$

wird, falls a, b, c, d vier geeignete ganze Zahlen der Determinante

$$ad - bc = 1$$

bedeuten, so lassen sich die Functionen Φ_α leicht mit den Functionen $\bar{\Phi}_\alpha$ vergleichen. Man führe nämlich in (69) neue Summationsbuchstaben ein, indem man x durch $ax + by$ und y durch $cx + dy$ ersetzt; gleichzeitig werden $au + bv$ statt u und $cu + dv$ statt v als Argumente genommen. Alsdann kommt:

$$(73) \quad \Phi_\alpha(au+bv, cu+dv) = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot e^{\frac{\eta_1}{4\omega_1}\bar{\varphi}(u,v)} \sum (-1)^{ax+by} \cdot h^{\frac{\bar{\varphi}(x,y)}{4n}} e^{\frac{i\pi}{\omega_1}(yu-xv)},$$

wo die Summation zu erstrecken ist über alle ganzen Zahlen x, y, welche den Bedingungen

$$(74)\qquad \begin{cases} ax + by \equiv -\alpha \pmod{n}, \\ cx + dy \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

genügen. Nun ist aber in Folge der Gleichung (72):

$$(75)\qquad \begin{cases} pa^2 + nqac + \frac{1}{2}nrc^2 = \bar{p}, \\ 2p \cdot a\frac{b}{n} + q(ad + bc) + rcd = \bar{q}, \\ 2p \cdot \frac{b^2}{n} + 2qbd + rd^2 = \bar{r}. \end{cases}$$

Da p und $\bar{p}$ relative Primzahlen zu n sind, so schliessen wir aus der ersten Gleichung (75), dass a ebenfalls relative Primzahl zu n und sodann aus der zweiten Gleichung (75), dass

$$b \equiv 0 \pmod{n},$$

also, wegen $ad - bc = 1$, auch

$$ad \equiv 1 \pmod{n}$$

sein muss. Jetzt sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Die Zahl c sei $\equiv 0 \pmod 2$, aus welcher Annahme $ad \equiv 1 \pmod 2$ folgt. Dann werden die Summationsbedingungen (74):

$$(76)\qquad \begin{cases} x \equiv -d\alpha \pmod{n}, \\ y \equiv 1 \pmod 2; \end{cases}$$

es wird ferner

$$ax + by \equiv x + b \pmod 2,$$

und folglich, wie der Vergleich von (71) und (73) lehrt:

$$(77)\qquad \Phi_\alpha(au + bv,\ cu + dv) = (-1)^b \bar{\Phi}_{d\alpha}(u, v).$$

2) Die Zahl c sei $\equiv 1 \pmod 2$. In Folge der ersten Gleichung (75) wird jetzt $\frac{r}{2} \equiv 1 \pmod 2$, also

$$r \equiv 2 \pmod 4$$

und da

$$nq^2 + 1 = 2pr$$

kann dies nur eintreten, falls

$$n \equiv 3 \pmod 8$$

ist. Ist nun

$$d \equiv 1, \quad \text{also} \quad a - b \equiv 1 \pmod 2,$$

so werden die Summationsbedingungen

$$(78)\qquad \begin{cases} x \equiv -d\alpha \pmod{n}, \\ x + y \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

und es findet sich

$$ax + by \equiv x + b \pmod 2. \tag{79}$$

Ist aber

$$d \equiv 0, \quad \text{also} \quad b \equiv 1 \pmod 2,$$

so lauten die Summationsbedingungen

$$\begin{cases} x \equiv -d\alpha \pmod n, \\ x \equiv 1 \pmod 2, \end{cases} \tag{80}$$

und es wird

$$ax + by \equiv y + a \pmod 2.$$

Dies führt uns dazu im Falle $n \equiv 3 \pmod 8$ ausser dem System (69) der Functionen $\Phi_\alpha(u, v)$ noch zwei andere Systeme durch die Gleichungen:

$$\Phi_\alpha^{(1)}(u, v) = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot e^{\frac{\eta_1}{4\omega_1}\varphi(u, v)} \sum (-1)^x h^{\frac{\varphi(x, y)}{4n}} e^{\frac{i\pi}{\omega_1}(yu - xv)} \tag{81}$$

und

$$\Phi_\alpha^{(2)}(u, v) = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot e^{\frac{\eta_1}{4\omega_1}\varphi(u, v)} \sum (-1)^y h^{\frac{\varphi(x, y)}{4n}} e^{\frac{i\pi}{\omega_1}(yu - xv)} \tag{82}$$

einzuführen, wobei die Summation zu erstrecken ist in (81) über alle Zahlenpaare x, y, welche den Bedingungen

$$\begin{cases} x \equiv -\alpha \pmod n, \\ x + y \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

dagegen in (82) den Bedingungen

$$\begin{cases} x \equiv -\alpha \pmod n, \\ x \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

genügen. Wir haben dann offenbar

$$\Phi_\alpha(au + bv, cu + dv) = (-1)^\varepsilon \Phi_{d\alpha}^{(\nu)}(u, v), \tag{83}$$

wobei der Index ν fortzulassen oder $= 1$ oder 2 zu nehmen ist, je nachdem $c \equiv 0$ oder $c \equiv 1$ und $d \equiv 1$ oder $c \equiv 1$ und $d \equiv 0 \pmod 2$ ist. Diesen Fällen entsprechend ist auch $\varepsilon = b$, b oder a zu setzen. Aus der Gleichung (83) geht hervor, *dass auch die neuen Functionssysteme* $\Phi_\alpha^{(1)}$ *und* $\Phi_\alpha^{(2)}$ *sich in Bezug auf lineare Transformation von* ω_1, ω_2 *wie die ursprünglich definirten* Φ_α *verhalten.*

Auch ergeben sich aus derselben ohne Schwierigkeit die nachfolgenden Transformationen der Functionen $\Phi_\alpha^{(1)}$ und $\Phi_\alpha^{(2)}$:

$$\Phi_\alpha^{(1)}(au + bv, cu + dv) = (-1)^{\varepsilon_1} \Phi_{d\alpha}^{(\nu_1)}(u, v), \tag{84}$$

$$\Phi_\alpha^{(2)}(au + bv, cu + dv) = (-1)^{\varepsilon_2} \Phi_{d\alpha}^{(\nu_2)}(u, v). \tag{85}$$

Dabei hat in der Gleichung (84) den drei Fällen:

$$a + c \equiv 0 \pmod 2), \quad a + c \equiv b + d \equiv 1 \pmod 2), \quad a + c \equiv 1,$$
$$b + d \equiv 0 \pmod 2)$$

entsprechend, der Index ν_1 die Werthe 0, 1, 2, die Grösse ε_1 die Werthe b, b, a respective. Desgleichen ist in der Gleichung (85) den drei Fällen:

$$a \equiv 0 \pmod 2), \quad a \equiv b \equiv 1 \pmod 2), \quad a \equiv 1, \quad b \equiv 0 \pmod 2)$$

entsprechend, $\nu_2 = 0, 1, 2$ und $\varepsilon_2 = d, d, c$ respective zu setzen.

Endlich ist unter $\Phi_\alpha^{(0)}$ die ursprüngliche Function Φ_α zu verstehen.

Die Gleichungen (77), (83), (84), (85) zeigen, dass die zu äquivalenten Formen $\varphi(x, y)$ und $\overline{\varphi}(x, y)$ gehörigen Functionssysteme $\Phi_\alpha(u, v)$, $\Phi_\alpha^{(1)}(u, v)$, $\Phi_\alpha^{(2)}(u, v)$ in Rücksicht auf ihre Abhängigkeit von den Perioden ω_1, ω_2 nicht wesentlich verschieden sind: durch die Ersetzung von u und v durch $au + bv$, $cu + dv$ gehen, abgesehen vom Vorzeichen, die zu der ersten Form gehörigen Functionen in die zu der zweiten Form gehörigen über.

Wir werden hiernach im Ganzen ebenso viele verschiedene Functionssysteme erhalten, als es Classen quadratischer Formen

$$\varphi(x, y) = 2px^2 + 2nqxy + nry^2$$

der Determinante $-4n$ giebt; nur im Falle $n \equiv 3 \pmod 8$ ist diese Classenzahl zu verdreifachen, dem Umstande entsprechend, dass wir neben den Functionen Φ_α noch zwei andere Systeme $\Phi_\alpha^{(1)}$, $\Phi_\alpha^{(2)}$ einführen mussten. Nun ist aber leicht zu zeigen, dass für $n \equiv 1 \pmod 4$ jede primitive Form

$$Px^2 + Qxy + Ry^2 \tag{86}$$

der Determinante

$$Q^2 - 4PR = -4n,$$

und für $n \equiv 3 \pmod 4$ jede solche Form zweiter Art äquivalent ist zu Formen der Gestalt

$$\varphi(x, y) = 2px^2 + 2nqxy + nry^2,$$

so dass also durch die Gleichung (69) *gerade so viel wesentlich verschiedene Functionssysteme definirt sind, als es inäquivalente primitive Formen* (86) *der Determinante* $-4n$ *giebt, mit dem Zusatz, dass für* $n \equiv 3 \pmod 4$ *nur Formen zweiter Art zu nehmen sind und für* $n \equiv 3 \pmod 8$ *jene Anzahl zu verdreifachen ist.*

§ 11.

Zusammensetzung von X-Systemen, welche zu geraden Zahlen gehören.

Die in den beiden vorhergehenden Paragraphen für die zu ungeraden Zahlen gehörigen X_α angestellten Betrachtungen lassen sich mutatis mutandis auch auf die zu geraden Zahlen gehörenden X_α-Systeme anwenden. Statt aber die ziemlich umständliche Untersuchung des § 9 hier in der erforderlichen Modification zu wiederholen, will ich lieber ein indirectes Verfahren einschlagen, indem ich das schliessliche Resultat des § 9 analogisire. Es sei n eine ungerade Zahl und

$$nq^2 + 1 = 2pr, \tag{87}$$

wo q eine beliebige ungerade Zahl bedeutet. Wir wollen annehmen, dass

$$n \equiv 3 \pmod 4$$

sei und dürfen dann p als eine gerade Zahl voraussetzen. Nun mögen die Summen

$$\Psi_\alpha = \sum_0^{p-1} \lambda X_\lambda^{(p)} X_{nq\lambda+p\alpha}^{(np)} \quad (\alpha = 0, 1, 2 \cdots n-1) \tag{88}$$

gebildet und untersucht werden, wie dieselben sich verhalten, wenn die $X^{(p)}$ und $X^{(np)}$ den Substitutionen (39) simultan unterworfen werden. Dabei soll die in (39) auftretende Zahl ϱ beide Mal $= 1$ sein und es ist die ebendort vorkommende Zahl n bei den $X^{(p)}$ durch p, bei den $X^{(np)}$ durch np zu ersetzen. Die Ausrechnung ergiebt, dass die n Grössen Ψ_α bei den simultan angewandten Substitutionen (S) resp. (T) wieder homogene lineare Substitutionen erfahren und zwar wird (S) und (T) entsprechend respective:

$$\begin{cases} (S) \quad \Psi_\alpha' = e^{\frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{n} p\alpha^2} \Psi_\alpha, \\ (T) \quad \Psi_\alpha' = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_0^{n-1} \beta e^{p \cdot \frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} \Psi_\beta. \end{cases} \tag{89}$$

Aus diesem Verhalten der Ψ_α ergiebt sich nun ohne Schwierigkeit, *dass sich die Grössen* $\frac{\Psi_\alpha}{\sqrt{\Delta}}$ *holoedrisch isomorph mit den zu der Zahl* n *gehörigen* X_α *substituiren.*

Denn es ergiebt sich:

$$(S) \quad \frac{\Psi_\alpha'}{\sqrt{\Delta'}} = e^{\frac{i\pi}{n} p\alpha^2} \cdot \frac{\Psi_\alpha}{\sqrt{\Delta}} = e^{-p \cdot \frac{2i\pi}{n} \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} \frac{\Psi_\alpha}{\sqrt{\Delta}},$$

$$(T) \quad \frac{\Psi_\alpha'}{\sqrt{\Delta'}} = + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_0^{n-1} \beta e^{p \cdot \frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} \frac{\Psi_\beta}{\sqrt{\Delta}}.$$

Ein Blick auf die Formeln (40) zeigt aber, dass unsere Behauptung richtig ist, wenn nur die Gleichung

$$i = \frac{1}{\left(\frac{p}{n}\right) i^{\frac{n-1}{2}}} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{p}{n}\right) = (-1)^{\frac{n+1}{4}}$$

besteht. Diese folgt aber leicht aus der Gleichung (87).

§ 12.

Systeme von Functionen, welche aus den zu geraden Zahlen gehörigen Functionen $X_\alpha(u)$ zusammengesetzt sind.

Tragen wir in (88) für die $X^{(p)}$ und $X^{(np)}$ die durch die Gleichung (18) definirten Functionen ein, so erhalten wir Functionen von ω_1, ω_2, welche sich bei linearen Transformationen dieser Grössen homogen linear substituiren. Die Argumente von $X^{(p)}$ und $X^{(np)}$ mögen gleich so gewählt werden, dass sich die Reihenentwicklungen möglichst einfach gestalten; wir setzen:

$$(91)\quad \Psi_\alpha(u, v) = \frac{1}{p\sqrt{n}\cdot\sqrt[4]{\Delta}} \sum_0^{p-1} X_\lambda^{(p)}\left(u + \frac{nqv}{p}\right) \cdot X_{nq\lambda+p\alpha}^{(np)}\left(-\frac{v}{p}\right).$$

Tragen wir nun rechter Hand die Reihenentwicklungen (28) ein, so finden wir nach Umformungen, welche den in § 10 angewandten ganz analog sind:

$$(92)\qquad \Psi_\alpha(u, v) = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot e^{\frac{\eta_1}{\omega_1}\varphi(u,v)} \sum h^{\frac{\varphi(x,y)}{n}} e^{\frac{2i\pi}{\omega_1}(yu - xv)},$$

wobei die Summation zu erstrecken ist über alle ganzen Zahlen y und alle ganzen Zahlen x, welche $\equiv -\alpha \pmod{n}$ sind. Zur Abkürzung ist ferner

$$(93)\qquad \varphi(x, y) = p_1 x^2 + nqxy + nry^2, \qquad p_1 = \frac{p}{2}$$

gesetzt worden. Betrachten wir jetzt die Gleichungen (92), (93) als Definitionsgleichungen, so haben wir folgenden Satz:

Es sei n eine positive Zahl, welche durch 4 getheilt den Rest 3 lässt und $\varphi(x, y)$ eine quadratische Form der Determinante $-n$, deren erster Coefficient relative Primzahl zu n ist, während die beiden anderen Coefficienten durch n theilbar sind. Dann werden durch die Gleichung (92) (indem α successive die Werthe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ erhält) n Functionen von u, v, ω_1, ω_2 definirt, welche als Functionen von ω_1, ω_2 aufgefasst bei allen linearen Transformationen dieser Grössen homogene lineare Substitutionen erfahren. Und zwar sind die den er-

zeugenden Transformationen (S) *und* (T) *entsprechenden Substitutionen respective*

$$\begin{cases} (S) & \Psi_\alpha' = e^{-p\cdot\frac{2i\pi}{n}\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}\Psi_\alpha, \\ (T) & \Psi_\alpha' = \dfrac{1}{\left(\frac{p}{n}\right)\cdot i^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}}\sum_0^{n-1} e^{p\cdot\frac{2i\pi}{n}\alpha\beta}\Psi_\beta. \end{cases}$$

Betrachtet man neben $\varphi(x, y)$ irgend eine zweite derartige Form:

$$\bar{\varphi}(x, y) = \bar{p}_1 x^2 + n\bar{q}xy + n\bar{r}y^2; \quad \bar{p}_1 = \frac{\bar{p}}{2}; \tag{94}$$

so gehört zu derselben ein zweites System von Functionen $\Psi_\alpha(u, v)$, welches mit $\bar{\Psi}_\alpha(u, v)$ bezeichnet werde. Wenn nun die beiden Formen einander äquivalent sind, so dass

$$\varphi(ax + by, cx + dy) = \bar{\varphi}(x, y)$$

für geeignete Zahlen a, b, c, d der Determinante $ad - bc = 1$ wird, so sind die Functionen $\bar{\Psi}_\alpha$ auf die Ψ_α zurückführbar. Man findet nämlich durch ähnliche Betrachtungen wie sie oben im § 11 angestellt sind:

$$\Psi_\alpha(au + bv, cu + dv) = \bar{\Psi}_{d\alpha}(u, v). \tag{95}$$

Infolge dieser Gleichung werden wir die zu äquivalenten Formen $\varphi(x, y)$ und $\bar{\varphi}(x, y)$ gehörigen Functionssysteme Ψ_α als nur unwesentlich verschieden bezeichnen. Es giebt daher so viele wesentlich verschiedene Systeme $\Psi_\alpha(u, v)$ als inäquivalente Formen (93) existiren und da sich zeigt, dass jede primitive Form $Px^2 + Qxy + Ry^2$ der Determinante $Q^2 - 4PR = -n$ äquivalent ist zu Formen der Gestalt (93) so haben wir das Resultat:

Die Zahl der wesentlich verschiedenen Functionssysteme $\Psi_\alpha(u, v)$ *stimmt überein mit der Zahl der Classen primitiver Formen*

$$Px^2 + Qxy + Ry^2$$

der Determinante

$$Q^2 - 4PR = -n.$$

§ 13.

Zusammensetzung von zu geraden und zu ungeraden Zahlen gehörigen X-Systemen.

Wir betrachten endlich zu geraden und ungeraden Zahlen gehörende X-Systeme simultan. Es bezeichne n eine gerade, q eine beliebige Zahl und es sei

$$nq^2 + 1 = p \cdot r, \tag{96}$$

wo p eine ungerade Zahl bedeutet. Setzen wir nun

$$\mathsf{X}_\alpha = \sum_0^{p-1} X_\lambda^{(p)} X_{nq\lambda+p\alpha}^{(np)} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \tag{97}$$

und unterwerfen die $X^{(p)}$ den Substitutionen (40) (wobei $\varrho = 1$ und n durch p zu ersetzen ist) und simultan die $X^{(np)}$ den Substitutionen (39) (wobei $\varrho = 1$ und n durch np zu ersetzen ist), so erfahren die X_α folgende Substitutionen:

$$\begin{cases} (S) \quad \mathsf{X}_\alpha' = e^{\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi}{n} p\alpha^2} \mathsf{X}_\alpha, \\ (T) \quad \mathsf{X}_\alpha' = \dfrac{-1}{i^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{n}} \sum_0^{n-1} e^{p \cdot \frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} \mathsf{X}_\beta. \end{cases} \tag{98}$$

Hieraus folgt nun, dass die Grössen

$$\mathsf{X}_\alpha \cdot (\sqrt[4]{\Delta})^{\frac{p-1}{2}}$$

sich holoedrisch isomorph mit den zu n gehörigen X_α substituiren. In der That finden wir

$$\begin{cases} (S) \quad \mathsf{X}_\alpha' (\sqrt[4]{\Delta'})^{\frac{p-1}{2}} = e^{p \cdot \frac{i\pi}{4} + p \cdot \frac{i\pi}{n} \alpha^2} \mathsf{X}_\alpha (\sqrt[4]{\Delta})^{\frac{p-1}{2}}, \\ (T) \quad \mathsf{X}_\alpha' (\sqrt[4]{\Delta'})^{\frac{p-1}{2}} = \dfrac{-1}{(-1)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{n}} \sum_0^{n-1} e^{p \cdot \frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} \mathsf{X}_\beta (\sqrt[4]{\Delta})^{\frac{p-1}{2}} \end{cases} \tag{99}$$

und der Vergleich mit (39) zeigt die Richtigkeit unserer Behauptung, da in Folge von (96)

$$\left(\frac{n}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

wird. — Was die Zahl q betrifft, so können wir dieselbe, da X_α sich nicht ändert, wenn $q + p$ an Stelle von q tritt, unbeschadet der Allgemeinheit als eine gerade Zahl voraussetzen. Dies soll im folgenden Paragraphen geschehen.

§ 14.

Systeme von Functionen, welche aus den zu geraden und ungeraden Zahlen gehörigen Functionen $X_\alpha(u)$ zusammengesetzt sind.

Durch die Gleichungen

$$\mathsf{X}_\alpha(u, v) = \frac{i^{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}}{p\sqrt{n}} (\sqrt[4]{\Delta})^{\frac{p-1}{2}} \sum_0^{p-1} X_\lambda^{(p)}\left(2u + \frac{nqv}{p}\right) X_{nq\lambda+p\alpha}^{(np)}\left(-\frac{v}{p}\right), \tag{100}$$

wo α successive gleich $0, 1, 2, \ldots, n-1$ zu setzen ist, werden n Functionen von u, v, ω_1, ω_2 definirt, welche die folgenden Reihenentwicklungen besitzen:

$$(101) \qquad \mathsf{X}_\alpha(u,v) = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot e^{\frac{\eta_1}{\omega_1}\varphi(u,v)} \sum (-1)^{\frac{y-1}{2}} h^{\frac{\varphi(x,y)}{4n}} e^{\frac{2i\pi}{\omega_1}(yu - xv)}.$$

Hier bedeutet $\varphi(x, y)$ die quadratische Form

$$(102) \qquad \varphi(x,y) = 2px^2 + 2nqxy + \frac{n}{2} ry^2$$

der Determinante

$$(103) \qquad (2nq)^2 - 4 \cdot 2p \cdot \frac{n}{2} r = -4n,$$

und die Summation bezieht sich auf alle ungeraden Zahlen y und alle diejenigen Zahlen x, welche der Congruenz

$$(104) \qquad x \equiv -\alpha \pmod{n}$$

genügen. Dabei ist q als eine gerade Zahl vorausgesetzt.

Diese durch die Gleichungen (101) *erklärten Functionen besitzen die Eigenschaft sich homogen und linear zu substituiren, wenn* ω_1, ω_2 *irgend eine lineare Transformation erfahren. Und zwar entsprechen den erzeugenden Transformationen* (S), (T) *(nach* (99)*) die nachfolgenden Substitutionen der* X_α:

$$(105) \qquad \begin{cases} (S) & \mathsf{X}_\alpha' = e^{p\cdot\frac{i\pi}{4} + p\cdot\frac{i\pi}{n}\alpha^2} \mathsf{X}_\alpha, \\ (T) & \mathsf{X}_\alpha' = \dfrac{-1}{(-1)^{\frac{p-1}{2}}\sqrt{n}} \displaystyle\sum_0^{n-1} e^{p\cdot\frac{2i\pi}{n}\alpha\beta} \mathsf{X}_\beta. \end{cases}$$

Der Vergleich der zu äquivalenten Formen $\varphi(x, y)$ und

$$(106) \qquad \bar{\varphi}(x,y) = 2\bar{p}x^2 + 2n\bar{q}xy + \frac{n}{2}\bar{r}y^2$$

gehörenden Functionssysteme $\mathsf{X}_\alpha(u, v)$ und $\bar{\mathsf{X}}_\alpha(u, v)$ gestaltet sich etwas weitläufig durch den Umstand, dass dabei verschiedene Fälle zu unterscheiden sind.

Es sei

$$\varphi(ax + by,\ cx + dy) = \bar{\varphi}(x,y),$$

so dass

$$\begin{cases} 2\bar{p} = 2pa^2 + 2nqac + \frac{n}{2} rc^2, \\ \bar{q} = 2pa\frac{b}{n} + q(ad + bc) + \frac{r}{2} cd, \\ \frac{n}{2}\bar{r} = 2pb^2 + 2nqbd + \frac{n}{2} rd^2, \end{cases}$$

$ad - bc = 1$ ist.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die nachstehenden Congruenzen für die Coefficienten a, b, c, d:

$$\frac{n}{2} \cdot c \equiv 0 \pmod 2,$$
$$4pab + rcdn \equiv 0 \pmod{4n},$$
$$4b^2 \equiv 0 \pmod n.$$

Diese Congruenzen sind aber auch die *nothwendigen* Bedingungen dafür, dass die Form $\varphi(ax + by, cx + dy)$ dieselbe particuläre Beschaffenheit der Coefficienten aufweist, wie die Form $\varphi(x, y)$ selber. In Folge von (96) und der Gleichung

$$ad - bc = 1 \tag{108}$$

lassen sich diese Congruenzbedingungen auf die einfacheren zurückführen:

$$\begin{cases} 4b \equiv 0 \pmod n, \\ \frac{n}{2} c \equiv 0 \pmod 2, \\ a \cdot \frac{4b}{n} \equiv -cd \pmod 4. \end{cases} \tag{109}$$

Ersetzen wir jetzt in (101) die Summationsbuchstaben x, y durch $ax + by, cx + dy$ resp., die Grössen u, v durch $au + bv, cu + dv$ resp., so kommt:

$$\mathsf{X}_\alpha(au + bv, cu + dv) \tag{110}$$
$$= \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot e^{\frac{\eta_1}{\omega_1}\bar{\varphi}(u,v)} \sum (-1)^{\frac{cx+dy-1}{2}} h^{\frac{\bar{\varphi}(x,y)}{4\pi}} e^{\frac{2i\pi}{\omega_1}(yu - xv)},$$

wobei die Summation zu erstrecken ist über alle Zahlen x, y, welche den Bedingungen:

$$\begin{cases} cx + dy \equiv 1 \pmod 2, \\ ax + by \equiv -\alpha \pmod n \end{cases} \tag{111}$$

genügen. Ist nun zuvörderst $c \equiv 0 \pmod 2$ — was nach (109) stets der Fall sein wird, wenn n das Doppelte einer ungeraden Zahl ist — so ist auch (wegen (108)) $a \equiv d \equiv 1 \pmod 2$ und in Folge der letzten Congruenz (109) $\frac{4b}{n}$ eine gerade Zahl.

Die Summationsbedingungen (111) lassen sich deshalb so schreiben:

$$y \equiv 1 \pmod 2,$$
$$ax \equiv (b - \alpha) \pmod n,$$

oder

$$x \equiv -b - d\alpha \pmod n.$$

Ferner findet sich

$$\frac{cx+dy-1}{2} \equiv \frac{c}{2}(b-\alpha) + \frac{d-1}{2} + \frac{y-1}{2} \pmod 2.$$

Bezeichnen wir daher mit $\bar{\mathrm{X}}_\alpha$ die zu der Form $\bar{\varphi}(x, y)$ gehörenden Functionen, so haben wir:

$$(112)\quad \mathrm{X}_\alpha(au+bv,\ cu+dv) = (-1)^{\frac{c}{2}(b-\alpha)+\frac{d-1}{2}} \bar{\mathrm{X}}_{d\alpha+b}(u, v),$$

wodurch die Functionen $\bar{\mathrm{X}}_\alpha$ auf die zu $\varphi(x, y)$ gehörigen X_α zurückgeführt sind.

Es sei zweitens $c \equiv 1$, $d \equiv 0 \pmod 2$, welche Annahmen $a \equiv 0$, $b \equiv 1 \pmod 2$ und $n \equiv 4 \pmod 8$ zur Folge haben. Die Summationsbedingungen (111) werden nun

$$x \equiv 1 \pmod 2,$$
$$ax + by \equiv -\alpha \pmod n,$$

und die letztere spaltet sich in die beiden:

$$x \equiv -d\alpha \pmod{\tfrac{n}{4}},$$
$$y \equiv c(a+\alpha) \pmod 4.$$

Ferner wird

$$cx + dy - 1 \equiv (c-1) + dc\alpha + x - 1 \pmod 4.$$

Führen wir jetzt für $n \equiv 4 \pmod 8$ neben dem Functionssystem (101) noch das folgende ein:

$$(113)\quad \mathrm{X}^{(1)}_\alpha(u,v) = \frac{2\pi}{\omega_1} e^{\frac{\eta_1}{\omega_1}\varphi(u,v)} \sum' (-1)^{\frac{x-1}{2}} h^{\frac{\varphi(x,y)}{4n}} e^{\frac{2i\pi}{\omega_1}(yu-xv)},$$

die Summation erstreckt über alle ungeraden Zahlen x, welche der Congruenz

$$x \equiv -\alpha \pmod{\tfrac{n}{4}}$$

und alle Zahlen y, welche der Congruenz

$$y \equiv \alpha \pmod 4$$

genügen, so wird

$$(114)\quad \mathrm{X}_\alpha(au+bv,\ cu+dv) = (-1)^{\frac{c-1+dc\alpha}{2}} \bar{\mathrm{X}}^{(1)}_{\alpha'}(u, v)$$

werden, wo α' aus den Congruenzen

$$\alpha' \equiv d\alpha \pmod{\tfrac{n}{4}},$$
$$\alpha' \equiv c(a+\alpha) \pmod 4$$

zu bestimmen ist. $\bar{X}_\alpha^{(1)}$ bedeutet dabei die zu $\bar{\varphi}(x, y)$ in derselben Weise wie $X_\alpha^{(1)}$ zu $\varphi(x, y)$ gehörende Function. Aus der Gleichung (114) folgt beiläufig, *dass die durch* (113) *definirten Functionen bei linearer Transformation von* ω_1, ω_2 *sich ebenfalls, wie die Functionen* $X_\alpha(u, v)$, *homogen linear substituiren*. Eine weitere Folge der Gleichung (114) ist, dass die Functionen $X_\alpha^{(1)}(au + bv, cu + dv)$ sich je nach den Resten von a, b, c, d (mod. 2) durch $\bar{X}_\alpha^{(1)}$ oder $\bar{X}_\alpha$ ausdrücken, worauf ich jedoch hier nicht näher eingehen will.

Es bleibt noch drittens der Fall $c \equiv d \equiv 1 \pmod 2$ zu discutiren. Die Congruenzen (109) ergeben dann in Verbindung mit der Gleichung $ad - bc = 1$, dass $a \equiv 1$, $b \equiv 0 \pmod 2$, $a \cdot \frac{4b}{n} \equiv -cd \pmod 4$, und also $\frac{4b}{n} \equiv 1 \pmod 2$ wird. Die letztere Congruenz zeigt, dass der supponirte Fall nur eintreten kann, wenn $n \equiv 0 \pmod 8$ ist. Die Summationsbedingungen (111) lauten jetzt:

$$\begin{aligned} x + y &\equiv 1 \pmod 2, \\ ax + by &\equiv -\alpha \pmod n . \end{aligned}$$

und können, da zufolge der letzteren Congruenz $x \equiv -\alpha \pmod 2$ sein muss, durch die folgenden ersetzt werden:

$$\begin{aligned} y &\equiv 1 - \alpha \pmod 2, \\ ax + by &\equiv -\alpha \pmod n. \end{aligned}$$

Ferner findet sich

$$\frac{cx+dy-1}{2} \equiv \frac{y-1+\alpha}{2} + \frac{d-b-1}{2} - \alpha\frac{d-b+ac}{2} \pmod 2;$$

berücksichtigen wir nun, dass $b \equiv \varepsilon \cdot \frac{n}{4} \pmod n$ gesetzt werden kann, wo ε einen der Werthe $+1, -1$ besitzt, so werden wir dazu geführt, neben den Functionen (101) im Falle $n \equiv 0 \pmod 8$ noch die folgenden zu betrachten:

$$(115) \qquad X_\alpha^{(\varepsilon)}(u,v) = \frac{2\pi}{\omega_1} e^{\frac{\eta_1}{\omega_1}\varphi(u,v)} \sum (-1)^{\frac{y-1+\alpha}{2}} h^{\frac{\varphi(x,y)}{4\pi}} e^{\frac{2i\pi}{\omega_1}(yu-xv)},$$

die Summe erstreckt über alle Zahlen x, y, welche den Bedingungen

$$\begin{cases} y \equiv 1 - \alpha \pmod 2, \\ x + \varepsilon\frac{n}{4} y \equiv -\alpha \pmod n \end{cases}$$

genügen. Dabei kann ε entweder $= +1$ oder $= -1$ angenommen werden, so dass wir durch die Gleichung (115) zwei verschiedene Functionssysteme X_α^{+1}, X_α^{-1} definirt haben.

Nunmehr wird, wie leicht zu sehen:

$$(116)\quad X_\alpha(au+bv, cu+dv) = (-1)^{\frac{d-b-1}{2}\alpha\frac{d-b+ac}{2}+\frac{\alpha-\alpha'}{2}} \bar{X}_{\alpha'}^{(\varepsilon)}(u, v),$$

wenn die Indices α', ε aus den Congruenzen

$$\begin{cases} a\varepsilon \equiv \frac{4b}{n} \pmod 4, \\ a\alpha' \equiv \alpha \pmod n \end{cases}$$

bestimmt werden. Die überstrichenen Grössen beziehen sich wieder in derselben Weise auf die Form $\bar{\varphi}(x, y)$, wie die ungestrichelten Grössen auf die Form $\varphi(x, y)$.

Aus der Gleichung (116) folgt, *dass die neu eingeführten Functionssysteme* $X_\alpha^{(\varepsilon)}$ *bei linearer Transformation von* ω_1, ω_2 *ebenfalls homogene lineare Substitutionen erfahren.* Auch ergiebt sich leicht, dass die Functionswerthe $X_\alpha^{(\varepsilon)}(au+bv, cu+dv)$ auf die Functionen $\bar{X}_\alpha(u,v)$ und $\bar{X}_\alpha^{(\varepsilon)}(u, v)$ zurückgeführt werden können.

Als Hauptergebniss dieser Entwicklungen betrachte ich aber dieses:

Durch die Gleichung (101) *sind im Ganzen so viele wesentlich verschiedene Functionssysteme definirt, als die Zahl der inäquivalenten Formen* (102) *angiebt, mit dem Bemerken, dass diese Zahl zu verdoppeln resp. zu verdreifachen ist, falls* $n \equiv 4$ *resp.* $n \equiv 0 \pmod 8$ *ist.*

Man kann hinzufügen, dass für $n \equiv 2 \pmod 4$ jede primitive Form (P, Q, R) erster Art der Determinante $Q^2 - 4PR = -4n$ und für $n \equiv 0 \pmod 4$ jede solche Form zweiter Art zu Formen der Gestalt (102) äquivalent ist, so dass der vorige Satz ersichtlich in einer noch etwas eleganteren Form ausgesprochen werden kann.

§ 15.

Process der Composition.

Die Sätze der letzten Paragraphen sind theils gruppentheoretischer, theils functionentheoretischer Natur. So gehört der Inhalt der §§ 9, 11, 13 der Gruppentheorie an, während die §§ 10, 12, 14 functionentheoretische Anwendungen der in den bez. vorhergehenden Paragraphen gewonnenen gruppentheoretischen Resultate enthalten. Der allgemeine Gedankengang, welcher diesen Anwendungen zu Grunde liegt, ist dieser:

Sobald irgend zwei Systeme von p bez. np Functionen der Grössen ω_1, ω_2 bekannt sind, welche sich bei linearen Transformationen von ω_1, ω_2 wie die Grössen $X^{(p)}$, $X^{(np)}$ verhalten, so erhält man in Folge der gruppentheoretischen Eigenschaft jener bilinearen Verbindungen ((62), (88), (97)) der $X^{(p)}$ und $X^{(np)}$ sofort ein neues System von

n Functionen, welche sich bei linearen Transformationen von ω_1, ω_2 wie die Grössen $X^{(\alpha)}$ substituiren. Wir wollen zur Abkürzung sagen, dieses neue System sei aus jenen beiden Systemen *„componirt"*. In diesem Sinne sind die Functionssysteme $\Phi_\alpha(u, v)$, $\Psi_\alpha(u, v)$, $\chi_\alpha(u, v)$ aus den Systemen $X^{(\rho)}(u)$, $X^{(\alpha\rho)}(v)$ componirt. Offenbar können wir jetzt aber die neu gewonnenen Systeme Φ_α, Ψ_α, χ_α mit den Functionen $X(w)$ componiren, (wobei dem Argumente w ein beliebiger Werth beigelegt werden kann). Wir werden so zu Functionen der Grössen $u, v, w, \omega_1, \omega_2$ gelangen, welche sich wieder gegenüber linearen Transformationen von ω_1, ω_2 wie die Grössen X verhalten. Aus diesen Functionssystemen werden sich weitere ergeben, wenn wir sie unter sich und mit den früheren componiren und so fort. Auf diese Weise erhalten wir eine unendliche Reihe von Functionssystemen, welche sich sämmtlich holoedrisch isomorph zu den X-Systemen substituiren.

Dabei ist allerdings noch Eins zu erwähnen. Die in den Substitutionssystemen (39), (40) auftretende Zahl ϱ wurde gleich 1 angenommen bei denjenigen Grössen $X^{(\nu)}$, $X^{(\alpha\rho)}$, welche wir zur Bildung jener bilinearen Functionen verwendet haben. Diese Voraussetzung trifft nun im Allgemeinen nicht mehr bei den abgeleiteten Systemen Φ_α, Ψ_α, χ_α zu; bei diesen ist die Zahl $\varrho = p$ und nur in besonderen Fällen wird p durch 1 ersetzt werden können. Es lassen sich aber dennoch diese Systeme zur „Composition" verwenden, da eine leichte Rechnung zeigt, dass jene bilineare Verbindungen ihre charakteristische Eigenschaft auch dann noch behalten, wenn die zu den $X^{(\rho)}$ und $X^{(\alpha\rho)}$ gehörenden Zahlen ϱ nicht mehr gleich 1 vorausgesetzt werden.*)

Die Natur der durch den oben geschilderten Process der Composition entstehenden Functionen weist aber noch auf einen anderen Weg die Eigenschaften dieser Functionen aufzufinden.

Es sind nämlich, wie leicht zu sehen, diese Functionen ϑ-Functionen von beliebig vielen Variabeln $u, v, w, \ldots$, wobei die definite quadratische Form, welche zu diesen ϑ-Functionen gehört, abgesehen von dem Factor $2i\pi \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$, eine positive quadratische Form mit rationalen Zahlencoefficienten ist. Statt nun diese ϑ-Functionen, wie es bei dem Process der Composition geschieht, aus den elliptischen ϑ-Functionen $X(u)$ zusammenzusetzen, kann man sie auch direct, ausgehend von allgemeinen ϑ-Relationen, untersuchen. Dieses beabsichtige ich in einer weiteren Abhandlung demnächst auszuführen.

---

*) Gehört z. B. in den Summen (62) zu den $X^{(\rho)}$ die Zahl $\varrho = \varrho_1$, zu den $X^{(\alpha\rho)}$ die Zahl $\varrho = \varrho_2$, so tritt die charakteristische Eigenschaft jener Summen, sich holoedrisch isomorph zu den $X^{(\alpha)}$ zu substituiren, stets ein, falls nur

$$\varrho_1 \equiv -\varrho_2 \alpha q^2 \pmod{p}$$

ist.

§ 16.

Process der Differentiation. Ueberall endliche Integrale n^{ter} Stufe.

Hat irgend ein System von Functionen der Grössen $u, v, w, \ldots, \omega_1, \omega_2$ die Eigenschaft bei beliebigen linearen Transformationen von ω_1, ω_2 homogene lineare Substitutionen mit numerischen Coefficienten zu erfahren, so wird auch das System der nach einer der Grössen $u, v, w, \ldots$ differenzirten Functionen diese Eigenschaft besitzen. Demnach gewinnen wir durch den Process des Differenzirens aus den Systemen $X_\alpha(u)$, $\Phi_\varrho(u, v)$, $\Psi_\alpha(u, v)$, $\ldots$, wieder neue Functionssysteme, welche sich wie die Grössen X substituiren und die Zahl solcher Systeme wird auf diese Weise wieder ins Unendliche vermehrt.

Die durch Differentiation entstehenden Functionssysteme werden nun vor allem von Wichtigkeit bei der Aufstellung der überall endlichen Integrale der n^{ten} Stufe*), worauf ich zum Schluss in Kürze eingehen will.

Man differenzire z. B. die Functionen $\Psi_\alpha(u, v)$ (92) nach u und setze darauf $u = v = 0$. Das Resultat werde nach Fortlassung des Factors 2π mit $n \,.\, I_\alpha(\omega_1, \omega_2)$ bezeichnet, so dass nach (92)

$$I_\alpha(\omega_1, \omega_2) = \frac{2\pi i}{\omega_1^2} \cdot \frac{1}{n} \sum y \cdot h^{\frac{\varphi(x,y)}{n}} \tag{117}$$

wird, wo y alle Zahlen, x nur diejenigen, welche $\equiv -\alpha \pmod{n}$ sind, durchlaufen muss. Die Functionen I_α substituiren sich nun genau wie die $\Psi_\alpha(u, v)$, nur dass insofern eine Modification eintritt, als offenbar $I_{n-\alpha}$ mit $-I_\alpha$ identisch und folglich insbesondere $I_0 \equiv 0$ ist. Infolge dessen werden die erzeugenden Substitutionen also lauten:

$$\begin{cases} (S) & I'_\alpha = e^{p \cdot \frac{2i\pi}{n} \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} I_\alpha, \\ (T) & I'_\alpha = \dfrac{1}{\left(\frac{p}{n}\right) i^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n}} \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \left(e^{p \cdot \frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} - e^{-p \cdot \frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} \right) I_\beta. \end{cases} \tag{118}$$

Bilden wir nun

$$\int I_\alpha(\omega_1, \omega_2)\,(\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1) = I_\alpha(\omega), \tag{119}$$

*) Siehe pag. 170 meiner Abhandlung: „Ueber Relationen zwischen Classenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante." Diese Annalen, Bd. XXV.

Vgl. auch § 1 meiner Note: „Ueber die Classenzahlrelationen und Modularcorrespondenzen primzahliger Stufe." Berichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften vom 4. Mai 1885.

wo zur Abkürzung

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \omega$$

gesetzt ist, so haben diese Functionen des Periodenverhältnisses die Eigenschaft sich bei Ersetzung von ω durch $\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$, abgesehen von einer additiven (durch die Integration eingeführten) Constanten zu reproduciren, wenn die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \equiv 1, 0, 0, 1$ resp. (mod. n) sind. Denn es wird bei Ersetzung von ω_1, ω_2 durch $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2$, $\gamma\omega_1 + \delta\omega_2$ sowohl $I_\alpha(\omega_1, \omega_2)$ als auch $\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1$ sich ungeändert reproduciren. Nun geht ferner aus der Reihenentwicklung (117) hervor, dass $I_\alpha(\omega)$ für $\omega = i\infty$, also $h = 0$, einen endlichen Werth besitzt; infolge der Gleichungen (118) überträgt sich dieses auf alle rationalen Werthe von ω. Es ergiebt sich also:

„Die Functionen $I_\alpha(\omega)$ sind überall endliche Functionen des Periodenverhältnisses ω und folglich überall endliche Integrale n^{ter} Stufe."

Wählen wir $\omega = i\infty$ als untere Grenze der Integration, so findet sich vermöge (117):

$$I_\alpha(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_\alpha(m)}{m} h^{\frac{m}{n}}, \tag{120}$$

wobei $\psi_\alpha(m)$ durch die Summe

$$\psi_\alpha(m) = \sum y, \tag{121}$$

erklärt ist, letztere erstreckt über alle Lösungen der Gleichung

$$m = px^2 + nqxy + nry^2 = \varphi(x, y) \tag{122}$$

in ganzen Zahlen x, y, von welchen die erstere der Bedingung $x \equiv -\alpha$ (mod. n) unterworfen ist. Es ist hinzuzufügen, dass dieses Resultat nur für $n \equiv 3$ (mod. 4) gilt, und dass die Zahlen p, q, r der einen Einschränkung unterliegen, dass die Determinante der Form $\varphi(x, y)$ gleich $-n$ sein muss. (cf. pag. 222).

Hätten wir die Functionen $\Psi_\alpha(u, v)$ nicht nach u sondern nach v differenzirt und sodann dieselben Schlüsse wie soeben angewendet, so würde sich an Stelle von (121) die Gleichung

$$\psi_\alpha(m) = \sum x \tag{121a}$$

ergeben haben. Es werden also durch die Gleichungen (120) auch dann überall endliche Integrale n^{ter} Stufe definirt, wenn die Coefficienten $\psi_\alpha(m)$ nicht durch die Gleichung (121), sondern durch (121a) erklärt werden.

Dass sich in derselben Weise aus den Functionssystemen $\Phi_\alpha(u, v)$, $X_\alpha(u, v)$ überall endliche Integrale herleiten lassen, braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden.

Auf die mannigfaltigen zahlentheoretischen Folgerungen, welche aus diesen und ähnlichen auf Integrale 3. Gattung bezüglichen Betrachtungen gezogen werden können, gehe ich hier nicht ein, da ich dieselben bei einer ausführlichen Darstellung meiner Untersuchungen über Modularcorrespondenzen und Classenzahlrelationen zu entwickeln habe.

Königsberg i./Pr., December 1885.

— Zur Fussnote auf Seite 188. — In M. verbessere man des Weiteren:

Seite 360 Z. 10 v. o. (47) statt (44),
„ 362 Z. 10 v. u. $p^{(n-2)}(u)$ statt $p^{(n-3)}(u)$,
„ 370 Z. 5 v. u. $\sigma(u)^n$ statt $\sigma(u)^2$,
Z. 2 v. u. $1 : \varrho$ statt ϱ,
„ 381 Z. 1 v. o. (98) statt (97).
„ 377 Mitte „wenn wir zuerst nach u differentiiren" soll lauten „wenn wir zuerst mit $\sigma(u)^n$ multipliciren und dann nach u differentiiren".
„ 389 ist mehrfach k mit $\varkappa$ verwechselt.

Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung.

Von

Heinrich Bruns in Leipzig.

[Wiederabdruck einer im Jahre 1875 zum Doctorjubiläum von V. J. Buniakowsky von der physiko-mathematischen Facultät der Universität Dorpat dargebrachten Festschrift.]

Bei Gelegenheit einer Untersuchung über die säcularen Störungen der Bahnelemente periodischer Kometen wurde ich auf die Aufgabe geführt, die Perioden der zu der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{dx}{du} = y, \quad y^2 = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

gehörigen Integrale erster und zweiter Gattung analytisch darzustellen unter der Voraussetzung, dass die Coefficienten in y^2 gegebene rationale Functionen eines unbeschränkt veränderlichen Parameters ξ sind. Wenn man um die Untersuchung zu vereinfachen von der üblichen Normalform

$$\frac{dx}{du} = K\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

obiger Differentialgleichung ausgeht, so werden die Perioden, abgesehen von dem Factor K, Functionen von k allein. Hierbei ist es jedoch lästig, dass K und k immerhin nicht ganz einfache algebraische Functionen von A, B, C, B' und A' werden, deren explicite Darstellung die Auflösung der Gleichung $y^2 = 0$ voraussetzt. Dieser Uebelstand lässt sich jedoch vermeiden, wenn man von derjenigen Normalform der Gleichung (1) ausgeht, welche Herr Prof. Weierstrass seinen Vorlesungen über elliptische Functionen zu Grunde legt. Die Perioden lassen sich dann mit Hülfe hypergeometrischer Reihen darstellen, deren viertes Element eine einfache lineare Function der absoluten Invariante von y^2 ist.

I.

Zunächst mögen hier diejenigen auf die Weierstrass'sche Normalform bezüglichen Formeln zusammengestellt werden, welche für die folgenden Entwicklungen nöthig sind. Führt man in (1) statt x die Veränderliche s ein, welche mit x durch eine Gleichung von der Form

$$(px^2+qx+r)s^2+(p'x^2+q'x+r')s+p''x^2+q''x+r''=0$$

verbunden ist, so lassen sich die p, q, r ... so als Functionen der A, B, C, B', A' und einer willkürlichen Constante bestimmen, dass

$$\frac{dx}{y}=\frac{ds}{t}, \quad t^2=4s^3-g_2s-g_3$$

wird, wo

$$g_2=AA'-4BB'+3C^2,$$
$$g_3=ACA'+2BCB'-AB'^2-A'B^2-C^3$$

die beiden fundamentalen Invarianten von y^2 bedeuten. (1) geht dann über in

$$\frac{ds}{du}=\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}, \tag{2}$$

und die Integrale erster und zweiter Gattung nehmen die Gestalt

$$\int\frac{ds}{t} \quad \text{und} \quad -\int\frac{s\,ds}{t} \tag{3}$$

an. Bezeichnet man mit pu diejenige zu (2) gehörige elliptische Function, welche für $u=0$ unendlich wird und die sich für kleine Werthe von u durch die Potenzreihe

$$pu=\frac{1}{u^2}+\frac{g_2u^2}{20}+\frac{g_3u^4}{28}+\cdots$$

darstellen lässt, so existirt eine beständig convergente Potenzreihe

$$\sigma u=u-\frac{g_2u^5}{2\cdot 5!}-\frac{6g_3u^7}{7!}-\cdots,$$

welche der Bedingung

$$pu=-\frac{d^2}{du^2}\log\sigma u$$

genügt. — Sind e_1, e_2, e_3 die Wurzeln der Gleichung $t^2=0$, also

$$4s^3-g_2s-g_3=4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3),$$

so ist

$$e_1+e_2+e_3=0, \quad e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2=-\frac{1}{4}g_2, \quad e_1e_2e_3=\frac{1}{4}g_3,$$
$$(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2(e_1-e_2)^2=\frac{1}{16}(g_2^3-27g_3^2)=\frac{27}{16}g_3^2(g-1), \tag{4}$$

wo

$$g = \frac{g_2^3}{27 g_3^2}$$

die absolute Invariante von y^2 bedeutet. Wenn g_2 und g_3 reell sind, so sind für $g > 1$ alle drei Wurzeln reell, für $g < 1$ dagegen nur eine. Wenn $g = 1$ und g_3 von Null verschieden, so sind zwei Wurzeln einander gleich; wenn jedoch die Discriminante verschwindet, indem g_2 und g_3 gleichzeitig gleich Null werden, so sind alle drei Wurzeln einander gleich. — Es seien nun L und L' zwei einfache geschlossene Curven in der Ebene der s, von denen die erste nur die Punkte e_2 und e_3, die zweite nur e_1 und e_2 einschliesst, ohne diese Punkte zu berühren, dann sind die Werthe $2\omega, 2\omega', 2\eta, 2\eta'$ der längs L und L' genommenen Integrale (3) Fundamentalperioden der Integrale erster und zweiter Gattung. Wenn wir hierbei annehmen, dass, falls e_1, e_2, e_3 in gerader Linie liegen, e_2 zwischen e_1 und e_2 liege, so können wir auch schreiben

$$(5) \qquad \omega = \int_{e_2}^{e_3} \frac{ds}{t}, \quad \omega' = \int_{e_2}^{e_1} \frac{ds}{t}, \quad \eta = -\int_{e_3}^{e_2} \frac{s\,ds}{t}, \quad \eta' = -\int_{e_2}^{e_1} \frac{s\,ds}{t},$$

wo die Integration längs der geradlinigen Strecken $e_3 e_2$, $e_2 e_1$ auszuführen ist. Das Vorzeichen von t ist hierbei vorläufig gleichgültig, nur muss es für ω und η, sowie für ω' und η' dasselbe sein. Es möge jedoch so bestimmt werden, dass in der Gleichung

$$(6) \qquad \eta\omega' - \eta'\omega = \pm \frac{\pi i}{2}$$

das obere Zeichen gilt. Ferner soll, wenn e_1, e_2, e_3 reell sind, $e_1 > e_2 > e_3$ sein und das Vorzeichen so gewählt werden, dass ω und damit auch η positiv reell wird; ω' und η' sind dann, so lange $g - 1$ nicht sehr klein, resp. positiv und negativ rein imaginär. — Ferner gelten dann die Relationen

$$(7) \qquad \frac{\sigma'(u+2\omega)}{\sigma(u+2\omega)} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} + 2\eta, \quad \frac{\sigma'(u+2\omega')}{\sigma(u+2\omega')} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} + 2\eta',$$

$$p\omega = e_1, \; p(\omega+\omega') = e_2, \; p\omega' = e_3,$$

und wenn man für den Augenblick $p\omega_\alpha = e_\alpha$ schreibt,

$$(8) \qquad (pu - e_\alpha)\left(p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha\right) = (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma).$$

Hieraus ergiebt sich für eine längs L und L' vorgenommene Integration

$$(9) \qquad \begin{aligned} \int \frac{1}{s-e_\alpha}\,\frac{ds}{t} &= -2\,\frac{e_\alpha\omega + \eta}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}, \\ \int \frac{1}{s-e_\alpha}\,\frac{ds}{t} &= -2\,\frac{e_\alpha\omega' + \eta'}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}. \end{aligned}$$

Endlich hat man, wenn

$$h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$$

gesetzt wird

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_2 - e_3} = 2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + 2h^{\frac{25}{4}} + \cdots$$

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1 - e_3} = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots$$

Hieraus folgt, dass, wenn $e_2 - e_3 = k(e_1 - e_3)$ gesetzt wird, h sich in der Form

$$\frac{k}{16} + k\mathfrak{P}(k) \tag{10}$$

darstellen lässt, wo $\mathfrak{P}(k)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von k fortschreitende Reihe bedeutet.

Wenn nun g_2 und g_3 gegebene Functionen von ξ sind, so erhält man durch Differentiiren der längs des Weges L genommenen Integrale (3) nach ξ

$$2\frac{d\omega}{d\xi} = \int \frac{g_2' s + g_3'}{2t^2}\,\frac{ds}{t}, \quad 2\frac{d\eta}{d\xi} = -\int \frac{g_2' s + g_3'}{2t^2}\,\frac{s\,ds}{t},$$

wo

$$\frac{dg_2}{d\xi} = g_2', \quad \frac{dg_3}{d\xi} = g_3'$$

gesetzt ist. Da nun

$$\frac{1}{2t^2} = \frac{1}{8}\sum \frac{1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}\,\frac{1}{s - e_1},$$

$$\frac{s}{2t^2} = \frac{1}{8}\sum \frac{e_1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}\,\frac{1}{s - e_1},$$

$$\frac{s^2}{2t^2} = \frac{1}{8}\sum \frac{e_1^2}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}\,\frac{1}{s - e_1},$$

so wird

$$\int \frac{ds}{2t^3} = -\frac{1}{4}\sum \frac{e_1\omega + \eta}{(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2},$$

$$\int \frac{s\,ds}{2t^3} = -\frac{1}{4}\sum \frac{e_1^2\omega + e_1\eta}{(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2},$$

$$\int \frac{s^2\,ds}{2t^3} = -\frac{1}{4}\sum \frac{e_1^3\omega + e_1^2\eta}{(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2},$$

oder es ist

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega}{d\xi} = -P\eta - Q\omega, \quad \dfrac{d\eta}{d\xi} = R\omega + Q\eta, \\ \text{und analog} \\ \dfrac{d\omega'}{d\xi} = -P\eta' - Q\omega', \quad \dfrac{d\eta'}{d\xi} = R\omega' + Q\eta', \end{cases} \tag{11}$$

wo

$$P = \frac{1}{8}\sum \frac{g_2' e_1 + g_3'}{(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2}, \quad Q = \frac{1}{8}\sum \frac{g_2' e_1^2 + g_3' e_1}{(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2},$$

$$R = \frac{1}{8}\sum \frac{g_2' e_1^3 + g_3' e_1^2}{(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2}.$$

Führt man statt der Wurzeln ihre symmetrischen Functionen ein, so wird

$$(19)\quad \begin{cases} 8(g_2^3 - 27g_3^2)P = -36g_3g_2' + 24g_2g_3', \\ 8(g_2^3 - 27g_3^2)Q = \quad 2g_2^2g_2' - 36g_3g_3', \\ 8(g_2^3 - 27g_3^2)R = -3g_2g_3g_2' + 2g_2^2g_3'. \end{cases}$$

Substituirt man nun in (11) für ω und η resp.

$$\Omega g_3^{-\frac{1}{6}} g^{\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad H g_3^{\frac{1}{6}},$$

so lassen sich die Coefficienten der so entstehenden Differentialgleichungen durch g allein und seine nach ξ genommene Ableitung ausdrücken, und man erhält

$$(13)\quad \begin{cases} \frac{d\Omega}{d\xi} = \frac{g'}{6g(g-1)} H - g'\left(\frac{1}{12(g-1)} + \frac{1}{3g}\right)\Omega, \\ \frac{dH}{d\xi} = \frac{g'}{12(g-1)} H - \frac{g'}{24(g-1)}\Omega. \end{cases}$$

Wenn g von ξ unabhängig, also $g' = 0$ wäre, so würden auch Ω und H ξ nicht enthalten, folglich die Perioden einfache algebraische Functionen von ξ sein. Diesen Ausnahmefall wollen wir hier nicht weiter berücksichtigen und g als unabhängige Veränderliche einführen, indem wir für $g'd\xi$ dg schreiben. Eliminirt man dann aus den beiden Gleichungen (13) der Reihe nach H und Ω, so erhält man

$$(14)\quad \begin{cases} 0 = g(g-1)\frac{d^2\Omega}{dg^2} + \left(\frac{7}{3}g - \frac{4}{3}\right)\frac{d\Omega}{dg} + \frac{55}{144}\Omega, \\ 0 = g(g-1)\frac{d^2H}{dg^2} + \left(\frac{4}{3}g - \frac{1}{3}\right)\frac{dH}{dg} - \frac{5}{144}H. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind aber weiter nichts, als die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe

$$(15)\quad 0 = x(x-1)\frac{d^2F}{dx^2} + \left(x(\alpha+\beta+1) - \gamma\right)\frac{dF}{dx} + \alpha\beta F,$$

wo

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha = \frac{11}{12}, & \beta = \frac{5}{12}, & \gamma = \frac{4}{3}, \\ \alpha = \frac{5}{12}, & \beta = -\frac{1}{12}, & \gamma = \frac{1}{3}, \end{array}\right\} \alpha + \beta = \gamma,$$

oder

zu setzen ist. Ω und H haben also, als Functionen von g betrachtet, in der ganzen Zahlenebene den Charakter ganzer rationaler Functionen;

Ausnahmestellen können nur die Punkte 0, 1, ∞ sein. Zur Ermittelung der vollständigen Integrale von (14) ist jetzt weiter nichts erforderlich, als aus den bekannten Gaussischen Abhandlungen über die hypergeometrische Reihe die verschiedenen Ausdrücke zu entnehmen, welche für die Umgebung der Ausnahmestellen gültige Darstellungen der particulären Integrale liefern, und die Integrationsconstanten zu bestimmen. Der Uebersichtlichkeit halber mögen zunächst die hierher gehörigen Formeln aus der zweiten Gaussischen Abhandlung kurz zusammengestellt werden.

II.

Zu der Differentialgleichung (15) gehören für die Umgebung des Punktes $x = 0$ die beiden particulären Integrale

$$(16) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right) = (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \frac{x}{x-1}\right),$$

$$(17) \qquad \begin{cases} x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x) \\ = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha+1-\gamma, 1-\beta, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right) \\ = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta+1-\gamma, 1-\alpha, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right). \end{cases}$$

Diese Darstellungen sind gültig für alle x innerhalb eines um den Nullpunkt mit dem Halbmesser Eins beschriebenen Kreises, resp. innerhalb derjenigen Halbebene, welche auf der negativen Seite der durch den Punkt $x = \frac{1}{2}$ senkrecht zur Axe der reellen Zahlen gezogenen Geraden liegt.

In der Umgebung des Punktes $x = 1$ hat man die particulären Integrale

$$(18) \qquad F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) = x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right) = x^{-\beta} F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right),$$

und, weil $\alpha + \beta = \gamma$

$$(19) \qquad F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) \log(x-1) + G(\alpha, \beta, 1-x),$$

wo $G(\alpha, \beta, x)$ die Reihe

$$\frac{\alpha\beta}{1.1} Ax + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.3} \frac{\beta(\beta+1)}{1.2.3} (A+B) x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3} \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3} (A+B+C) x^3 + \cdots$$

bedeutet, und

$$A=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{2}{1},\ B=\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+1}-\frac{2}{2},\ C=\frac{1}{\alpha+2}+\frac{1}{\beta+2}-\frac{2}{3},\ldots$$

ist. Für (19) kann man auch setzen

$$(20)\qquad F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\log\frac{x-1}{x}+x^{-\beta}G\left(\beta,1-\alpha,\frac{x-1}{x}\right)$$

$$=F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\log\frac{x-1}{x}+x^{-\alpha}G\left(\alpha,1-\beta,\frac{x-1}{x}\right),$$

Von der Identität der Ausdrücke (19) und (20) überzeugt man sich leicht, wenn man berücksichtigt, dass (19) und (20) der Differentialgleichung (15) genügen, und dass ihre Differenz für $x=1$ verschwindet, so lange man die Logarithmen so wählt, dass sie für reelle x reell werden. Diese Darstellungen sind gültig für alle x innerhalb eines um den Punkt $x=1$ mit dem Halbmesser Eins beschriebenen Kreises, resp. innerhalb der Halbebene auf der positiven Seite der oben erwähnten Geraden.

Für die Umgebung des unendlich fernen Punktes hat man endlich die particulären Integrale

$$(21)\qquad x^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+1-\beta,\frac{1}{x}\right)$$

$$=(x-1)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\alpha+1-\beta,\frac{1}{1-x}\right),$$

$$(22)\qquad x^{-\beta}F\left(\beta,\beta+1-\gamma,\beta+1-\alpha,\frac{1}{x}\right)$$

$$=(x-1)^{-\beta}F\left(\beta,\gamma-\alpha,\beta+1-\gamma,\frac{1}{1-x}\right).$$

Diese Reihen convergiren, so lange der absolute Betrag von x resp. $1-x$ grösser ist als Eins.

Von den linearen Relationen zwischen diesen verschiedenen Reihen mögen hier nur die beiden folgenden angeführt werden. Es ist

$$(23)\qquad F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)=\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\,\Pi(\beta-\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$

$$+\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(\gamma-2)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,x)x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta},$$

und

$$(24)\qquad \frac{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)}F(\alpha,\beta,\alpha+\beta,x)$$

$$=-F(\alpha,\beta,1,1-x)\log(1-x)-G(\alpha,\beta,1-x)$$

$$+F(\alpha,\beta,1,1-x)\left(2\Psi(0)-\Psi(\alpha-1)-\Psi(\beta-1)\right),$$

wo Π und Ψ die bekannten Gaussischen Zeichen sind. Um die folgenden Entwicklungen etwas übersichtlicher zu machen, sollen noch folgende Bezeichnungen gebraucht werden:

$$(25)\quad\begin{cases} H_1(x) = F\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, \frac{16}{12}, x\right), \\ H_2(x) = F\left(\frac{7}{12}, \frac{1}{12}, \frac{8}{12}, x\right), \\ H_3(x) = F\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, 1, 1-x\right), \\ H_4(x) = F\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, 1, 1-x\right)\log(x-1) + G\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, 1-x\right), \\ H_5(x) = F\left(\frac{11}{12}, \frac{7}{12}, \frac{18}{12}, \frac{1}{x}\right), \\ H_6(x) = F\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{12}, \frac{6}{12}, \frac{1}{x}\right), \\ K_1(x) = F\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, \frac{4}{12}, x\right), \\ K_2(x) = F\left(\frac{13}{12}, \frac{7}{12}, \frac{20}{12}, x\right), \\ K_3(x) = F\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, 1, 1-x\right), \\ K_4(x) = F\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, 1, 1-x\right)\log(x-1) + G\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, 1-x\right), \\ K_5(x) = F\left(\frac{5}{12}, \frac{13}{12}, \frac{18}{12}, \frac{1}{x}\right), \\ K_6(x) = F\left(-\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{6}{12}, \frac{1}{x}\right). \end{cases}$$

III.

Die Grössen $\omega, \omega', \eta, \eta'$ sind nun aus den Ausdrücken (25) linear zusammengesetzt. Da jedoch die so definirten Functionen wegen der darin auftretenden algebraischen und logarithmischen Glieder mehrdeutig, resp. unendlichvieldeutig sind, so soll das Gebiet der g durch einen geradlinigen Verzweigungsschnitt, welcher von dem Punkte $g = 1$ über $g = 0$ nach $g = -\infty$ verläuft, in ein einfach zusammenhängendes verwandelt werden. Innerhalb dieses Gebietes sind dann $\Omega, \Omega', \mathsf{H}, \mathsf{H}'$ eindeutige Functionen und man kann jetzt die Integrationsconstanten so bestimmen, dass die Werthe von $\omega, \omega', \eta, \eta'$, welche durch die Ausdrücke (25) geliefert werden, identisch sind mit denen, welche die Integrale (5) ergeben, wobei vorläufig g_2 und g_3 immer reell sein sollen.

Zu dem Ende seien zunächst e_1, e_2, e_3 reell, also g reell und > 1. Dann ist einerseits, weil $e_1 > e_2 > e_3$,

$$(26)\quad \begin{cases} \omega = \int_{e_3}^{e_2} ds\,\{\ \ 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)\}^{-\frac{1}{2}}, \\ \omega' = i\int_{e_2}^{e_1} ds\,\{-4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)\}^{-\frac{1}{2}}, \\ \eta = -\int_{e_3}^{e_2} s\,ds\,\{\ \ 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)\}^{-\frac{1}{2}}, \\ \eta' = -i\int_{e_2}^{e_1} s\,ds\,\{-4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)\}^{-\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

wo die Wurzeln sämmtlich reell und positiv sind. Andrerseits hat man nach einer kleinen Umformung für ω und ω', sowie für η und η' Ausdrücke von der Gestalt

$$C g_2^{-\frac{1}{4}} H_6(g) + C' g_2^{\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2^2} H_5(g)$$

und

$$C g_2^{\frac{1}{4}} K_6(g) + C' g_2^{-\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2} K_5(g).$$

Wenn man nun g_2 für den Augenblick als constant ansieht und die Perioden als Functionen von g_3 betrachtet, so enthalten diese Ausdrücke offenbar nichts anderes, als die Entwicklung der Perioden nach steigenden Potenzen von g_3. Man erhält also die Constanten C und C' sofort, wenn man $g_2 = 1$ setzt und die Werthe aufsucht, welche die Perioden und ihre ersten Ableitungen nach g_3 für $g_3 = 0$ annehmen. In diesem Falle ist

$$e_1 = \frac{1}{2}, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = -\frac{1}{2};$$

also wird, wenn man setzt

$$(27)\quad \begin{cases} \omega_0 = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} ds\,(4s^3 - s)^{-\frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \eta_0 = -\int_{-\frac{1}{2}}^{0} s\,ds\,(4s^3 - s)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\cos^2\varphi \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

und für $g_2 = 1$ und $g_3 = 0$,

$$\omega = \omega_0, \quad \omega' = i\omega_0, \quad \eta = \eta_0, \quad \eta' = -i\eta_0.$$

Die Werthe der ersten Ableitungen erhält man aus (11) und (12), wenn man $g_2' = 0$, $\xi = g_3$, $g_3' = 1$, also $P = 3$, $Q = 0$, und $R = \frac{1}{4}$ setzt. Dieselben werden dann resp.

$$-3\eta_0, \quad +3\eta_0 i, \quad \tfrac{1}{4}\omega_0, \quad \tfrac{i}{4}\omega_0.$$

Hieraus folgt schliesslich

$$(28)\quad \begin{cases} \omega = & \omega_0 g_2^{-\frac{1}{4}} H_6(g) - 3\eta_0 g_2^{\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2^2} H_5(g), \\ \omega' = & i\omega_0 g_2^{-\frac{1}{4}} H_6(g) + 3i\eta_0 g_2^{\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2^2} H_5(g), \\ \eta = & \eta_0 g_2^{\frac{1}{4}} K_6(g) + \frac{1}{4}\omega_0 g_2^{-\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2} K_5(g), \\ \eta' = & -i\eta_0 g_2^{\frac{1}{4}} K_6(g) + \frac{i}{4}\omega_0 g_2^{-\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2} K_5(g). \end{cases}$$

Die Bedingung $\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{1}{2}\pi i$ liefert, weil $4\eta_0\omega_0 = \pi$, noch die Relation

$$1 = \frac{1}{36g} \cdot K_5 H_5 + K_6 H_6.$$

Die Gleichung $\eta\omega' - \eta'\omega =$ constans ist übrigens eine einfache Folge aus den Gleichungen (11), wie man sich leicht durch blosses Differentiiren dieses Ausdrucks überzeugt. Da nun die Perioden als Functionen von ξ betrachtet den Charakter ganzer rationaler Functionen besitzen, abgesehen von den in endlicher Anzahl vorhandenen Ausnahmestellen, so muss die Constante, wenn sie für irgend einen Punkt ξ gleich $\frac{1}{2}\pi i$ ist, stets diesen Werth besitzen, verausgesetzt, dass man in (6) für die Perioden ein System simultaner Werthe substituirt.

Es seien nun wieder wie vorhin die drei Wurzeln reell, also $g > 1$ und reell, so werden, wenn g von $+\infty$ auf $+1$ zurückt, zwei Wurzeln einander gleich, und zwar wird wegen der Relationen (4) für $g_3 > 0$ $e_2 = e_3$, für $g_3 < 0$ $e_1 = e_2$; im ersten Falle bleiben ω und η endlich, während ω' und η' unendlich werden, im zweiten Falle findet das Umgekehrte statt. Es sei zunächst g_3 positiv, dann hat man, weil ω und η endlich bleiben müssen,

$$\omega = C g_2^{-\frac{1}{4}} g^{\frac{5}{12}} H_3 \quad \eta = C' g_2^{\frac{1}{4}} g^{-\frac{1}{12}} K_3.$$

Zur Bestimmung von C und C' setze man $g = 1$, $g_3 = 1$, also $g_2 = 3$, dann wird $e_1 = 1$, $e_2 = e_3 = -\frac{1}{2}$ und

$$\frac{\pi}{\sqrt[4]{6}} = \frac{C}{\sqrt[4]{3}}, \quad \frac{\pi}{\sqrt[4]{24}} = C'\sqrt[4]{3},$$

oder

$$(29) \qquad \omega = \frac{\pi}{\sqrt[4]{12}} g_2^{-\frac{1}{4}} g^{\frac{5}{12}} H_3(g), \quad \eta = \frac{\pi}{\sqrt[4]{1728}} g_2^{\frac{1}{4}} g^{-\frac{1}{12}} K_3(g),$$

wofür man auch etwas einfacher schreiben kann

$$(30) \qquad \omega = \frac{\pi}{\sqrt[4]{64}} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{6}}}{g_3} H_3(g), \quad \eta = \frac{\pi}{\sqrt[4]{24}} g_3^{\frac{1}{6}} K_3(g).$$

Da nach (18)

$$g^{\frac{5}{12}} H_3 = F\left(\tfrac{5}{12}, \tfrac{1}{12}, 1, \frac{g-1}{g}\right),$$

$$g^{-\frac{1}{12}} K_3 = F\left(-\tfrac{1}{12}, \tfrac{7}{12}, 1, \frac{g-1}{g}\right),$$

so erhält man durch Vergleichung von (28) und (29) für ein ins Unendliche wachsendes g die Relationen

$$\omega_0 \sqrt[4]{12} = \pi F\left(\tfrac{5}{12}, \tfrac{1}{12}, 1, 1\right),$$

$$\eta_0 \sqrt[4]{1728} = \pi F\left(-\tfrac{1}{12}, \tfrac{7}{12}, 1, 1\right)$$

oder

$$(31) \qquad \begin{cases} \omega_0 \sqrt[4]{12}\, \Pi\left(-\frac{1}{12}\right) \Pi\left(-\frac{5}{12}\right) = \pi\sqrt{\pi}, \\ \eta_0 \sqrt[4]{1728}\, \Pi\left(\frac{1}{12}\right) \Pi\left(-\frac{7}{12}\right) = \pi\sqrt{\pi}. \end{cases}$$

Um ω' zu finden, berücksichtige man, dass $\frac{\omega'}{\omega}$ die Form

$$C + C' \frac{H_4}{H_3} = C + C' \log(g-1) + C' \frac{G\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, 1-g\right)}{H_3}$$

besitzen muss, oder dass die Grösse $\frac{1}{\pi i} \log h$ sich in der Gestalt

$$C + C' \log(g-1) + (1-g)\, \mathfrak{P}(1-g)$$

darstellen lässt. Man erhält also C und C' sofort, wenn man h nach Potenzen von $g-1$ entwickelt. Zu dem Ende setze man in der Gleichung $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$

$$s = n \sin\left(N - \frac{\pi}{6}\right), \quad n = g^{\frac{1}{3}} g^{\frac{1}{6}}.$$

Es wird dann

$$\cos 3N = \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad \sin 3N = \sqrt{\frac{g-1}{g}}, \quad \operatorname{tg} 3N = \sqrt{g-1},$$

also, wenn $g = 1 + k^2$ gesetzt wird ($k > 0$), so erhält man

$$N = \frac{1}{3}\left(k - \frac{k^3}{3} + \frac{k^5}{5} - \cdots\right),$$

$$\operatorname{tg} N = \frac{1}{3}k + k^3\mathfrak{P}(k^2),$$

$$e_1 = n \sin\left(N - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right), \quad e_2 = n \sin\left(N - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$e_3 = n \sin\left(N - \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{2 \operatorname{tg} N}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} N} = \frac{2}{3\sqrt{3}}k + k^3\mathfrak{P}(k^2).$$

Hiernach wird also h ausgedrückt durch eine Reihe von der Form

$$\frac{\sqrt{g-1}}{24\sqrt{3}}\left(1 + (g-1)\,\mathfrak{P}(g-1)\right),$$

und es ist

$$C = -\frac{\log 24\sqrt{3}}{\pi i}, \quad C' = \frac{1}{2\pi i},$$

oder

$$(32)\quad \omega' = \frac{\omega}{2\pi i}\left(\log(g-1) - 2\log 24\sqrt{3}\right) - \frac{i}{\sqrt{216}}\frac{g_2 g_3^{\frac{1}{3}}}{g_3} G\left(\tfrac{11}{12}, \tfrac{5}{12}, 1-g\right),$$

oder auch mit Berücksichtigung von (20)

$$(33)\quad \omega' = \frac{\omega}{2\pi i}\left(\log\frac{g-1}{g} - 2\log 24\sqrt{3}\right) - \frac{i}{\sqrt{192}}\, g_2^{-\frac{1}{4}} G\left(\tfrac{5}{12}, \tfrac{1}{12}, \frac{g-1}{g}\right).$$

Durch ähnliche Schlüsse gelangt man zu dem Ausdruck für η'. Beachtet man, dass $\frac{\eta'}{\eta}$ die Form

$$C + C' \log(g-1) + C'\,\frac{G\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, 1-g\right)}{K_g}$$

besitzt, dass ausserdem wegen (6) und (29) oder (30)

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{\omega'}{\omega} - \frac{\pi i}{2\eta\omega} = \frac{\omega'}{\omega} - \frac{6i}{\pi} + (g-1)\,\mathfrak{P}(g-1)$$

ist, so erhält man

$$\eta' = \frac{\eta}{2\pi i}\left(\log(g-1) + 12 - 2\log 24\sqrt{3}\right) \tag{34}$$
$$- \frac{i}{\sqrt{96}}\, g_3^{\frac{1}{6}}\, G\left(\tfrac{5}{12}, -\tfrac{1}{12}, 1-g\right)$$
$$= \frac{\eta}{2\pi i}\left(\log\frac{g-1}{g} + 12 - 2\log 24\sqrt{3}\right) \tag{35}$$
$$- \frac{i}{\sqrt{96}\sqrt[4]{3}}\, g_2^{\frac{1}{4}}\, G\left(-\tfrac{1}{12}, \tfrac{7}{12}, \frac{g-1}{g}\right).$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in (6) liefert noch die Relation

$$12 g^{-\frac{1}{3}} = 12 H_3(g)\, K_3(g) + H_3(g)\, G\left(\tfrac{5}{12}, -\tfrac{1}{12}, 1-g\right)$$
$$- K_3(g)\, G\left(\tfrac{11}{12}, \tfrac{5}{12}, 1-g\right).$$

Um die Ausdrücke für ein negatives g_3 zu ermitteln, ist es nicht erforderlich, die ebengemachten Schlüsse zu wiederholen; ein Blick auf die Gleichungen (28) zeigt vielmehr, dass, wenn $-g_3$ für g_3 gesetzt wird, die Grössen $\omega, \omega', \eta, \eta'$ übergehen in $-\omega' i, \omega i, \eta' i, -\eta i$. Man erhält also die gewünschten Ausdrücke, wenn man in den Gleichungen (29), (30) etc. für $g_3, \omega, \omega', \eta, \eta'$ einfach $-g_3, -\omega' i, \omega i, \eta' i, -\eta i$ schreibt; also

$$\left\{\begin{aligned}
\omega' &= \frac{\pi i}{\sqrt{54}}\,\frac{g_2(-g_3)^{\frac{1}{6}}}{g_3} H_3(g), \quad \eta' = -\frac{\pi i}{\sqrt{24}}(-g_3)^{\frac{1}{6}} K_3(g),\\
\omega &= -\frac{\omega'}{2\pi i}\left(\log(g-1) - 2\log 24\sqrt{3}\right)\\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{216}}\,\frac{g_2(-g_3)^{\frac{1}{6}}}{g_3}\, G\left(\tfrac{11}{12}, \tfrac{5}{12}, 1-g\right)\\
&= -\frac{\omega'}{2\pi i}\left(\log\frac{g-1}{g} - 2\log 24\sqrt{3}\right)\\
&\quad - \frac{1}{\sqrt[4]{192}}\, g_2^{-\frac{1}{4}}\, G\left(\tfrac{5}{12}, \tfrac{1}{12}, \frac{g-1}{g}\right),\\
\eta &= -\frac{\eta'}{2\pi i}\left(\log(g-1) + 12 - 2\log 24\sqrt{3}\right)\\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{96}}(-g_3)^{\frac{1}{6}}\, G\left(\tfrac{5}{12}, -\tfrac{1}{12}, 1-g\right)\\
&= -\frac{\eta'}{2\pi i}\left(\log\frac{g-1}{g} + 12 - 2\log 24\sqrt{3}\right)\\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{96}\sqrt[4]{3}}\, g_2^{\frac{1}{4}}\, G\left(-\tfrac{1}{12}, \tfrac{7}{12}, \frac{g-1}{g}\right).
\end{aligned}\right. \tag{36}$$

Von den in Vorstehendem entwickelten Ausdrücken haben offenbar

diejenigen, in denen kein Logarithmus auftritt, in der Umgebung des Punktes $g = 1$ den Charakter einer ganzen rationalen Function, abgesehen natürlich von dem Fall, wo g_2 und g_3 gleichzeitig gleich Null oder Unendlich und $g = 1$ wird. Diese Ausdrücke lassen sich also mit Hülfe der Formeln (23) ohne Zweideutigkeit bis zur Umgebung des Punktes $g = 0$ fortsetzen, während bei den anderen wegen des Logarithmus eine von dem Wege der Fortsetzung abhängige Vieldeutigkeit stattfindet. Wir wollen dieselbe berücksichtigen, indem wir in (24) $\log(1-g) = \log(g-1) + \varepsilon\pi i$ setzen, wo ε eine beliebige ungerade Zahl bedeutet, die vorläufig $= \pm 1$ sein soll. Ferner hat man nach den von Gauss gegebenen Formeln

$$2\Psi(0) - \Psi\left(-\tfrac{1}{12}\right) - \Psi\left(-\tfrac{7}{12}\right) = 2\log 24\sqrt{3} - \pi\sqrt{3},$$

$$2\Psi(0) - \Psi\left(-\tfrac{13}{12}\right) - \Psi\left(-\tfrac{7}{12}\right) = 2\log 24\sqrt{3} - 12 - \pi\sqrt{3},$$

folglich werden die Gleichungen (23) und (24)

$$H_3 = \frac{\Pi\left(-\frac{16}{12}\right)}{\Pi\left(-\frac{5}{12}\right)\Pi\left(-\frac{11}{12}\right)} H_1 + \frac{\Pi\left(-\frac{8}{12}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right)\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)} g^{-\frac{1}{3}} H_2,$$

$$K_3 = \frac{\Pi\left(-\frac{4}{12}\right)}{\Pi\left(\frac{1}{12}\right)\Pi\left(-\frac{5}{12}\right)} K_1 + \frac{\Pi\left(-\frac{20}{12}\right)}{\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)\Pi\left(-\frac{13}{12}\right)} g^{\frac{2}{3}} K_2,$$

$$\frac{\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)}{\Pi\left(\frac{4}{12}\right)} H_1 = -H_3\left(\log(g-1) - 2\log 24\sqrt{3}\right) - G\left(\tfrac{11}{12}, \tfrac{5}{12}, 1-g\right) - H_3(\varepsilon\pi i + \pi\sqrt{3}),$$

$$-\frac{\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)\Pi\left(-\frac{13}{12}\right)}{\Pi\left(-\frac{8}{12}\right)} K_1 = -K_3\left(\log(g-1) + 12 - 2\log 24\sqrt{3}\right) - G\left(\tfrac{5}{12}, \tfrac{1}{12}, 1-g\right) - K_3(\varepsilon\pi i + \pi\sqrt{3}).$$

Wenn wir wieder zunächst $g_3 > 0$ voraussetzen, so erhält man aus (30)

$$\omega = \frac{\pi}{\sqrt{54}} \frac{\Pi\left(-\frac{4}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{5}{12}\right)\Pi\left(-\frac{11}{12}\right)} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{3}}}{g_3} H_1 + \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{\Pi\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right)\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)} g_3^{-\frac{1}{6}} H_2,$$

$$\eta = \frac{\pi}{\sqrt{24}} \frac{\Pi\left(-\frac{1}{3}\right)}{\Pi\left(\frac{1}{12}\right)\Pi\left(-\frac{5}{12}\right)} g_3^{\frac{1}{6}} K_1 + \frac{\pi}{9\sqrt{24}} \frac{\Pi\left(-\frac{5}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)\Pi\left(-\frac{13}{12}\right)} \frac{g_2^2 g_3^{-\frac{1}{6}}}{g_3} K_2.$$

Diese Reihen enthalten offenbar die Entwicklung der Perioden nach steigenden Potenzen von g_2. Bezeichnet man deshalb die Werthe von ω und η für $g_2 = 0$, $g_3 = 1$ mit ω_1 und η_1, so ist

$$(37) \quad \omega_1 = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{\Pi\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right)\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)}, \quad \eta_1 = \frac{\pi}{\sqrt{24}} \frac{\Pi\left(-\frac{1}{3}\right)}{\Pi\left(\frac{1}{12}\right)\Pi\left(-\frac{5}{12}\right)}.$$

Hieraus folgt dann nach einigen Umformungen oder, indem man wieder wie früher die Differentialgleichungen (11) zur Bestimmung der Coefficienten von g_2 und g_2^2 verwendet,

$$(38) \quad \omega = \omega_1 g_3^{-\frac{1}{6}} H_2(g) - \frac{\eta_1}{6} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{6}}}{g_3} H_1(g),$$

$$(39) \quad \eta = \eta_1 g_3^{\frac{1}{6}} K_1(g) + \frac{\omega_1}{144} \frac{g_2^2 g_3^{-\frac{1}{6}}}{g_3} K_2(g).$$

Multiplicirt man ferner die oben angesetzten Gleichungen, welche Logarithmen enthalten, mit

$$\frac{i}{\sqrt{216}} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{6}}}{g_3} \quad \text{resp.} \quad \frac{i}{\sqrt{96}} g_3^{\frac{1}{6}},$$

so erhält man nach Ausführung der nöthigen Reductionen

$$(40) \quad \omega' = \frac{-\varepsilon + i\sqrt{3}}{2} \omega_1 g_3^{-\frac{1}{6}} H_2(g) - \frac{-\varepsilon - i\sqrt{3}}{2} \frac{\eta_1}{6} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{6}}}{g_3} H_1(g),$$

$$(41) \quad \eta' = \frac{-\varepsilon - i\sqrt{3}}{2} \eta_1 g_3^{\frac{1}{6}} K_1(g) + \frac{-\varepsilon + i\sqrt{3}}{2} \frac{\omega_1}{144} \frac{g_2^2 g_3^{-\frac{1}{6}}}{g_3} K_2(g).$$

Die für ein negatives g_3 geltenden Formeln erhält man wieder wie früher, nämlich

$$(42) \begin{cases} \omega' = i\omega_1 (-g_3)^{-\frac{1}{6}} H_2(g) + \frac{i\eta_1}{6} \frac{g_2 (-g_3)^{\frac{1}{6}}}{g_3} H_1(g), \\ \eta' = -i\eta_1 (-g_3)^{\frac{1}{6}} K_1(g) + \frac{i\omega_1}{144} \frac{g_2^2 (-g_3)^{-\frac{1}{6}}}{g_3} K_2(g), \\ \omega = -\frac{-\varepsilon + i\sqrt{3}}{2} i\omega_1 (-g_3)^{-\frac{1}{6}} H_2(g) - \frac{-\varepsilon - i\sqrt{3}}{2} \frac{i\eta_1}{6} g_2 (-g_3)^{\frac{1}{6}} H_1(g), \\ \eta = \frac{-\varepsilon - i\sqrt{3}}{2} i\eta_1 (-g_3)^{\frac{1}{6}} K_1(g) - \frac{-\varepsilon + i\sqrt{3}}{2} \frac{i\omega_1}{144} \frac{g_2^2 (-g_3)^{-\frac{1}{6}}}{g_3} K_2(g). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (37) und (6) folgt dann noch

$$\pi = \omega_1 \eta_1 \sqrt{12}, \quad 1 = K_1 H_2 + \frac{g}{32} K_2 H_1.$$

IV.

Durch die in dem letzten Abschnitt aufgestellten Ausdrücke ist für jedes Werthepaar $g_2\, g_3$ ein System von simultanen Werthen der Fundamentalperioden der Integrale erster und zweiter Gattung gegeben. Es ist dabei gleichgültig, wie man die Werthe der mehrdeutigen Grössen $g_2^{\frac{1}{4}}$, $g_3^{\frac{1}{6}}$, $\log(g-1)$ fixirt, vorausgesetzt natürlich, dass dieselben innerhalb einer jeden einzelnen Reihe von Ausdrücken dieselben sind. Ferner gestatten die verschiedenen Formen, welche im zweiten Abschnitt für die hier benutzten hypergeometrischen Reihen aufgeführt worden sind, zu bewirken, dass man für jedes beliebige g convergente Entwicklungen erhält. Es ist dazu nur erforderlich, von den Grössen

$$g,\ \frac{g}{g-1},\ 1-g,\ \frac{g-1}{1},\ \frac{1}{g},\ \frac{1}{g-1}$$

diejenige auszuwählen, deren absoluter Betrag kleiner als Eins ist. Nur die beiden Punkte $g = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$ machen eine Ausnahme. Für diese beiden Punkte liegen die eben genannten Grössen stets an der Grenze des Convergenzgebietes der verschiedenen Reihen. Da jedoch $\Omega, \Omega', \mathsf{H}, \Theta'$ an diesen beiden Stellen den Charakter ganzer rationaler Functionen besitzen, so wollen wir diesen Ausnahmefall hier nicht weiter berücksichtigen.

Es ist nun noch übrig zu untersuchen, wie sich die Perioden als Functionen von ξ verhalten. Dieselben haben im Allgemeinen den Charakter einer ganzen rationalen Function; Ausnahmestellen können nur diejenigen Punkte ξ sein, in welchen eine der folgenden Gleichungen stattfindet:

$$g_2 = 0,\ g_2 = \infty,\ g_3 = 0,\ g_3 = \infty,\ g = 1.$$

Denkt man sich alle diese singulären Punkte durch eine gebrochene Linie M einander verbunden, welche durch keinen Punkt der ξ-Ebene zweimal hindurch geht und ins Unendliche verläuft, wenn $\xi = \infty$ ebenfalls eine Ausnahmestelle ist, so ist durch diesen Schnitt die ganze ξ-Ebene in ein zweifach, resp. einfach zusammenhängendes Gebiet zerlegt. Innerhalb dieses Gebietes sind dann die Grössen $\omega, \omega', \eta, \eta'$ eindeutig definirt, wenn man einem beliebigen nicht singulären Punkte ξ_0 ein bestimmtes Werthsystem $\bar{\omega}, \bar{\omega}', \bar{\eta}, \bar{\eta}'$, wie es durch die Formeln des vorigen Abschnittes gegeben ist, zuordnet, und die so definirten Functionen nach allen Punkten ξ hin fortsetzt, ohne jedoch die Linie M zu passiren. Zu beiden Seiten der Linie M werden offenbar $\bar{\omega}, \bar{\omega}', \bar{\eta}, \bar{\eta}'$ verschiedene Werthe besitzen können. Um sich

von diesen Werthdifferenzen ein allgemeines Bild zu verschaffen, ist es nur nöthig, zu ermitteln, wie sich die im vorigen Abschnitt dargestellten $\omega, \omega', \eta, \eta'$ verhalten, wenn ξ eine der Ausnahmestellen umwindet, während die Untersuchung über das Verhalten der Perioden in jedem einzelnen Punkte des Verzweigungsschnittes einfacher in jedem besonderen Falle besonders für gegebene g_2 und g_3 durchgeführt wird.

Es seien die Grössen a und b niemals $= 0$ oder $= \infty$, c niemals $= 0$ oder $= 1$ oder $= \infty$, dann kann ξ höchstens in einem der folgenden 13 Fälle singulärer Punkt sein:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$g_2 =$	a	a	0	0	0	0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$g_3 =$	b	∞	0	0	0	0	∞	b	0	∞	∞	∞	∞
$g =$	1.	0	c	0	1	∞	0	∞	∞	c	0	1	∞

In den drei noch übrigen möglichen Fällen haben offenbar die Perioden den Charakter einer rationalen oder einer ganzen rationalen Function. In dem Falle (1) können die Perioden logarithmisch, in den Fällen (5) und (12) logarithmisch und algebraisch, in allen übrigen Fällen nur algebraisch unstetig werden. Es sind nun vier Gruppen von Fällen, nämlich $g = 0$, $g = \infty$, $g = c$, $g = 1$ zu unterscheiden.

Es sei zunächst $g = 0$. Man setze in den Formeln (38) bis (41) $\varepsilon = 1$ und bezeichne den zu $\varepsilon = -1$ gehörigen Werth von ω', η' mit ω'', η'', so ist $\omega + \omega' = \omega''$, $\eta + \eta' = \eta''$. Sind

$$\varepsilon_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

die beiden complexen cubischen Wurzeln der Einheit, also $-\varepsilon_3$ eine primitive sechste Wurzel der Einheit, ist ferner n die Ordnungszahl für das Null- oder Unendlichwerden von g_3, wo für ein Unendlichwerden von g_3 n negativ zu nehmen ist, schreibt man endlich die Gleichungen (38) bis (41) für einen beliebig fixirten Wurzelwerth von $g_3^{\frac{1}{6}}$ in der Gestalt

$$\omega = a + b, \quad \omega' = a\varepsilon_2 + b\varepsilon_3, \quad \omega'' = -a\varepsilon_3 - b\varepsilon_2,$$
$$\eta = c + d, \quad \eta' = c\varepsilon_2 + d\varepsilon_3, \quad \eta'' = -c\varepsilon_3 - d\varepsilon_2,$$

so sind offenbar alle Werthsysteme, welche $\omega, \omega', \omega'', \eta, \eta', \eta''$ annehmen können, wenn ξ den betreffenden singulären Punkt ein oder mehrere Male umwindet, in folgenden Ausdrücken enthalten:

$$\omega = a(-\varepsilon_3)^{-kn} + b(-\varepsilon_3)^{kn}, \quad \omega' = a\varepsilon_2(-\varepsilon_3)^{-kn} + b\varepsilon_3(-\varepsilon_3)^{kn},$$
$$\omega'' = -a\varepsilon_3(-\varepsilon_3)^{-kn} - b\varepsilon_2(-\varepsilon_3)^{kn},$$
$$\eta = c(-\varepsilon_3)^{-kn} + d(-\varepsilon_3)^{kn}, \quad \eta' = c\varepsilon_2(-\varepsilon_3)^{-kn} + d\varepsilon_3(-\varepsilon_3)^{kn},$$
$$\eta'' = -c\varepsilon_3(-\varepsilon_3)^{-kn} - b\varepsilon_2(-\varepsilon_3)^{kn},$$

wo k die Anzahl der Windungen bedeutet. Wenn $n \equiv \pm 1 \pmod 6$, so erhält man folgende sechs Werthsysteme:

$$\begin{array}{cccccc} \omega & \omega' & \omega'' & \eta & \eta' & \eta'', \\ -\omega' & \omega'' & \omega & -\eta' & \eta'' & \eta, \\ -\omega'' & \omega & -\omega' & -\eta'' & \eta & -\eta', \\ -\omega & -\omega' & -\omega'' & -\eta & -\eta' & -\eta'', \\ \omega' & -\omega'' & -\omega & \eta' & -\eta'' & -\eta, \\ \omega'' & -\omega & \omega' & \eta'' & -\eta & \eta'. \end{array}$$

Wenn $n \equiv \pm 2 \pmod 6$, so fällt das zweite, vierte und sechste Werthsystem fort; ist $n \equiv 3 \pmod 6$, so findet nur ein Zeichenwechsel statt; ist endlich $n \equiv 0 \pmod 6$, so haben die Perioden an der betreffenden Stelle den Charakter einer rationalen Function. Die Formeln (42) liefern offenbar ein analoges Resultat.

Wenn $g = \infty$, so erkennt man sofort, dass, wenn die Ordnungszahl von g_2 m und $m \equiv \pm 1 \pmod 4$ ist, nur folgende vier Werthsysteme auftreten können:

$$\begin{array}{cccc} \omega & \omega' & \eta & \eta', \\ -\omega' & \omega & -\eta' & \eta, \\ -\omega & -\omega' & -\eta & -\eta', \\ \omega' & -\omega & \eta' & -\eta, \end{array}$$

Wenn $m \equiv 2 \pmod 4$, so findet nur ein Zeichenwechsel statt, und wenn $m \equiv \pmod 4$, so haben die Perioden den Charakter einer rationalen Function.

Wenn ferner $g = c$ oder $g = 1$ ist, so muss $3m - 2n = 0$, also $m = 2p$, $n = 3p$ sein; die algebraischen Glieder wechseln also für ein ungerades p ihr Zeichen, für ein gerades p werden sie rational. Ferner wächst, wenn $g = 1$, der Logarithmus beim Umkreisen der singulären Stelle um ein Vielfaches von $2\pi i$, also die eine Periode um ein Vielfaches der andern.

Hiernach sind also sämmtliche zu einem bestimmten Werthe von ξ gehörigen Werthe der Perioden in der allgemeinen Form

$$\bar{\omega} = f\omega + g\omega', \quad \bar{\omega}' = f'\omega + g'\omega',$$
$$\bar{\eta} = f\eta + g\eta', \quad \bar{\eta}' = f'\eta + g'\eta',$$

enthalten, wo wegen (6)

$$fg' - f'g = 1$$

sein muss. Der Weg, auf welchem man von ξ_0 nach ξ übergeht, lässt sich dabei stets so wählen, dass die ganzen Zahlen f, g, f', g'

alle beliebigen mit jener Bedingungsgleichung verträglichen Werthe annehmen.

Ich muss es mir hier versagen, auf die Folgerungen näher einzugehen, welche sich in Bezug auf den Zusammenhang zwischen den Invarianten g_2, g_3, g und der Grösse

$$h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$$

aus den bisherigen Entwicklungen ziehen lassen. Es mag hier nur bemerkt werden, dass es möglich ist, g als Quotienten zweier Potenzreihen von h mit ganzzahligen Coefficienten darzustellen, welche unbedingt convergiren, so lange der absolute Betrag von h kleiner ist als Eins.

Dorpat, im April 1875.

Ueber neue Focaleigenschaften der Flächen 2. Grades.

Von

Otto Staude in Breslau.

§ 1.

Einleitung.

Definirt man die elliptischen Coordinaten λ, μ eines Punktes der Ebene, dessen Parallelcoordinaten x, y heissen, in Bezug auf 2 reelle Constanten α, β durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\alpha-\lambda}+\frac{y^2}{\beta-\lambda}=1, \qquad \frac{x^2}{\alpha-\mu}+\frac{y^2}{\beta-\mu}=1,$$

in Verbindung mit den Ungleichungen:

$$(2) \qquad -\infty<\lambda<\beta<\mu<\alpha,$$

so drücken sich die Entfernungen des Punktes λ, μ von den gemeinsamen Brennpunkten der Kegelschnitte (1) in seinen elliptischen Coordinaten also aus:*)

$$(3) \qquad r_1=\sqrt{\alpha-\lambda}+\sqrt{\alpha-\mu}, \qquad r_2=\sqrt{\alpha-\lambda}-\sqrt{\alpha-\mu}.$$

Diese Formeln können als gemeinsamer Ausdruck bekannter Focaleigenschaften der Ellipse, der Hyperbel, des Kreises und der Cassini'schen Curve gelten. Denn ihre Verbindung ergiebt unmittelbar:

$$r_1+r_2=2\sqrt{\alpha-\lambda}, \qquad r_1-r_2=2\sqrt{\alpha-\mu},$$
$$r_1^2+r_2^2=2\alpha-\lambda-\mu, \qquad r_1r_2=\mu-\lambda,$$

während

$$\lambda=\text{const.}, \qquad \mu=\text{const.},$$
$$\lambda+\mu=\text{const.}, \qquad \mu-\lambda=\text{const.}$$

die Gleichungen der Ellipse, der Hyperbel, des Kreises und der Cassini'schen Curve in elliptischen Coordinaten sind.

*) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, herausg. von Clebsch, S. 222.

Man definirt im Raume die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν eines Punktes, dessen Parallelcoordinaten x, y, z heissen, in Bezug auf 3 reelle Constanten α, β, γ durch die Gleichungen:

$$(4)\quad \frac{x^2}{\alpha-\lambda}+\frac{y^2}{\beta-\lambda}+\frac{z^2}{\gamma-\lambda}=1, \quad \frac{x^2}{\alpha-\mu}+\frac{y^2}{\beta-\mu}+\frac{z^2}{\gamma-\mu}=1,$$
$$\frac{x^2}{\alpha-\nu}+\frac{y^2}{\beta-\nu}+\frac{z^2}{\gamma-\nu}=1,$$

in Verbindung mit den Ungleichungen:

$$(5)\qquad -\infty<\lambda<\gamma<\mu<\beta<\nu<\alpha.$$

Man hat ferner in

$$\lambda=\text{const.}, \quad \mu=\text{const.}, \quad \nu=\text{const.}, \quad \lambda+\mu+\nu=\text{const.},$$
$$\mu+\nu=\text{const.}, \quad \lambda+\mu-\nu=\text{const.}, \quad \mu-\nu=\text{const.}$$

die Form der Gleichungen des Ellipsoides, des ein- und zwei-schaligen Hyperboloides, der Kugel, der Fresnel'schen Wellenfläche, der Cassinoidflächen 6. und 8. Ordnung in elliptischen Coordinaten*).

Eine Ausdehnung der oben erwähnten Focaleigenschaften ebener Curven auf die entsprechenden Gebilde des Raumes darf daher zu erwarten sein, wenn man den Ausdrücken:

$$(6)\qquad r=\sqrt{\alpha-\lambda}\pm\sqrt{\alpha-\mu}\pm\sqrt{\alpha-\nu}$$

eine entsprechende geometrische Deutung zu geben vermag, wie sie die Ausdrücke (3) in den Focaldistanzen des Punktes λ, μ gefunden haben.

Den beiden (reellen) Focalpunkten der Kegelschnitte (1) entsprechen unendlich viele gemeinsame Focalpunkte der Flächen (4), welche die gemeinsamen Focalcurven derselben, die Focalellipse und Focalhyperbel, bilden (zwei Focalpunkte auf verschiedenen dieser beiden Focalcurven sollen *ungleichnamige Focalpunkte* genannt werden). Aber die Entfernung eines Punktes P mit den elliptischen Coordinaten λ, μ, ν von einem beliebigen Focalpunkte stellt sich im Allgemeinen nicht durch einen Ausdruck dar, der dem einfachen Typus (6) zugehört. Dagegen findet dies annähernd statt für die Entfernung des Punktes P von denjenigen 8 Focalpunkten, in denen die 4 durch P gelegten gemeinsamen Transversalen der beiden Focalcurven (*die 4 Focalstrahlen des Punktes P*) diese letzteren schneiden. Beziehen sich diese Distanzen auch zunächst nicht auf jeden beliebigen Focalpunkt, sondern auf 8 durch den Punkt P im Allgemeinen bestimmte, specielle Focalpunkte, so werden sie doch sofort von dieser Beschränkung befreit, wenn sie von jenen 8 Focalpunkten aus nach einem beliebigen jeweils

*) Vgl. W. Roberts, Annali di matematica, Serie I, Bd. 4, S. 143 und meine Dissertation: Ueber lineare Gleichungen zwischen elliptischen Coordinaten, Leipzig, 1881.

ungleichnamigen Focalpunkte geradlinig fortgesetzt werden; und auch nach dieser Fortsetzung drücken sich die nunmehr gebrochen geradlinigen Distanzen noch immer durch Formeln aus, die das Charakteristische des einfachen Typus (6) besitzen; sind doch jene Fortsetzungen wieder Stücke gemeinsamer Transversalen der beiden Focalcurven.

Somit besitzt thatsächlich jeder Punkt P des Raumes mit Bezug auf das System confocaler Flächen (4) gewisse Focaldistanzen, die in den elliptischen Coordinaten λ, μ, ν des Punktes durch einen Ausdruck der verlangten Form darstellbar sind, nämlich seine längs gemeinsamer Transversalen der Focalellipse und Focalhyperbel gemessenen, geradlinig gebrochenen Abstände von beliebigen Focalpunkten.

Auf diese „gebrochenen Focaldistanzen" beziehen sich die folgenden Untersuchungen, welche eine wesentliche Verallgemeinerung der früher*) von mir gefundenen Focaleigenschaften der Flächen 2. Grades und zugleich einen neuen Beweis der letzteren zu geben bestimmt sind.

§ 2.

Die Gleichgewichtsdistanzen zweier Punkte über eine Curve.

Eine Curve im Raume sei durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(s), \quad y = \chi(s), \quad z = \psi(s)$$

gegeben, welche die Coordinaten x, y, z des Curvenpunktes P als Functionen der Bogenlänge s der Curve darstellen. Es seien ferner $P_1 = x_1, y_1, z_1$ und $P_2 = x_2, y_2, z_2$ zwei feste Punkte im Raume und s_1 und s_2 die absoluten Werthe ihrer Entfernungen von einem veränderlichen Curvenpunkte P. Indem man nun die Summe:

$$S(s) = s_1 + s_2 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}$$

als Function von s betrachtet, kann man nach den Werthen von s fragen, für welche dieselbe einen Maximal- oder Minimalwerth annimmt. Die Nullsetzung der 1. Variation der Function führt zu der Gleichung:

$$\left(\frac{x-x_1}{s_1} + \frac{x-x_2}{s_2}\right)\frac{dx}{ds} + \left(\frac{y-y_1}{s_1} + \frac{y-y_2}{s_2}\right)\frac{dy}{ds} + \left(\frac{z-z_1}{s_1} + \frac{z-z_2}{s_2}\right)\frac{dz}{ds} = 0.$$

*) Vgl. Mathematische Annalen, Bd. 20, S. 183. Einen neuen rein geometrischen Beweis der dort entwickelten allgemeinen Sätze giebt neuerdings Herr Finsterwalder, Math. Ann., Bd. 26, S. 546.

Diese drückt aus, dass die Halbirungslinie des Winkels zwischen den Richtungen PP_1 und PP_2 auf der Curventangente in P senkrecht steht. In diesem Falle soll die gebrochene Linie P_1PP_2 *eine Gleichgewichtsdistanz der Punkte P_1 und P_2 über die Curve* heissen. weil sie die Gleichgewichtslage eines unausdehnbaren Fadens bezeichnet, der über die Curve bei P ohne Reibung gleitet und nach P_1 und P_2 hin gespannt wird.

Benennt man mit τ_1 und τ_2 die Winkel zwischen den Richtungen PP_1 und PP_2 einerseits und einer bestimmten der beiden Richtungen der Curventangente in P andererseits, so lautet die obige Gleichung:

$$\cos\tau_1 + \cos\tau_2 = 0,$$

was man auch in folgender Weise deuten kann:

Die gebrochene Linie P_1PP_2, welche zwischen den festen Punkten P_1 und P_2 über den Punkt P der Curve läuft, ist eine Gleichgewichtsdistanz der Punkte P_1 und P_2, wenn die beiden geradlinigen Stücke PP_1 und PP_2 auf verschiedenen Mänteln eines Rotationskegels liegen, welcher P als Spitze und die Curventangente in P als Axe hat.

§ 3.

Die Entfernung zweier ungleichnamiger Focalpunkte.

Die Entfernung der beiden Schnittpunkte einer gemeinsamen Transversale der beiden Focalkegelschnitte mit diesen drückt sich in elliptischen Coordinaten durch Ausdrücke vom Typus § 1, 3 aus. Seien nämlich $G = x_1, y_1, z_1$ und $H = x_2, y_2, z_2$ irgend zwei ungleichnamige Focalpunkte, beziehungsweise auf der Focalellipse und auf der Focalhyperbel gelegen. Die elliptischen Coordinaten der beiden Punkte sind von der Form γ, γ, ν und λ, β, β. Zwischen diesen und den entsprechenden Parallelcoordinaten bestehen die Relationen:

$$x_1 = \omega_1 \frac{\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\alpha-\nu}}{\sqrt{\alpha-\beta}}, \quad y_1 = \pm\frac{\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\nu-\beta}}{\sqrt{\alpha-\beta}}, \quad z_1 = 0;$$

$$x_2 = \omega_2 \frac{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\lambda}}{\sqrt{\alpha-\gamma}}, \quad y_2 = 0, \qquad z_2 = \pm\frac{\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\gamma-\lambda}}{\sqrt{\alpha-\gamma}},$$

wo ω_1 und ω_2 die Bedeutung ± 1 und alle vorkommenden Quadratwurzeln positive Werthe haben sollen. Die Substitution dieser Werthe in den Ausdruck

$$s = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

liefert als positiven Werth der Entfernung $GH = s$:

$$s = \sqrt{\alpha-\lambda} - \omega_1\omega_2\sqrt{\alpha-\nu}.$$

Damit ergiebt sich, wenn 2 Punkte des Raumes *gleichseitig* oder *ungleichseitig* heissen, jenachdem sie auf gleicher oder auf ungleichen Seiten des zweischaligen Hyperboloides $\nu = \alpha$ (der Ebene der imaginären Focalellipse der confocalen Flächen § 1, 4) liegen, der Satz:

I. *Der Abstand zweier ungleichnamiger Focalpunkte* $G = \gamma, \gamma, \nu$ *und* $H = \lambda, \beta, \beta$ *ist, jenachdem dieselben gleichseitig oder ungleichseitig liegen:*

$$s = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \nu} \quad \text{oder} \quad s = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \nu}.$$

Diese Formeln sind der gemeinsame Ausdruck der Dupin'schen Verallgemeinerungen*) der Focaleigenschaften der Kegelschnitte. Es folgt aus ihnen unmittelbar z. B. die folgende Eigenschaft der Focalellipse in Bezug auf zwei beliebige ungleichseitige Punkte der Focalhyperbel:

II. *Sind* $H_1\ (\lambda_1, \beta, \beta)$ *und* $H_2\ (\lambda_2, \beta, \beta)$ *zwei ungleichseitige Punkte der Focalhyperbel, so ist für alle Punkte* $G(\gamma, \gamma, \nu)$ *der Focalellipse die Summe der Entfernungen* GH_1 *und* GH_2 *die nämliche* $(GH_1 + GH_2 = \sqrt{\alpha - \lambda_1} + \sqrt{\alpha - \lambda_2})$.

Da GH_1 und GH_2 auf verschiedenen Mänteln des von G aus über der Focalhyperbel errichteten geraden Kegels liegen, so bedeutet die gebrochene Linie H_1GH_2 nach § 2 immer eine Gleichgewichtsdistanz der beiden Punkte H_1 und H_2 über die Focalellipse, wo auch G auf der letzteren liegen mag.

Diese Betrachtung dehnt sich übrigens leicht auf den Fall aus, dass H_1 und H_2 irgend zwei gleichnamige Focalpunkte und G ein beweglicher Punkt des gegen sie ungleichnamigen Focalkegelschnittes ist; nur bestehen die Gleichgewichtsdistanzen H_1GH_2, wenn H_1 und H_2 zwei gleichseitige Punkte der Focalhyperbel oder zwei Punkte der Focalellipse sind, aus einem endlichen und einem durch das Unendliche hindurchlaufenden geradlinigen Stücke.

§ 4.

Die 8 Focalcurvendistanzen eines Punktes.

Ein Punkt P des Raumes habe die Parallelcoordinaten x', y', z' und die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν. Irgend einer der 4 Focalstrahlen des Punktes, $F_i (i = 1, 2, 3, 4)$, schneide die Focalellipse im Punkte G_i und die Focalhyperbel im Punkte H_i. Es sollen die Längen PG_i und PH_i, die *„Focalcurvendistanzen"* des Punktes P, in den elliptischen Coordinaten des Punktes dargestellt werden.

Fällt man vom Coordinatenanfangspunkte $O(x = 0, y = 0, z = 0)$

*) Vgl. Dupin, Développements de géometrie (Paris, 1813), mém. IV, p. 280; Chasles, Comptes rendus, t. XVI, p. 833 (1843); Plücker, System der Geometrie des Raumes (Düsseldorf, 1852), § 10, S 201.

auf die Tangentialebenen der 3 Flächen λ, μ, ν im Punkte P Perpendikel, so sind die Längen derselben bezüglich*):

$$(1)\qquad p_\lambda = \frac{\sqrt{\alpha-\lambda}\sqrt{\beta-\lambda}\sqrt{\gamma-\lambda}}{\sqrt{\mu-\lambda}\sqrt{\nu-\lambda}}, \quad p_\mu = \frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}}{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}},$$

$$p_\nu = \frac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}}{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}},$$

wo, wie überall im Folgenden, die einzelnen Quadratwurzeln positiv gelten sollen. Den Richtungen dieser von O auslaufenden Perpendikel parallel, sollen durch den Punkt P drei Halbstrahlen gezogen und als positive Hälften dreier Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems $P\xi$, $P\eta$, $P\zeta$ genommen werden. Zwischen den Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes in Bezug auf diese Axen einerseits und seinen Coordinaten x, y, z in Bezug auf das frühere Coordinatensystem der Hauptaxen Ox, Oy, Oz der confocalen Flächen § 1, 4 andererseits bestehen die Relationen**):

$$(2)\qquad \begin{cases} x - x' = \left\{\frac{p_\lambda}{\alpha-\lambda}\xi + \frac{p_\mu}{\alpha-\mu}\eta + \frac{p_\nu}{\alpha-\nu}\zeta\right\} x', \\ y - y' = \left\{\frac{p_\lambda}{\beta-\lambda}\xi + \frac{p_\mu}{\beta-\mu}\eta + \frac{p_\nu}{\beta-\nu}\zeta\right\} y', \\ z - z' = \left\{\frac{p_\lambda}{\gamma-\lambda}\xi + \frac{p_\mu}{\gamma-\mu}\eta + \frac{p_\nu}{\gamma-\nu}\zeta\right\} z'. \end{cases}$$

Die Gleichungen der 4 Focalstrahlen des Punktes P in Bezug auf das Coordinatensystem der ξ, η, ζ lauten***):

$$(3)\quad \xi = \varepsilon_i \frac{\sqrt{\beta-\lambda}\sqrt{\gamma-\lambda}}{\sqrt{\mu-\lambda}\sqrt{\nu-\lambda}}\sigma, \quad \eta = \varepsilon_i' \frac{\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}}{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}}\sigma, \quad \zeta = \varepsilon_i'' \frac{\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}}{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}}\sigma,$$

wo ε_i, ε_i', ε_i'' die Bedeutung ± 1 haben, σ die Entfernung des laufenden Punktes ξ, η, ζ vom Punkte P und die 3 Coefficienten von σ die Richtungscosinus des Focalstrahles sind. Da den beiden Werthsystemen ε_i, ε_i', ε_i'' und $-\varepsilon_i$, $-\varepsilon_i'$, $-\varepsilon_i''$ in (3) derselbe Focalstrahl entspricht, so erhält man die 4 Focalstrahlen, indem man etwa annimmt:

$$(4)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = -1, & \varepsilon_1' = 1, & \varepsilon_1'' = 1, \\ \varepsilon_2 = -1, & \varepsilon_2' = 1, & \varepsilon_2'' = -1, \\ \varepsilon_3 = -1, & \varepsilon_3' = -1, & \varepsilon_3'' = -1, \\ \varepsilon_4 = -1, & \varepsilon_4' = -1, & \varepsilon_4'' = 1. \end{cases}$$

Denkt man sich dann den Focalstrahl F_i in der Weise erzeugt,

---

*) Vgl. Salmon-Fiedler, a. a. O., Art. 165. **) Ebend., Art. 171.

***) Vgl. Liouville, Liouville's Journal, Ser. I, Bd. 12, S. 423; vgl. auch Schwarz, Bestimmung der scheinbaren Grösse eines Ellipsoids für einen beliebigen Punkt des Raumes, Götting. Nachrichten, Jahrg. 1883, Nr. 2.

dass der Parameter σ der Gleichungen (3) zuerst von 0 gegen $+\infty$ und hierauf von $-\infty$ gegen 0 hin wächst, so erhält durch diese Vorstellung F_i zugleich eine bestimmte „positive" Richtung, welche durch die Richtungscosinus:

$$(3') \qquad \varepsilon_i \frac{\sqrt{\beta-\lambda}\sqrt{\gamma-\lambda}}{\sqrt{\mu-\lambda}\sqrt{\nu-\lambda}}, \quad \varepsilon_i' \frac{\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}}{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}}, \quad \varepsilon_i'' \frac{\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}}{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}},$$

mit positiven Wurzelwerthen und der Bedeutung (4) der ε_i, ε_i', ε_i'', vollkommen fixirt ist*). Jeder Focalstrahl bildet in diesem Sinne mit der äusseren Normale $P\xi$ des Ellipsoides λ im Punkte P (dem Perpendikel p_λ) einen stumpfen Winkel. Der den positiven Werthen von σ entsprechende Theil der Geraden F_i heisse deren positive, der andere deren negative Hälfte.

Trägt man die Werthe (3) der Coordinaten ξ, η, ζ in die Gleichungen (2) ein, so erhält man unter Benutzung der Abkürzungen:

$$A_i = \frac{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)} \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\alpha-\lambda}} + \frac{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)} \frac{\varepsilon_i'}{\sqrt{\alpha-\mu}} + \frac{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)} \frac{\varepsilon_i''}{\sqrt{\alpha-\nu}},$$

$$B_i = \frac{(\gamma-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)} \varepsilon_i \sqrt{\alpha-\lambda} + \frac{(\gamma-\mu)}{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)} \varepsilon_i' \sqrt{\alpha-\mu} + \frac{(\gamma-\nu)}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)} \varepsilon_i'' \sqrt{\alpha-\nu},$$

$$C_i = \frac{(\beta-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)} \varepsilon_i \sqrt{\alpha-\lambda} + \frac{(\beta-\mu)}{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)} \varepsilon_i' \sqrt{\alpha-\mu} + \frac{(\beta-\nu)}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)} \varepsilon_i'' \sqrt{\alpha-\nu}$$

die Formeln:

$$(5) \qquad x - x' = A_i x' \sigma, \quad y - y' = B_i y' \sigma, \quad z - z' = C_i z' \sigma,$$

welche die Coordinaten x, y, z des laufenden Punktes des Focalstrahles F_i durch seine Entfernung σ von P ausdrücken.

Die Schnittpunkte des Strahles F_i mit den Ebenen $z = 0$ und $y = 0$ sind die im Anfange des § 4 eingeführten Punkte $G_i = x_i, y_i, 0$ und $H_i = \bar{x}_i, 0, z_i$. Die ihnen entsprechenden Werthe R_i und S_i des Parameters σ sind die Focalcurvendistanzen PG_i und PH_i; diese Werthe sind positiv oder negativ, jenachdem G_i und H_i bezüglich auf der positiven oder negativen Hälfte des Strahles F_i liegen. Setzt man aber in den Gleichungen (5) für x, y, z, σ die zusammengehörigen Werthe $x_i, y_i, 0, R_i$ und $\bar{x}_i, 0, z_i, S_i$ ein, so erhält man zwischen letzteren die Relationen:

*) Vgl. Salmon-Fiedler, a. a. O., Art. 3, Anm.

$$x_i - x' = A_i x' R_i, \quad y_i - y' = B_i y' R_i, \qquad -1 = C_i R_i,$$

und

$$\bar{x}_i - x' = A_i x' S_i, \qquad -1 = B_i S_i, \qquad z_i - z' = C_i z' S_i.$$

Dieselben bestimmen x_i, y_i, R_i und $\bar{x}_i$, z_i, S_i und zwar ergiebt sich, mit den ferneren Abkürzungen:

$$(6)\quad \begin{cases} a_i = (\mu-\nu)\,\varepsilon_i\sqrt{\alpha-\lambda} + (\nu-\lambda)\,\varepsilon_i'\sqrt{\alpha-\mu} + (\lambda-\mu)\,\varepsilon_i''\sqrt{\alpha-\nu}, \\ b_i = (\mu-\nu)(\beta-\lambda)\,\varepsilon_i\sqrt{\alpha-\lambda} + (\nu-\lambda)(\beta-\mu)\,\varepsilon_i'\sqrt{\alpha-\mu} \\ \qquad\qquad + (\lambda-\mu)(\beta-\nu)\,\varepsilon_i''\sqrt{\alpha-\nu}, \\ c_i = (\mu-\nu)(\gamma-\lambda)\,\varepsilon_i\sqrt{\alpha-\lambda} + (\nu-\lambda)(\gamma-\mu)\,\varepsilon_i'\sqrt{\alpha-\mu} \\ \qquad\qquad + (\lambda-\mu)(\gamma-\nu)\,\varepsilon_i''\sqrt{\alpha-\nu}, \\ b_i' = (\mu-\nu)(\beta-\lambda)\,\dfrac{\varepsilon_i}{\sqrt{\alpha-\lambda}} + (\nu-\lambda)(\beta-\mu)\,\dfrac{\varepsilon_i'}{\sqrt{\alpha-\mu}} \\ \qquad\qquad + (\lambda-\mu)(\beta-\nu)\,\dfrac{\varepsilon_i''}{\sqrt{\alpha-\nu}}, \\ c_i' = (\mu-\nu)(\gamma-\lambda)\,\dfrac{\varepsilon_i}{\sqrt{\alpha-\lambda}} + (\nu-\lambda)(\gamma-\mu)\,\dfrac{\varepsilon_i'}{\sqrt{\alpha-\mu}} \\ \qquad\qquad + (\lambda-\mu)(\gamma-\nu)\,\dfrac{\varepsilon_i''}{\sqrt{\alpha-\nu}}, \end{cases}$$

ohne weitere Rechnung:

$$(7)\quad R_i = \frac{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)}{b_i}, \qquad S_i = \frac{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)}{c_i},$$

$$(8)\quad \begin{cases} x_i = (\alpha-\gamma)\dfrac{b_i'}{b_i}x', & y_i = (\beta-\gamma)\dfrac{a_i}{b_i}y', \\ \bar{x}_i = (\alpha-\beta)\dfrac{c_i'}{c_i}x', & z_i = (\gamma-\beta)\dfrac{a_i}{c_i}z'. \end{cases}$$

Es ist nun:

$$(9)\qquad x' = \omega\,\frac{\sqrt{\alpha-\lambda}\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\alpha-\nu}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}},$$

unter ω den Werth ± 1 verstanden, und ist:

$$(10)\qquad x_i = \eta_i\,\frac{\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\alpha-\nu_i}}{\sqrt{\alpha-\beta}}, \qquad \bar{x}_i = \vartheta_i\,\frac{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\lambda_i}}{\sqrt{\alpha-\gamma}},$$

wo η_i, ϑ_i je ± 1 und γ, γ, ν_i und λ_i, β, β die elliptischen Coordinaten der Punkte G_i und H_i sind. Führt man hiermit die elliptischen Coordinaten der Punkte P, G_i, H_i in die Formeln (8) für x_i und $\bar{x}_i$ ein, so folgt:

$$(11)\qquad \omega\varepsilon_i\varepsilon_i'\varepsilon_i''\eta_i\sqrt{\alpha-\nu_i}=\frac{b_i''}{b_i},\qquad \omega\varepsilon_i\varepsilon_i'\varepsilon_i''\vartheta_i\sqrt{\alpha-\lambda_i}=\frac{c_i''}{c_i},$$

wobei:

$$b_i''=(\mu-\nu)(\beta-\lambda)\varepsilon_i'\varepsilon_i''\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\alpha-\nu}+(\nu-\lambda)(\beta-\mu)\varepsilon_i''\varepsilon_i\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\alpha-\lambda}$$
$$+(\lambda-\mu)(\beta-\nu)\varepsilon_i\varepsilon_i'\sqrt{\alpha-\lambda}\sqrt{\alpha-\mu},$$

$$c_i''=(\mu-\nu)(\gamma-\lambda)\varepsilon_i'\varepsilon_i''\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\alpha-\nu}+(\nu-\lambda)(\gamma-\mu)\varepsilon_i''\varepsilon_i\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\alpha-\lambda}$$
$$+(\lambda-\mu)(\gamma-\nu)\varepsilon_i\varepsilon_i'\sqrt{\alpha-\lambda}\sqrt{\alpha-\mu}.$$

Man überzeugt sich nun leicht von der Richtigkeit der Identitäten:

$$-(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)=b_i''+b_i(\varepsilon_i\sqrt{\alpha-\lambda}+\varepsilon_i'\sqrt{\alpha-\mu}+\varepsilon_i''\sqrt{\alpha-\nu}),$$

$$-(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)=c_i''+c_i(\varepsilon_i\sqrt{\alpha-\lambda}+\varepsilon_i'\sqrt{\alpha-\mu}+\varepsilon_i''\sqrt{\alpha-\nu}),$$

und erhält in Folge derselben aus (7) und (11):

$$(12)\qquad \begin{cases} R_i=-\varepsilon_i\sqrt{\alpha-\lambda}-\varepsilon_i'\sqrt{\alpha-\mu}-\varepsilon_i''\sqrt{\alpha-\nu}-\omega\varepsilon_i\varepsilon_i'\varepsilon_i''\eta_i\sqrt{\alpha-\nu_i}, \\ S_i=-\varepsilon_i\sqrt{\alpha-\lambda}-\varepsilon_i'\sqrt{\alpha-\mu}-\varepsilon_i''\sqrt{\alpha-\nu}-\omega\varepsilon_i\varepsilon_i'\varepsilon_i''\vartheta_i\sqrt{\alpha-\lambda_i}. \end{cases}$$

Das Resultat dieser Entwicklungen ist folgendes:

Sind $G_i=\gamma,\gamma,\nu_i$ und $H_i=\lambda_i,\beta,\beta$ die Punkte, in welchen einer der 4 Focalstrahlen F_i des Punktes $P=\lambda,\mu,\nu$ bezüglich die Focalellipse oder Focalhyperbel trifft, so sind die Entfernungen $R_i=PG_i$ und $S_i=PH_i$ durch die Formeln (12) bestimmt.

Dabei haben ε_i, ε_i', ε_i'' die Werthe § 4, 4 und bedeuten ω, η_i, ϑ_i resp. die Vorzeichen der x-Coordinaten der Punkte P, G_i, H_i. Jenachdem hierauf, bei positiven Werthen der einzelnen Quadratwurzeln: $\sqrt{\alpha-\lambda}$, $\sqrt{\alpha-\mu}$, $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\alpha-\nu_i}$, $\sqrt{\alpha-\lambda_i}$, die Längen R_i, S_i positiv oder negativ aus den Formeln (12) hervorgehen, sind die Punkte G_i, H_i auf der positiven oder negativen Hälfte des Strahles F_i gelegen.

§ 5.

Von den Schnittpunkten der Focalstrahlen mit den Focalkegelschnitten.

Mit Rücksicht auf die für die elliptischen Coordinaten immer geltende Ungleichung § 1, 5 können aus den in § 4 gewonnenen Formeln einige später zu benutzende Schlüsse sofort gezogen werden.

Zunächst erkennt man leicht, dass der in § 4, 6 definirte Ausdruck b_i mit Einsetzung irgend eines der 4 Werthsysteme der ε_i, ε_i', ε_i'' aus § 4, 4 immer positiv ist. Daraus folgt:

I. *Die Schnittpunkte G_1, G_2, G_3, G_4 der 4 Focalstrahlen F_1, F_2, F_3, F_4 des Punktes λ,μ,ν mit der Focalellipse liegen sämmtlich auf den positiven Hälften der betreffenden Strahlen.*

Was dagegen die Ausdrücke c_i angeht, so sind dieselben nur für $i = 3$ und $i = 4$ immer positiv, d. h.

II. *Die Schnittpunkte H_3 und H_4 der Focalstrahlen F_3 und F_4 des Punktes λ, μ, ν mit der Focalhyperbel liegen beide auf den positiven Hälften der betreffenden Focalstrahlen.*

Aus den Werthen § 4, 7 für R_i und S_i folgt:

$$\frac{1}{S_i} - \frac{1}{R_i} = \frac{c_i - b_i}{(\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu)} = -\frac{(\beta - \gamma) a_i}{(\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu)}.$$

Es kann aber a_i (§ 4, 6) in der Form dargestellt werden:

$$a_i = -(\varepsilon_i' \sqrt{\alpha - \mu} - \varepsilon_i'' \sqrt{\alpha - \nu})(\varepsilon_i'' \sqrt{\alpha - \nu} - \varepsilon_i \sqrt{\alpha - \lambda}) \times (\varepsilon_i \sqrt{\alpha - \lambda} - \varepsilon_i' \sqrt{\alpha - \mu}),$$

welcher Ausdruck negativ ist für $i = 3, 4$ und positiv für $i = 1, 2$. Es ist daher die Differenz der reciproken Werthe von S_i und R_i positiv für $i = 3, 4$ und negativ für $i = 1, 2$. Berücksichtigt man hierzu die Sätze I und II und die Schlussbemerkung des § 4, so folgt, dass unter allen Umständen $S_3 < R_3$ und $S_4 < R_4$ ist, dass ferner bei positivem S_1 resp. S_2 auch $S_1 > R_1$ und $S_2 > R_2$ d. h.

III. *Die Focalstrahlen F_1 und F_2 des Punktes λ, μ, ν schneiden, von diesem aus in ihrer positiven Richtung verfolgt, immer zuerst die Focalellipse, dann die Focalhyperbel; die Focalstrahlen F_3 und F_4 immer zuerst die Focalhyperbel, dann die Focalellipse.*

Bei negativem S_1 resp. S_2 nämlich geht der Focalstrahl F_1 resp. F_2, nachdem er die Focalellipse getroffen hat, erst durch das Unendliche hindurch, bevor er die Focalhyperbel erreicht.

Der Inhalt der Sätze I bis III kann leicht mit der Anschauung verfolgt werden. Denkt man sich vom Punkte P aus denjenigen Kegelmantel über der Focalellipse construirt, dessen Halbstrahlen mit der äusseren Normale des Ellipsoides λ stumpfe Winkel bilden, so liegt auf diesem die Focalellipse und die positiven Hälften der 4 Focalstrahlen F_i (Satz I). Der Kegelmantel wird zwischen P und der Ebene der Focalellipse von den beiden Zweigen der Focalhyperbel durchsetzt; die durch die Durchsetzungspunkte gehenden Halbstrahlen des Kegelmantels sind die positiven Hälften der Strahlen F_3 und F_4 (Satz II und III).

Der Ausdruck c_i' in § 4, 6 ist für $i = 4$ positiv und für $i = 3$ negativ, während, wie bereits oben zu II bemerkt, c_i für $i = 4, 3$ positiv ist. Aus der Formel für $\bar{x}_i$ in (8) geht demnach hervor:

IV. *Der Punkt H_4 liegt mit P auf gleicher, der Punkt H_3 auf verschiedener Seite der yz-Ebene* ($\vartheta_3 = -\omega$, $\vartheta_4 = \omega$).

Es ist ferner $c_1' > 0$ und $c_2' < 0$, sodass $\bar{x}_1 : x'$ und $-\bar{x}_2 : x'$ resp. das Vorzeichen von c_1 und c_2 d. i. von S_1 und S_2 haben; also:

V. *Jenachdem der Punkt H_1 auf der positiven oder negativen Hälfte des Focalstrahles F_1 liegt, befindet er sich mit P auf gleicher oder auf verschiedener Seite der yz-Ebene; jenachdem der Punkt H_2 auf der positiven oder negativen Hälfte des Focalstrahles F_2 liegt, befindet er sich mit P auf verschiedener oder auf gleicher Seite der yz-Ebene* ($\vartheta_1 = \omega \cdot sgn.\ S_1$, $\vartheta_2 = -\omega \cdot sgn.\ S_2$).

Von den verschiedenen aus § 4, 3. 4 unmittelbar hervorgehenden Sätzen, betreffend die symmetrische Anordnung der 4 Focalstrahlen des Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ gegen die Normalen $P\xi$, $P\eta$, $P\zeta$ der 3 Flächen λ, μ, ν im Punkte P, soll hier anhangsweise nur der folgende besonders aufgeführt werden:

VI. *Die innere Normale des Ellipsoides λ im Punkte λ, μ, ν halbirt den Winkel zwischen den positiven Richtungen der Focalstrahlen F_1 und F_3 sowohl, wie der Focalstrahlen F_2 und F_4.*

§ 6.

Die Gleichgewichtsfortsetzung der Focalcurvendistanzen.

Die Distanzen PG_i und PH_i des Punktes P von dem Punkte G_i der Focalellipse und dem Punkte H_i der Focalhyperbel sind je auf einer der 4 durch P gehenden gemeinsamen Transversalen F_i der Focalkegelschnitte gemessen. Die Strecke G_iP liegt daher auf dem vom Punkte G_i der Focalellipse aus über der Focalhyperbel errichteten geraden Kegel. Dasselbe gilt von einer Strecke G_ih, welche den Punkt G_i mit einem beliebigen Punkte h der Focalhyperbel verbindet. Indem man dabei entweder das eine oder andere der beiden durch die Punkte G_i und h begrenzten Stücke ihrer im Unendlichen in sich zurücklaufenden Verbindungslinie an die Strecke PG_i ansetzt, kann man immer erreichen, dass das angesetzte Stück G_ih eine *Gleichgewichtsfortsetzung* der Strecke PG_i über die Focalellipse wird; dass nämlich die in G_i zusammenstossenden Theile der gebrochenen Linie PG_ih auf *verschiedenen* Mänteln des von G_i aus über der Focalhyperbel errichteten Kegels liegen. Die gebrochene Linie PG_ih ist dann (vgl. § 2) eine *Gleichgewichtsdistanz* der Punkte P und h über die Focalellipse; dasselbe gilt übrigens von der gebrochenen Linie, welche jene zu einem Paare unbegrenzter Gerader ergänzt. Zwei solche Gleichgewichtsdistanzen der Punkte P und h, die sich zu einem Paare unbegrenzter Gerader ergänzen, sollen nur für *eine* gezählt werden.

In diesem Sinne entspricht jedem der 4 Focalstrahlen des Punktes P eine Gleichgewichtsdistanz zwischen P und einem beliebigen Punkte h der Focalhyperbel über die Focalellipse. Es giebt aber auch keine anderen Gleichgewichtsdistanzen zwischen den beiden Punkten P und h über die Focalellipse. Denn ist PGh eine Gleichgewichtsdistanz, indem

G ihren Knickpunkt auf der Focalellipse bezeichnet, so gehört die Strecke Gh als gemeinsame Transversale der Focalkegelschnitte dem geraden Kegel an, der G als Spitze, die Tangente der Focalellipse in G als Rotationsaxe und die Focalhyperbel als Leitcurve hat. Die Strecke GP muss nach § 2 auf demselben Kegel liegen und somit Theil einer gemeinsamen Transversale der beiden Focalkegelschnitte sein, die durch P hindurchgeht. Es kann also nicht mehr Gleichgewichtsdistanzen PGh geben, als gemeinsame Transversalen der Focalellipse und Focalhyperbel durch P hindurchgehen.

Analoge Resultate ergeben sich aus den vorstehenden Betrachtungen, wenn man in denselben die Rollen der beiden Focalkegelschnitte untereinander vertauscht. Man hat also zusammenfassend den Satz:

Zu einem beliebigen Punkte des Raumes gehören im Allgemeinen 4 Gleichgewichtsdistanzen zwischen ihm und einem beliebigen Focalpunkte über den gegen den letzteren ungleichnamigen Focalkegelschnitt.

§ 7.

Die Gleichgewichtsfortsetzungen über die Focalhyperbel.

Die in der positiven Richtung des Focalstrahles F_i durchlaufene Strecke PH_i soll eine Gleichgewichtsfortsetzung H_ig nach einem beliebigen Punkte g der Focalellipse erhalten. Dazu kann man sich der einfachen Erwägung bedienen:

A. Zwei Halbstrahlen des von einem Punkte H der Focalhyperbel aus über der Focalellipse errichteten Kegels liegen auf verschiedenen Mänteln des letzteren, wenn der eine der Focalellipse begegnet, der andere nicht.

Die Strecke PH_1 (oder PH_2) geht bei negativem $S_1(S_2)$ durch das Unendliche; da sie zuvor bereits die Focalellipse in $G_1(G_2)$ getroffen hat (nach § 5, I), so wird das in's Endliche zurücklaufende Stück derselben der Focalellipse nicht mehr begegnen und daher (nach § 7, A) die *endliche* Verbindungslinie $H_1g(H_2g)$ der Punkte $H_1(H_2)$ und g die gesuchte Gleichgewichtsfortsetzung sein.

Die Strecke PH_1 (oder PH_2) geht bei positivem $S_1(S_2)$ nicht durch das Unendliche. Da sie aber bereits die Punkte $G_1(G_2)$ der Focalellipse enthält (nach § 5, III), so ist (nach § 7, A) die *unendliche* Verbindungslinie H_1g (H_2g) der Punkte H_1 (H_2) und g die gesuchte Gleichgewichtsfortsetzung.

Die Länge der den Focalstrahlen F_1 und F_2 entsprechenden Gleichgewichtsdistanzen PH_1g und PH_2g ist daher niemals endlich.

Der Focalstrahl F_3 (oder F_4) trifft mit seiner positiven Hälfte die Focalellipse in G_3 (G_4), zuvor aber (nach § 5, III) schon die Focalhyperbel in H_3 (H_4), sodass der von H_3 (H_4) über P rückwärts ge-

zogene Halbstrahl die Focalellipse nicht schneidet. Daher ist die endliche Verbindungslinie $H_3 g$ ($H_4 g$) der Punkte H_3 (H_4) und g die Gleichgewichtsfortsetzung der stets endlichen Strecke PH_3 (PH_4).

Um die Längen der gebrochenen Linien $PH_3 g$ und $PH_4 g$ zu finden, entnimmt man aus § 4, 12 mit Rücksicht auf § 4, 4 und § 5, IV:

$$S_3 = PH_3 = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} + \sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \lambda_3},$$

$$S_4 = PH_4 = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \lambda_4},$$

und aus § 3, I, unter γ, γ, ν_0 die elliptischen Coordinaten des Punktes g verstanden:

$$H_3 g = \sqrt{\alpha - \lambda_3} - \iota_3 \sqrt{\alpha - \nu_0},$$

$$H_4 g = \sqrt{\alpha - \lambda_4} - \iota_4 \sqrt{\alpha - \nu_0}.$$

Dabei ist ι_3 (ι_4) $= +1$ oder -1, jenachdem H_3 (H_4) mit g gleichseitig oder ungleichseitig liegt, oder was nach § 5, IV dasselbe ist: $\iota_3 = -1$, $\iota_4 = 1$, wenn g mit P gleichseitig und $\iota_3 = 1$, $\iota_4 = -1$, wenn g mit P ungleichseitig ist. Hieraus folgt aber:

Die beiden (endlichen) Gleichgewichtsdistanzen zwischen einem Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ und einem Punkte $g = \gamma, \gamma, \nu_0$ der Focalellipse über die Focalhyperbel sind:

$$PH_3 g = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} + \sqrt{\alpha - \nu} + \varepsilon \sqrt{\alpha - \nu_0},$$

$$PH_4 g = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \nu} - \varepsilon \sqrt{\alpha - \nu_0},$$

wo $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$, jenachdem P und g gleichseitig oder ungleichseitig liegen.

Indem man die unendlichen Gleichgewichtsdistanzen ausschliesst, kann das Ergebniss des § 7, unabhängig von der Beziehung zu dem Index i des Focalstrahles F_i, auch in die 2 Sätze gefasst werden:

I. *Die Gleichgewichtsdistanz eines Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ im Raume von einem Punkte $g = \gamma, \gamma, \nu_0$ der Focalellipse über den mit g gleichseitigen Zweig der Focalhyperbel ist:*

$$s = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} - \varepsilon \sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \nu_0};$$

II. *Die Gleichgewichtsdistanz eines Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ im Raume von einem Punkte $g = \gamma, \gamma, \nu_0$ der Focalellipse über den mit g ungleichseitigen Zweig der Focalhyperbel ist:*

$$s' = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} + \varepsilon \sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \nu_0};$$

für beide Formeln ist $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$, jenachdem P und g gleichseitig oder ungleichseitig liegen.

§ 8.

Die Gleichgewichtsfortsetzungen über die Focalellipse.

Um für die in der positiven Richtung des Focalstrahles F_i durchlaufene, immer endliche Strecke PG_i die Gleichgewichtsfortsetzung nach einem beliebigen Punkte h der Focalhyperbel zu erhalten, kann man die einfache Bemerkung benutzen.

B. Zwei Halbstrahlen des von einem Punkte G der Focalellipse aus über der Focalhyperbel errichteten Kegels liegen auf verschiedenen Mänteln des letzteren, wenn sie selbst oder ihre beiden Gegenstrahlen (durch die sie zu unbegrenzten Geraden ergänzt werden) je einen der beiden Zweige der Focalhyperbel treffen, oder aber einer von ihnen und der Gegenstrahl des anderen demselben Zweige der Focalhyperbel begegnen.

Die Focalstrahlen F_3 und F_4 schneiden bezüglich den mit P ungleichseitigen und gleichseitigen Zweig der Focalhyperbel in H_3 und H_4 und treffen hierauf in G_3 und resp. G_4 die Focalellipse. Die Strecken G_3P und G_4P begegnen also resp. dem mit P ungleichseitigen und gleichseitigen Zweig der Focalhyperbel. Ist daher h mit P gleichseitig, so ist (nach § 8, B) die endliche Strecke G_3h die Gleichgewichtsfortsetzung von PG_3 und die unendliche Strecke G_4h die von PG_4. Ist dagegen h mit P ungleichseitig, so ist die unendliche Strecke G_3h die Gleichgewichtsfortsetzung von PG_3 und die endliche Strecke G_4h die von PG_4.

Bei Ausschluss unendlicher Gleichgewichtsdistanzen bleibt also nur der einen der beiden Strecken PG_3 und PG_4 eine Gleichgewichtsfortsetzung übrig, und zwar der ersteren oder letzteren, jenachdem h gleichseitig oder ungleichseitig mit P gelegen ist. Aber auch diese endlichen Gleichgewichtsdistanzen haben insofern keine selbständige Bedeutung, als das Stück H_iG_ih ($i = 3$ oder 4) derselben bei Festhaltung der beiden ungleichseitigen Punkte H_i und h und beliebiger Verschiebung des Punktes G_i längs der Focalellipse nach § 3, II seine Länge nicht ändert. Bei solcher Verschiebung bleibt aber die Linie PH_iG_ih, die dann *doppelt gebrochen* ist, Gleichgewichtsfigur eines Fadens, der von P nach h, über *beide* Focalkegelschnitte gleitend, gespannt wird.

Es ist dabei nach § 3, II, unter λ_0, β, β die elliptischen Coordinaten von h verstanden, immer:

$$H_3G_3h = \sqrt{\alpha - \lambda_3} + \sqrt{\alpha - \lambda_0},$$
$$H_4G_4h = \sqrt{\alpha - \lambda_4} + \sqrt{\alpha - \lambda_0}.$$

Verbindet man hiermit die Werthe:

$$S_3 = PH_3 = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} + \sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \lambda_3},$$
$$S_4 = PH_4 = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \lambda_4}$$

aus § 7, so folgt, wieder mit Ausschluss unendlicher Gleichgewichtsdistanzen:

I. *Die Gleichgewichtsdistanz eines Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ im Raume von einem Punkte $h = \lambda_0, \beta, \beta$ der Focalhyperbel über die Focalhyperbel und die Focalellipse ist:*

$$r' = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} + \varepsilon\sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \lambda_0},$$

wo $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ ist, jenachdem P mit h gleichseitig oder ungleichseitig liegt.

Die in Rede stehende Gleichgewichtsdistanz ist im Allgemeinen zweimal gebrochen. Ihr Knickpunkt auf der Focalhyperbel liegt stets an einer bestimmten Stelle des mit h ungleichseitigen Zweiges der Focalhyperbel; ihr Knickpunkt auf der Focalellipse ist von unbestimmter Lage.

Die Focalstrahlen F_1 und F_2 des Punktes P treffen vor der Focalhyperbel die Focalellipse in den Punkten $G_1 = \gamma, \gamma, \nu_1$ und $G_2 = \gamma, \gamma, \nu_2$, und es ist nach § 4, 12:

$$R_1 = PG_1 = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \nu} + \omega\eta_1\sqrt{\alpha - \nu_1},$$
$$R_2 = PG_2 = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} + \sqrt{\alpha - \nu} - \omega\eta_2\sqrt{\alpha - \nu_2},$$

wobei ω, η_1, η_2 die Vorzeichen der x-Coordinaten von P, G_1, G_2 bedeuten. Ist nun $h = \lambda_0, \beta, \beta$ ein Punkt der Focalhyperbel, so ist zu unterscheiden, ob derselbe mit P gleichseitig oder ungleichseitig liegt.

Man nehme das erstere an. Ist dann $S_1 = PH_1$ positiv, so ist H_1 nach § 5, V mit P gleichseitig, sodass die von G_1 aus durch h und H_1 gezogenen Halbstrahlen beide denselben Hyperbelzweig treffen; G_1H_1 bezeichnet aber bei positivem S_1 den Gegenstrahl von G_1P, weil G_1 zwischen P und H_1 liegt; folglich ist die endliche Verbindungslinie G_1h der Punkte G_1 und h die Gleichgewichtsfortsetzung von PG_1. Ist aber $S_1 = PH_1$ negativ, so ist H_1 mit P ungleichseitig, sodass die von G_1 aus durch h und H_1 gezogenen Halbstrahlen verschiedenen Hyperbelzweigen begegnen; G_1H_1 bezeichnet aber bei negativem S_1 denselben Halbstrahl, wie G_1P, weil P zwischen G_1 und H_1 liegt; wieder ist also die endliche Strecke G_1h die Gleichgewichtsfortsetzung von PG_1. Ist ferner $S_2 = PH_2$ positiv, so ist H_2 nach § 5, V mit P ungleichseitig, sodass die von G_2 durch h und H_2 gezogenen Halbstrahlen verschiedene Zweige der Focalhyperbel treffen; G_2H_2 gehört aber dem Gegenstrahl von G_2P an; folglich ist die unendliche Verbindungs-

linie G_2h der Punkte G_2 und h die Gleichgewichtsfortsetzung von PG_2. Ist dagegen S_2 negativ, so ist H_2 mit P gleichseitig, sodass die von G_2 durch h und H_2 gezogenen Halbstrahlen beide denselben Hyperbelzweig treffen; G_2H_2 gehört aber demselben Halbstrahl an, wie G_2P; wieder ist also die unendliche Strecke G_2h Gleichgewichtsfortsetzung von PG_2.

Die analogen Schlüsse, welche der Annahme ungleichseitiger Lage von P und h entsprechen, führen zu analogen Folgerungen und ergiebt sich somit:

Jenachdem h mit P gleichseitig oder ungleichseitig liegt, besitzt nur PG_1 oder nur PG_2 eine endliche Gleichgewichtsfortsetzung G_1h oder G_2h nach dem Punkte h der Focalhyperbel über die Focalellipse.

Es ist aber nach § 3, I:

$$G_1h = \sqrt{\alpha - \lambda_0} - \varrho_1\sqrt{\alpha - \nu_1}, \quad G_2h = \sqrt{\alpha - \lambda_0} - \varrho_2\sqrt{\alpha - \nu_2};$$

dabei ist $\varrho_1(\varrho_2) = +1$ oder -1, jenachdem $G_1(G_2)$ und h gleichseitig oder ungleichseitig sind. Ist daher h mit P gleichseitig, so ist $\varrho_1 = \omega\eta_1$ und ist h mit P ungleichseitig, so ist $\varrho_2 = -\omega\eta_2$. Es ergiebt sich daher:

II. *Die Gleichgewichtsdistanz eines Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ im Raume von einem Punkte $h = \lambda_0, \beta, \beta$ der Focalhyperbel über die Focalellipse allein ist:*

$$r = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} - \varepsilon\sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \lambda_0},$$

wo $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$, jenachdem P mit h gleichseitig oder ungleichseitig liegt.

§ 9.

Die gebrochenen Focaldistanzen eines Punktes im Raume.

Auf Grund der in den §§ 7—8 erfolgten Aufzählung der *endlichen* Gleichgewichtsdistanzen, welche zwischen einem beliebigen Punkte P des Raumes und einem Focalpunkte über den ungleichnamigen Focalkegelschnitt möglich sind, hat man neben dem allgemeinen Schlussresultat des § 6 den specielleren Satz:

Zu einem Punkte des Raumes gehören im Allgemeinen zwei endliche Gleichgewichtsdistanzen zwischen ihm und einem beliebigen Focalpunkte über den gegen den letzteren ungleichnamigen Focalkegelschnitt:

I. *Ist der Focalpunkt ein Punkt g der Focalellipse, so hat man die Wahl zwischen einer Gleichgewichtsdistanz von P nach g über den mit g gleichseitigen und einer Gleichgewichtsdistanz über den mit g ungleichseitigen Zweig der Focalhyperbel.*

Die Längen dieser beiden Distanzen sind in den Sätzen § 7, I. II gegeben. Da es mit Hinblick auf § 2 und § 6 nur 4 Entfernungen

der Punkte P und g über die Focalhyperbel giebt, für welche, insofern sie als Functionen des Knickpunktes auf der letzteren dargestellt werden, die 1. Variation verschwindet, so erkennt man leicht, dass diese beiden Distanzen die Bedeutung der *kürzesten Entfernungen* der Punkte P und g über den mit g gleichseitigen, beziehentlich ungleichseitigen Zweig der Focalhyperbel besitzen.

II. *Ist der Focalpunkt ein Punkt h der Focalhyperbel, so hat man die Wahl zwischen einer Gleichgewichtsdistanz von P nach h über die Focalellipse allein oder unendlich vielen Gleichgewichtsdistanzen über die Focalellipse mit gleichzeitiger Knickung über die Focalhyperbel.*

Die Länge der ersteren und die gemeinsame Länge der letzteren Distanzen sind in den Sätzen § 8, II. I gegeben. Auch diese Distanzen haben die Bedeutung *kürzester Entfernungen* der Punkte P und h über die Focalellipse allein, und bezüglich über die Focalhyperbel und Focalellipse zugleich.

Die Darstellung der Längen dieser kürzesten Entfernungen führt nun zu einer Reihe von Focaleigenschaften der centrischen Flächen 2. Grades, von denen hier nur die einfachsten angeführt sein mögen. Dieselben beziehen sich auf die kürzesten Entfernungen eines Punktes P der betreffenden Fläche von beliebigen Punkten g der Focalellipse über den jeweils mit g gleichseitigen Zweig der Focalhyperbel und von einem beliebigen Punkte h der Focalhyperbel über die Focalellipse allein. Es wird dabei also von den in § 9, I. II aufgezählten Gleichgewichtsdistanzen je nur die *erste* benutzt, die dann schlechthin als *die gebrochene Focaldistanz des Punktes P von dem Focalpunkte g oder h* bezeichnet werden soll.

§ 10.

Focaleigenschaften der centrischen Flächen 2. Grades.

Man entnimmt mit Bezug auf die so definirten gebrochenen Focaldistanzen aus § 7, I und § 8, II unmittelbar das folgende Resultat:

Sind $h_1 = \lambda_1, \beta, \beta$ und $h_2 = \lambda_2, \beta, \beta$ irgend zwei ungleichseitige Punkte der Focalhyperbel und r_1, r_2 die gebrochenen Focaldistanzen eines Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ von denselben; sind ferner $g_1 = \gamma, \gamma, \nu_1$ und $g_2 = \gamma, \gamma, \nu_2$ irgend zwei, bezüglich mit h_1 und h_2 gleichseitige Punkte der Focalellipse und s_1, s_2 die gebrochenen Focaldistanzen des Punktes P von denselben, so gelten die Formeln:

$$r_1 = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} - \varepsilon\sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \lambda_1},$$
$$r_2 = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} + \varepsilon\sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \lambda_2},$$
$$s_1 = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} - \varepsilon\sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \nu_1},$$
$$s_2 = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} + \varepsilon\sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \nu_2}.$$

Dabei ist $\varepsilon = +1$ oder -1, jenachdem P mit g_1, h_1 oder mit g_2, h_2 gleichseitig (d. h. auf gleicher Seite der Ebene $\nu = \alpha$) liegt. Zugleich bilden die von P ausgehenden Anfangsstücke der 4 gebrochenen Focaldistanzen r_1, r_2, s_1, s_2 die 4 zu P gehörigen Focalstrahlen, sodass (§ 4, 3. 4) *die Winkel zwischen den Anfangsstücken von r_1 und s_2, r_2 und s_1 von der Normale des Ellipsoides λ, die Aussenwinkel zwischen den Anfangsstücken von r_1 und s_1, r_2 und s_2 von der Normale des Hyperboloides μ und die Aussenwinkel zwischen den Anfangsstücken von r_1 und r_2, s_1 und s_2 von der Normale des Hyperboloides ν im Punkte P halbirt werden.*

Die angegebenen Werthe r_1, r_2, s_1, s_2 fallen stets positiv aus, wenn, wie in § 4, zu Anfang, festgesetzt wurde, die einzelnen Quadratwurzeln als positiv gelten.

Man kann nun die folgenden Combinationen aus diesen Formeln unmittelbar in folgender Weise in Worte fassen:

I.
$$r_1 + s_2 = 2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \lambda_1} - \sqrt{\alpha - \nu_2},$$
$$r_2 + s_1 = 2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \lambda_2} - \sqrt{\alpha - \nu_1}.$$

Für alle Punkte eines Ellipsoides ($\lambda = $ const.) ist die Summe der gebrochenen Focaldistanzen von irgend zwei ungleichseitigen, ungleichnamigen Focalpunkten dieselbe.

II.
$$s_1 - r_1 = 2\sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \lambda_1} - \sqrt{\alpha - \nu_1},$$
$$s_2 - r_2 = 2\sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \lambda_2} - \sqrt{\alpha - \nu_2}.$$

Für alle Punkte eines einschaligen Hyperboloides ($\mu = $ const.) ist die Differenz der gebrochenen Focaldistanzen von irgend zwei gleichseitigen, ungleichnamigen Focalpunkten dieselbe.

III.
$$r_2 - r_1 = 2\varepsilon\sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \lambda_1} + \sqrt{\alpha - \lambda_2},$$
$$s_2 - s_1 = 2\varepsilon\sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \nu_1} - \sqrt{\alpha - \nu_2}.$$

Für alle Punkte einer Schale eines zweischaligen Hyperboloides ($\nu = $ const., $\varepsilon = $ const.) ist die Differenz der gebrochenen Focaldistanzen von irgend zwei ungleichseitigen, gleichnamigen Focalpunkten dieselbe.

Zugleich ist die Halbirungslinie des Winkels oder Aussenwinkels der Anfangsstücke der jeweils benutzten zwei gebrochenen Focaldistanzen die Normale der betreffenden Fläche.

Mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \gamma$ und $\nu_1 = \nu_2 = \beta$ ergeben sich die in § 1 erwähnten, früher von mir abgeleiteten speciellen Focaleigenschaften, bei denen für die hier willkürlich gewählten 4 Focalpunkte g_1, g_2, h_1, h_2 die Brennpunkte der Focalhyperbel und Focalellipse eintraten.

Auf die Eigenschaft I kann ähnlich, wie dort*), eine Fadenconstruction des Ellipsoides gegründet werden, wie auch auf die Eigenschaften:

$$r_1 + s_2 = \text{const.}, \quad r_1 + r_2 = \text{const.},$$
$$r_2 + s_1 = \text{const.}, \quad s_1 + s_2 = \text{const.}$$

der einem Ellipsoid und einem einschaligen Hyperboloid angehörigen Krümmungscurve $\lambda = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$ eine Fadenconstruction dieser Krümmungscurve.

Die ferneren Modificationen der Focaleigenschaften der Flächen 2. Grades und die weniger einfachen Focaleigenschaften der neben dem Ellipsoid und den beiden Hyperboloiden in § 1 genannten Flächen, welche sich aus den Resultaten des § 9 ergeben, sollen an dieser Stelle übergangen werden.

Breslau, im Januar 1886.

*) Vgl. Mathematische Annalen, Bd. 20, S. 183.

Ueber Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt.

Von

Friedrich Dingeldey in Darmstadt.

In seiner Arbeit „Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Curven mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse" stellt Grassmann für die Erzeugung der allgemeinen Curve dritter Ordnung durch Bewegung gerader Linien folgenden Satz auf:

„*Wenn die vier Seiten und eine Diagonale eines Vierecks sich um feste Punkte drehen, und die beiden Ecken, welche nicht von der Diagonale getroffen werden, in festen Geraden sich bewegen, so beschreiben die von der Diagonale getroffenen Ecken jede ein Gebilde dritten Grades.*"*)

Im Folgenden will ich nun zeigen, wie sich aus diesem Satze eine sehr einfache Erzeugungsweise der Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt, sowie eine Construction der Wendepunktslinie ergiebt.

1.

Bezeichnet man die Punkte, um welche sich die auf der einen Seite der Diagonale liegenden Seiten des Vierecks drehen, mit a und b, die entsprechenden Drehpunkte für die beiden anderen Seiten mit a_1 und b_1, den Punkt, um welchen sich die Diagonale selbst dreht, mit d, die festen Geraden, auf welchen die von der Diagonale nicht getroffenen Ecken bei der Bewegung fortrücken, mit C und C_1, so lautet das planimetrische Product für obige Erzeugungsweise folgendermassen:

$$(1) \qquad (x\,a\,C\,b)\,(x\,a_1\,C_1\,b_1)\,(x\,d) = 0.$$

In einer späteren Arbeit**) zeigt Grassmann, dass die durch (1) dargestellte Curve durch folgende neun Punkte hindurchgeht:

*) Crelle's Journal, Bd. 31, 1846, S. 126.

**) Crelle's Journal, Bd. 36, 1848, S. 178.

durch die zwei auf C gelegenen Punkte $a_1 b_1 C$ und $d b C$,
durch die zwei auf C_1 gelegenen Punkte $a b C_1$ und $d b_1 C_1$,
durch den Schnittpunkt von C mit C_1
und durch die vier Punkte a, a_1, d und $(ab)\,(a_1 b_1)$.

Lässt man nun den Punkt a mit a_1 zusammenfallen, so wird dieser Punkt, in welchen alsdann auch $(ab)\,(a_1 b_1)$ rückt, offenbar ein Doppelpunkt der Curve, für die wir nun nachstehende Erzeugungsweise haben:

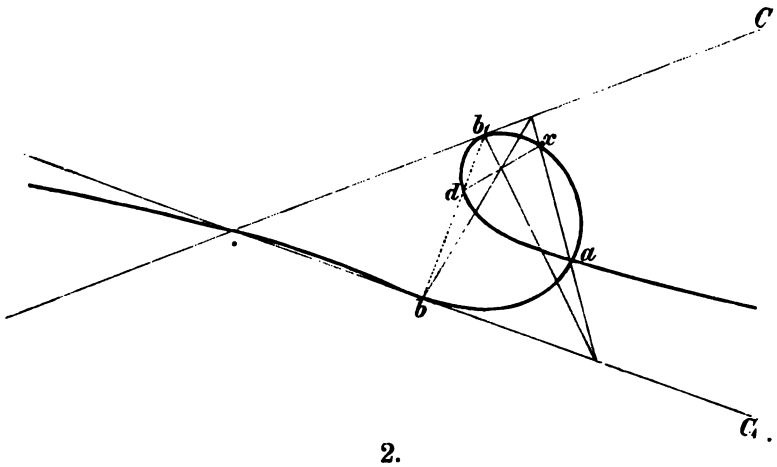
Bewegt sich ein veränderliches Dreieck so, dass seine Seiten sich um feste Punkte b, b_1, a drehen, während zwei seiner Ecken auf festen Geraden C, C_1 fortrücken, so beschreibt ein beliebiger auf der durch diese zwei Ecken gehenden Seite gelegener Punkt x eine Curve dritter Ordnung, wenn seine Verbindungslinie mit einem festen Punkte d stets durch die dritte, noch freie Ecke des Dreiecks hindurchgeht. Diese Curve hat in dem mit x auf derselben Dreiecksseite liegenden festen Punkte a einen Doppelpunkt, ist aber eine allgemeine Curve ihres Geschlechtes.

In der That, ich kann stets, und zwar auf ∞^4 fache Weise, zu einer beliebigen vorgelegten rationalen Curve dritter Ordnung die Elemente construiren, welche für ihre Erzeugung nach der eben geschilderten Methode nöthig sind. Man findet dies leicht, indem man überlegt, auf wievielfache Weise sich Geradenpaare C, C_1 annehmen lassen, die sich in einem beliebigen Curvenpunkte schneiden, und auf wievielfache Weise alsdann noch die Punkte b, b_1 und d angenommen werden können, welche mit Hilfe des Doppelpunktes a und der weiteren Schnittpunkte von C und C_1 mit der Curve ($a b_1 C$ und $d b C$, $a b C_1$ und $d b_1 C_1$) zu construiren sind. Für jene Geradenpaare ergiebt sich eine ∞^3 fache Möglichkeit, für die Punkte b, b_1, d welche schon alle zusammen bestimmt sind, wenn man einen derselben festgelegt hat (was nur auf ∞^1 fache Weise geschehen kann, wie man aus der soeben angedeuteten Construction ersieht), eine ∞^1 fache Möglichkeit; insgesammt ergiebt sich demnach eine ∞^4 fache Erzeugungsweise unserer Curve. Es stimmt dies auch mit der Abzählung der uns zur Verfügung stehenden Constanten überein, denn während eine rationale Curve dritter Ordnung mit gegebenem Doppelpunkte nur noch von 6 Constanten abhängt, stehen uns in den Coordinaten der Punkte b, b_1, d und der Geraden C, C_1 10 Constanten zur Verfügung, also 4 mehr als nothwendig. Diesen Umstand benutze ich nun dazu, den zur Erzeugung der Curve dienenden Elementen eine möglichst einfache Lage zu ertheilen, wobei freilich darauf zu achten ist, dass die Allgemeinheit der Curve nicht gestört werde. Zunächst kann ich den Punkt d auf die Verbindungslinie der festen Punkte b und b_1 legen, wodurch die Gerade $b b_1$ mit $b d$ und $b_1 d$ zusammenfällt. Um dann die zur Erzeugung

einer vorgelegten Curve dienenden Elemente aufzufinden, ziehe ich von einem beliebigen Curvenpunkte aus zwei Secanten C und C_1, deren jede noch in zwei weiteren Punkten schneidet, C etwa in f und g, C_1 in f_1 und g_1; dann muss $f = a\,b_1\,C$, $g = b\,b_1\,C$, $f_1 = a\,b\,C_1$, $g_1 = b\,b_1\,C_1$ sein, was man dadurch erreicht, dass man als Punkte b, b_1 diejenigen Punkte auf gg_1 wählt, in welchen die Gerade gg_1 von af_1 resp. af geschnitten wird (wobei a der Doppelpunkt der Curve ist); der Punkt d ist dann der dritte Schnittpunkt von gg_1 mit der Curve. Es lassen sich aber noch weitere Vereinfachungen erzielen, indem man b auf die Gerade C_1, b_1 auf C rücken lässt; sobald dies eingetreten, fallen auch die Punkte f und g mit b_1, f_1 und g_1 mit b zusammen, die Geraden C und C_1 werden also Tangenten der Curve.

Man hat demnach, um eine gegebene beliebige Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt in möglichst einfacher Weise dem planimetrischen Producte (1) *gemäss zu erzeugen, von einem beliebigen Curvenpunkte aus die zwei überhaupt möglichen Tangenten an die Curve zu legen; diese Tangenten dienen dann als Geraden C und C_1 bei der Erzeugung der Curve, ihre Berührungspunkte werden die festen Punkte b_1 (auf C) und b (auf C_1), der Punkt d ist der dritte Schnittpunkt der Secante bb_1 mit der Curve, a der Doppelpunkt.*

Die beigegebene Curve ist auf diese Weise gezeichnet.



2.

Wir geben nun den Ecken e_1, e_2, e_3 eines Coordinatendreiecks folgende Lage; es falle:

$$(2)\quad \begin{cases} e_1 \text{ oder } x_2 = x_3 = 0 \text{ in den Doppelpunkt } a, \\ e_2 \text{ oder } x_3 = x_1 = 0 \text{ in den Berührungspunkt } b \text{ von } C_1, \\ e_3 \text{ oder } x_1 = x_2 = 0 \text{ in den Berührungspunkt } b_1 \text{ von } C. \end{cases}$$

Ist alsdann der Punkt d etwa gegeben durch

$$d = \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3,$$

ist ferner

$$C = G_1(e_2 e_3) + G_2(e_3 e_1), \qquad C_1 = G_1'(e_2 e_3) + G_3'(e_1 e_2),$$

so wird die Gleichung unserer Curve in Dreieckscoordinaten:

$$(3) \qquad G_2 \delta_3 (G_1' x_1 + G_3' x_3) x_2^2 - G_3' \delta_2 (G_1 x_1 + G_2 x_2) x_3^2 = 0,$$

also von der Form:

$$\alpha x_2^2 x_1 + \beta x_2^2 x_3 + \gamma x_3^2 x_1 + \delta x_3^2 x_2 = 0,$$

in welche die Gleichung einer jeden rationalen Curve dritter Ordnung gebracht werden kann. Schneidet man diese Curve mit der Geraden $x_2 - \lambda x_3 = 0$, so ergiebt sich folgende Parameterdarstellung:

$$(4) \qquad \begin{cases} \varrho x_1 = -(\beta \lambda^2 + \delta \lambda), \\ \varrho x_2 = \alpha \lambda^3 + \gamma \lambda, \\ \varrho x_3 = \alpha \lambda^2 + \gamma, \end{cases}$$

und die Gleichung für die Parameter der drei Wendepunkte ergiebt sich in der Gestalt:

$$(5) \qquad \alpha^2 \delta \lambda^3 - 3\alpha\beta\gamma\lambda^2 - 3\alpha\gamma\delta\lambda + \beta\gamma^2 = 0.$$

Addiren und subtrahiren wir hier $\alpha\gamma(\beta\lambda^2 + \delta\lambda)$, so lässt sich (5) schreiben in der Form:

$$-4\alpha\gamma(\beta\lambda^2 + \delta\lambda) + \alpha\delta(\alpha\lambda^3 + \gamma\lambda) + \beta\gamma(\alpha\lambda^2 + \gamma) = 0,$$

und wenn wir nun für die Klammern ihre Werthe aus (4) substituiren, so erhalten wir als Gleichung der Wendepunktslinie:

$$(6) \qquad 4\alpha\gamma x_1 + \alpha\delta x_2 + \beta\gamma x_3 = 0,$$

welche nach Einführung der ursprünglichen Werthe von α, β, γ, δ folgende wird:

$$(7) \qquad W \equiv 4 G_1 G_1' x_1 + G_2 G_1' x_2 + G_1 G_3' x_3 = 0.$$

Ein gemeinsamer Factor $G_2 G_3' \delta_2 \delta_3$ hat sich hierbei ausgeschieden, woraus folgt, dass die Wendepunktslinie von der Lage des Punktes d unabhängig ist, d. h.:

Die unendlich vielen rationalen Curven, welche man erhält, wenn man den Punkt d auf bb_1 fortrücken lässt, während die übrigen Elemente unverändert bleiben, haben alle dieselbe Wendepunktslinie, während die Wendepunkte selbst natürlich ihre Lage auf dieser Geraden ändern.

Die Wendepunktslinie (7) lässt sich auch leicht aus den Punkten a, b, b_1 und den Geraden C, C_1 construiren; doch ist hierzu zunächst die Gerade:

$$(8) \qquad M \equiv G_1 G_1' x_1 + G_2 G_1' x_2 + G_1 G_3' x_3 = 0$$

erforderlich, welche sich von (7) dadurch unterscheidet, dass das erste Glied bei (7) noch den Coefficienten 4 besitzt. Die Gerade (8) ist

aber, wie man leicht findet, die Verbindungslinie des Schnittpunktes von C und ab mit dem Schnittpunkte von C_1 und ab_1. Die Construction der Wendepunktslinie (7) kommt alsdann auf die Aufgabe hinaus, aus den Seiten e_2e_3, e_3e_1, e_1e_2 des Fundamentaldreiecks und der Geraden $M \equiv G_1G_1'(e_2e_3) + G_2G_1'(e_3e_1) + G_1G_3'(e_1e_2)$ die Lage der Geraden $W \equiv 4G_1G_1'(e_2e_3) + G_2G_1'(e_3e_1) + G_1G_3'(e_1e_2)$ zu bestimmen. Diese Aufgabe ist die dualistische zu der bekannten, schon von Möbius*) behandelten Netzconstruction, welche darin besteht, aus vier gegebenen Punkten A, B, C und $D \equiv aA + bB + cC$ einen Punkt $P \equiv \varphi aA + \chi bB + \psi cC$ (wobei φ, χ, ψ beliebige rationale Zahlen bedeuten), durch fortgesetzte Verbindung der vier gegebenen Punkte mit geraden Linien zu finden.

Uebrigens kann die Wendepunktslinie auch als Verbindungslinie der Punkte

$$G_2e_1 - 4G_1e_2 \quad \text{und} \quad G_3'e_1 - 4G_1'e_3$$

construirt werden, die man aus den Punkten $G_2e_1 - G_1e_2$ (Schnittpunkt von C mit ab) und $G_3'e_1 - G_1'e_3$ (Schnittpunkt von C_1 mit ab_1) mit Leichtigkeit herleiten kann.

3.

Lässt man bei der Erzeugungsweise (1) den Punkt a mit a_1 zusammenfallen und rückt man überdies den Punkt d in den Schnittpunkt der Geraden C und C_1, oder auch nur in einen beliebigen Punkt der Verbindungslinie des Doppelpunktes a mit CC_1, so zerfällt die von x beschriebene Curve dritter Ordnung in einen Kegelschnitt und die Verbindungslinie von a mit CC_1. Wir können daher sagen:

Bewegt sich ein veränderliches Dreieck so, dass seine Seiten sich um feste Punkte drehen, während zwei seiner Ecken auf festen Geraden fortrücken, so beschreibt ein beliebiger auf der durch diese zwei Ecken gehenden Seite gelegener Punkt einen Kegelschnitt, wenn seine Verbindungslinie mit dem Schnittpunkte jener zwei festen Geraden stets durch die dritte, noch freie Ecke des Dreiecks hindurchgeht.

Unter Benutzung desselben Coordinatensystems wie bei (2) (so dass also auch b_1 wieder auf C, b auf C_1 liegt), lautet die Gleichung dieses Kegelschnitts, wenn d in CC_1 liegt, einfach:

$$G_2G_3'x_2x_3 + G_1G_3'x_3x_1 + G_2G_1'x_1x_2 = 0.$$

Dualistisch zu der oben mitgetheilten Erzeugungsweise der Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt ergiebt sich natürlich sofort eine Erzeugungsweise der Curven dritter Classe (vierter Ordnung) mit Doppeltangente.

Darmstadt, den 5. Januar 1886.

*) „Der barycentrische Calcul", § 203.

Ueber Gruppen gerader Linien auf Flächen höherer Ordnung.

Von

Fr. G. Affolter in Zürich.

Die Flächen n^{ter} Ordnung, n grösser 3, auf denen eine beschränkte Anzahl gerader Linien liegen, sind bis heute noch keiner methodischen geometrischen Untersuchung unterworfen worden.

Die Eigenschaften solcher Flächen, bedingt durch das Vorhandensein von auf ihnen liegenden Geraden, sowie die Gruppirungsverhältnisse dieser sind daher noch, mit Ausnahme einiger wenigen Specialflächen, unbekannt.

Nachfolgende Mittheilung bezweckt ein elementares Verfahren zur Anwendung zu bringen direct zu solchen Flächen und der Gruppirung der auf ihnen liegenden Geraden zu gelangen.

Alle Resultate, die diese Arbeit aufweisen kann, waren schon vor mehr als zehn Jahren gesammelt. Meine seitherigen amtlichen und militärischen Beschäftigungen verhinderten mich die Sache während dieser Zeit weiter zu verfolgen. Erst heute ist es mir möglich diese Untersuchung wieder aufzunehmen und weiter zu führen. Die schöne und sehr bemerkenswerthe Arbeit von Friedrich Schur: *Ueber eine besondere Classe Flächen vierter Ordnung*, die im 20. Bande dieser Annalen erschienen ist, bestimmt mich meine Untersuchungen zu veröffentlichen.

A. Die Methode und der Umfang der Untersuchung.

Besitzt eine Fläche n^{ter} Ordnung F_n eine Anzahl gerader Linien l_x, dann schneidet jede durch eine dieser Geraden gelegte Ebene E_n die Fläche F_n noch in einer Restcurve C_{n-1} der $n-1^{ten}$ Ordnung. Zerfällt C_{n-1} in einzelne Theilcurven, so kann diess bei einer gewissen Anzahl von Geraden l_x je bei einer beschränkten Anzahl der durch die l_x hindurchgehenden Ebene E_n der Fall sein, soll F_n selbst nicht auch in Theilflächen sich auflösen. Unter diesen Ebenen kann es möglicherweise wieder solche geben, auf denen C_{n-1} je in gleicher

Weise in Theilcurven zerfällt. Wir nennen nun *ein System von ε Geraden l_x auf einer Fläche n^{ter} Ordnung, in welchem System durch jede l_x je u Ebenen E_n hindurchgehen, auf denen die Restcurve C_{n-1} in gleicher Weise degenerirt, eine Gruppe Gerader der F_n von der u^{ten} Classe, der n^{ten} Ordnung und der Degeneration D_{a+1} und bezeichnen sie mit* $G_{n,u,D_{a+1}}$.

Aus der Definition einer solchen Gruppe folgt ohne Weiteres, dass, wenn irgend eine der ε Geraden l_x von S_l der übrigen geschnitten wird, dies bei allen Geraden l_x in gleicher Weise der Fall sein muss. Ferner muss S_l die Form besitzen:

$$S_l = u \cdot a, \tag{1}$$

worin a gleich ist der um 1 verminderten Anzahl von Geraden l_x, die in jeder Ebene E_n liegen. Es degenerirt in diesem Fall C_{n-1} in a Gerade und in eine Curve C_{n-a-1} der $n - a - 1^{ten}$ Ordnung.

Es ist nun immerhin noch möglich, dass es auch Gruppen geben könne, in denen nicht alle Ebenen E_n die F_n in Restcurven C_{n-1} derselben Degeneration schneiden. Wir heissen eine solche Gruppe *gemischte* Gruppe, im Gegensatz zu den oben definirten, die wir *homogene* Gruppen nennen wollen. Soweit unsere Untersuchungen bis jetzt reichen, lassen sich die gemischten Gruppen immer auf homogene zurückführen.

Eine homogene Gruppe heissen wir *homogene Grundgruppe*, sobald sie in sich selbst abgeschlossen und in sich überführbar ist. Eine Grundgruppe lässt sich öfter zusammengesetzt denken aus Gruppen mit weniger Elementen. Wir heissen eine solche Gruppe Elementargruppe so lange sie noch in sich überführbar und in sich abgeschlossen ist. Elementargruppen können, wenn sie nicht selbst Grundgruppen sind, nicht für sich allein auf Flächen n^{ter} Ordnung auftreten, während Grundgruppen für sich allein oder in Verbindung mit noch anderen Grundgruppen auf Flächen n^{ter} Ordnung vorkommen können. So bedeuten z. B. die 27 Geraden einer Fläche 3^{ter} Ordnung eine Grundgruppe 3^{ter} Ordnung, 5^{ter} Classe vollständiger Degeneration, während die 9 Geraden eines Triederpaares eine Elementargruppe 3^{ter} Ordnung und 3^{ter} Classe darstellen.

Es geht nun wohl aus der Natur der Sache hervor, dass jede andere beliebige Gruppe, ja selbst alle auf einer Fläche F_n möglichen Geraden entweder eine homogene oder gemischte Grundgruppe bilden, oder durch *An- und Einschiebungen* solcher entstanden gedacht werden können. So besitzt z. B. die Schur'sche Fläche F_4 mit 52 Geraden eine Einschiebung einer Gruppe 4^{ter} Ordnung, 2^{ter} Classe in eine Gruppe 4^{ter} Ordnung und 4^{ter} Classe; während die Schur'sche Fläche F_4 mit 48 Geraden drei Anschiebungen von Gruppen 2^{ter} Classe und 4^{ter} Ordnung besitzt.

Die Kenntniss der Grundgruppen führt daher wohl am einfachsten zur Kenntniss der Flächen n^{ten} Grades mit einer bestimmten Zahl von Geraden sowie zur Kenntniss der Gruppirung dieser Geraden. Wir stellten uns daher in erster Linie die Aufgabe die Grundgruppen jeder Degeneration für die Fläche n^{ten} Grades aufzufinden und in zweiter Linie die Bedingungen der Ein- und Anschiebungen festzustellen.

Die Untersuchungen haben nun ergeben, dass sich die Grundgruppen jeder Degeneration der Zahl nach auf wenige reduciren, dass aber ihre Combinationen durch Ein- und Anschiebungen zu den vielgestaltetsten Gruppirungen der Geraden auf Flächen n^{ter} Ordnung führen. Ferner hat sich herausgestellt, dass durch Festsetzung der Bedingungen der Ein- und Anschiebungen man zu den Constructionen der Flächen n^{ten} Grades mit je einer bestimmten Anzahl Geraden gelangt.

Es wird sich von Vortheil erweisen, wenn wir die Gruppen $G_{n,\varkappa,D_{a+1}}$ ausser nach Ordnung, Classe und Degeneration noch nach zwei Arten, *I* und *II*, eintheilen. Zwei Ebenen E_n der Gruppe schneiden sich, wenn sie nicht durch dieselbe Gerade l_x der Gruppe gehen in einer Geraden K, die im allgemeinen nicht auf der Fläche F_n liegt. Wir heissen eine solche Schnittgerade *Kante*. Der Schnittpunkt dreier Ebenen E_n, die keine Gerade der Gruppe gemeinsam haben, durch den auch drei Kanten gehen, heissen wir *Spiz*. Ein Spiz wird daher im Allgemeinen auch nicht auf F_n liegen. Es sind nun die folgenden beiden Arten *I* und *II* auseinander zu halten. Wenn es in einer Gruppe keine Kante giebt, durch die mehr als zwei Ebenen E_n gehen, heissen wir sie Gruppe I^{ter} Art; gehen aber durch eine oder mehrere Kanten mehr als zwei Ebenen der Gruppe, dann heissen wir sie Gruppe II^{ter} Art. In den Gruppen I^{ter} Art schneiden sich auch nicht mehr als zwei Geraden l_x in einem Punkt, während in den Gruppen II^{ter} Art öfters mehr als zwei Geraden l_x sich in demselben Punkte schneiden müssen.

Wir sind bei unseren Untersuchungen in der Weise vorgegangen, dass wir zunächst die Grundgruppen der beiden Arten aufsuchten, dann die Bedingungen der Ein- und Anschiebungen feststellten und hieraus die Construction der Flächen mit einer bestimmten Anzahl Geraden ableiteten.

In dieser Mittheilung treten wir nur auf die Gruppen vollständiger Degeneration und der ersten Art ein. Auf diese Gruppen können dann in gewissem Sinne die Gruppen I^{ter} Art mit der Degeneration D_{a+1} leicht zurückgeführt werden. Ich hoffe bald diess in einer nachfolgenden Mittheilung zur Ausführung zu bringen. Die Behandlung der Gruppen II^{ter} Art, sowie die Construction der Flächen mit einer bestimmten Anzahl Geraden soll einer weiteren Mittheilung vorbehalten sein.

B. Allgemeine Eigenschaften der homogenen Gruppen der n^{ten} Ordnung, der u^{ten} Classe, mit vollständiger Degeneration und von der I^{ten} Art oder G^{I}_{n,u,D_n}.

Nach der Definition dieser Gruppen muss jede Ebene E_n derselben die Fläche F_n in n Geraden l_x schneiden. Durch jede Gerade l_x müssen u Ebenen E_n hindurchgehen. Es sei z die Anzahl der Geraden l_x und Z die Anzahl der Ebenen E_n, dann muss also

$$\frac{z}{n} = \frac{Z}{u} = \alpha \tag{2}$$

sein. Jede Gerade l_x wird von

$$S_l = u(n-1) = \frac{z-n}{n} + n - 1 \tag{3}$$

anderen Geraden l_x geschnitten und daher ist

$$u = \frac{z-n}{n(n-1)} + 1 \tag{4}$$

und wenn wir

$$\alpha = (n-1)(u-1) + 1 \tag{5}$$

setzen, erhalten wir

$$z = n\alpha = n(n-1)(u-1) + n, \tag{6a}$$

$$Z = u\alpha = u(u-1)(n-1) + u. \tag{6b}$$

Aus den Gleichungen (6) folgt:

1. *In jeder Gruppe G^{I}_{n,u,D_n} besitzt die Zahl der Seiten (Geraden) zum Modul $n(n-1)$ den Rest n und die Zahl der Ebenen zum Modul $u(u-1)$ den Rest u.*

Aus den Gleichungen (3) ergiebt sich:

2. *Jede Seite einer Gruppe wird von $u(n-1)$ der übrigen Seiten geschnitten. Von diesen liegen u mal je $n-1$ mit jener in einer Ebene der Gruppe.*

3. *Jede Ebene einer Gruppe hat mit $n(u-1)$ der übrigen Ebenen je eine Seite gemeinsam. Von diesen Ebenen gehen n mal je $u-1$ mit jener durch dieselbe Seite.*

Setzt man

$$S_l = u(n-1) \quad \text{und} \quad S_e = n(u-1),$$

dann ist

$$z - S_l - 1 = (n-1)^2(u-1) \quad \text{und} \quad Z - S_e - 1 = (u-1)^2(n-1), \tag{7}$$

oder:

4. *Jede Seite einer Gruppe wird von $(n-1)^2(u-1)$ anderen Seiten nicht geschnitten. Es giebt daher in der Gruppe $\frac{1}{2}n(n-1)^2(u-1)\alpha$ mal je zwei sich nicht schneidende Seiten.*

5. *Jede Ebene einer Gruppe wird von* $(u-1)^2(n-1)$ *anderen Ebenen in Kanten geschnitten. Es giebt daher* $\frac{1}{2}u(u-1)^2(n-1)\alpha$ *mal je zwei Ebenen, die sich nicht in einer Seite schneiden.*

6. *Es liegen in jeder Ebene* $(u-1)^2(n-1)$ *Kanten, die Zahl der Kanten ist* $\frac{1}{2}u(u-1)^2(n-1)\alpha$.

7. *Jede Seite wird von* $u(n-1)(u-1)^2$ *Kanten geschnitten.*

Nehmen wir in der Ebene E_x zwei Seiten z. B. l_1 und l_2, so gehen durch jede von ihnen noch $u-1$ Ebenen E_x^1 und E_x^2. Es kann nun, wie leicht ersichtlich, keine der $u-1$ Ebenen E_x^1 mit irgend einer der $u-1$ Ebenen E_x^2 eine Seite gemein haben, weil sonst durch den Schnittpunkt $l_{1,2}$, den wir Ecke nennen wollen, drei Seiten hindurchgehen würden, was gegen die Definition der Gruppe verstossen würde. Es schneiden sich somit die Ebenen E_u^1 und E_u^2 in $(u-1)^2$ Kanten, die sämmtlich durch die Ecke $l_{1,2}$ hindurchgehen. Wir haben so:

8. *Durch jede der* $u(n-1)$ *Ecken einer Seite gehen* $(u-1)^2$ *Kanten. Diese Kanten sind die Schnittlinien der Ebenen die zu* $u-1$ *durch jede der Seiten, die die Ecke bilden, hindurchgehen und von denen keine mit der Ebene der Ecke zusammenfällt.*

9. *Jede Kante wird ausser in den n-Ecken, in denen sich zu je zweien die Seiten der beiden durch die Kante gehenden Ebenen schneiden, noch in* $u^2(n-1)-(u-1)(3n-2)$ *anderen Punkten von Kanten geschnitten.* Auf jeder *Kante liegen daher n Ecken und* $\beta_u = u^2(n-1)-(u-1)(3n-2)$ *Spitzen. Die Gesammtzahl der Spitzen, die auf einer Ebene liegen, ist daher gleich* $\frac{1}{2}(n-1)(u-1)^2\beta_u$ *etc. Die Gesammtzahl der Spitzen in der Gruppe ist folglich*

$$\frac{1}{6}u(u-1)^2(n-1)\alpha\beta_u.$$

10. *Auf jeder Seite giebt es* $u(n-1)$ *Ecken, in jeder Ebene liegen* $\frac{1}{2}n(n-1)$ *Ecken, deren Seiten je beide in der Ebene liegen und* $n(n-1)(u-1)$, *von denen je nur eine Seite in der Ebene liegt.*

11. *Die n Ecken, die auf einer Kante liegen, sind die Schnittpunkte der Kante mit der Fläche* n^{ter} *Ordnung. Durch jede Ecke gehen* $(u-1)^2$ *Kanten, von denen jede durch* $n-1$ *weitere Ecken hindurchgeht.*

12. *Durch jeden Spiz gehen drei Kanten die je n Ecken mit einander verbinden. Es gehen durch jeden Spiz drei Ebenen der Gruppe die keine Seite gemein haben.*

13. *Zu zwei Ebenen giebt es* β_u *andere Ebenen, die jene zwei Ebenen nur in Kanten schneiden. Man hat daher*

$$\frac{1}{6} u(u-1)^2 (n-1) \alpha\beta_u$$

mal 3 *Ebenen die sich nur in Kanten schneiden.*

Dualistisch entspricht dem letzteren Satze:

14. *Es giebt in der Gruppe*

$$\frac{1}{6} n(n-1)^2 (u-1) \alpha(n^2(u-1) - (n-1)(3u-2))$$

mal je drei Seiten, die sich nicht schneiden.

Es seien E_1 und E_2 Ebenen, die sich in der Kante $K_{1,2}$ schneiden. Auf $K_{1,2}$ liegen die n Ecken $e_{1,1}, e_{2,2}, e_{3,3}, \ldots, e_{n,n}$, in den sich je die zwei Seiten $l_1^1, l_1^2; l_2^1, l_2^2$ etc. schneiden. Die Seiten l_n^1, l_n^2 bestimmen eine Ebene $E_{n,n}$, in der je noch $n-2$ weitere Seiten liegen. Daraus folgt:

15. *Zu zwei Ebenen, die sich in einer Kante schneiden, giebt es n Ebenen, von denen jede mit jeder von jenen beiden je eine Seite gemeinsam hat.*

16. *Zu zwei Seiten, die sich nicht schneiden, giebt es immer u Seiten, die jene beiden schneiden.*

Schneiden wir die Gruppe sammt der Fläche F_n durch eine beliebige nicht zur Gruppe gehörende Ebene E, dann muss die Schnittcurve C_n von E mit F_n folgende Eigenschaft besitzen; insofern die Gruppe *wirklich* existirt:

17. *Es giebt ebene Curven n^{ten} Grades C_n, auf denen je $n\alpha$ Punkte p so gruppirt angenommen werden können, dass $u\alpha$ mal je n der Punkte auf einer Geraden g liegen, von diesen Geraden durch jeden Punkt p je u hindurchgehen. Die Geraden g schneiden C_n nur in Punkten p.*

Fällt die Ebene E mit einer Ebene E_n der Gruppe zusammen, so geht dieser Satz in folgenden über:

18. *Die n Seiten der Ebene einer Gruppe sind derartig gelegen, dass auf jeder von ihnen $(n-1)(u-1)$ Punkte so angenommen werden können, dass $(u-1)^2(n-1)$ mal je n auf einer Geraden liegen, von diesen Geraden je $u-1$ durch jeden jener Punkte hindurchgehen.*

Diese beiden Sätze 17 und 18 geben uns Bedingungen, unter denen Gruppen auf F_n möglich sind. Eine dahingehende Untersuchung solcher Curven C_n oder n-Seite in der Ebene führt dann ganz von selbst zu Constructionen der Fläche F_n. Ein Eingehen auf diese ebenen Gebilde ist vorerst noch nicht erforderlich, wir kommen bei der Construction der Fläche F_n wieder auf dieselben zurück.

Aus den Sätzen 17 und 18 folgt ohne weiteres

19. a) *Die grösste Zahl der Ebenen, die sich gegenseitig nur in Kanten schneiden, und der Geraden, die sich nicht schneiden, kann in einer Gruppe nicht grösser als α sein.*

b) *Auf solchen α-Ebenen liegen alle Seiten der Gruppe und durch solche α-Geraden gehen alle Ebenen der Gruppe.*

c) *Zu jedem solchen System von α Ebenen lassen sich noch $u-1$ andere bilden. Es sind daher dann die $n\alpha$ Seiten der Gruppe ein Theil des Durchschnitts von u mal α Ebenen. Oder durch die Seiten solcher Gruppen lassen sich Büschel von Flächen α^{ter} Ordnung legen.*

C. Grösste Werthe der Classenzahl u.

Da für einen jeden bestimmten Werth von n die Zahl $n\alpha$ der Seiten einer Gruppe G^I_{n,u,D_n} von $\alpha = (n-1)(u-1)+1$ d. h. von u abhängt, so erkennt man, dass mit wachsendem u auch αn zunimmt. Auf einer jeden F_n können aber höchstens $n(11n-24)$ Gerade liegen, es wird daher für jede F_n einen grössten Werth von u geben. Um diesen Werth $u_{\max}$ zu bestimmen gehen wir wie folgt vor: Es sei β die kleinste positive ganze Zahl, so dass

$$n(11n-24)-\beta n \equiv n \bmod. n(n-1).$$

Dann erhält man

$$u_{\max} = 12 - \frac{14+\beta_{\min}}{n-1}. \tag{8}$$

Setzt man $\beta = k$ und $n = 15+k$, dann ist:

$$u_{\max} = 11,$$

d. h. es giebt nicht nur für jede Fläche F_n (n kleiner 15) einen maximalen Werth der Classenzahl u, sondern es giebt überhaupt einen grössten Maximalwerth, der gleich 11 ist für alle Flächen, deren Ordnung 15 oder grösser ist.

Die maximalen Werthe von u für $n=3$ bis 16 sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt in Verbindung mit den zugehenden Werthen von $\beta_{\min}$ S_I und S_E.

Aus der Gleichung (8) oder aus der Tabelle ersieht man, dass $\beta_{\min}$ nur für $n=3$, $=8$ und $=15$ gleich Null sein kann, dass also nur für diese Flächen vorläufig die Möglichkeit noch offen erscheint, dass die grösste Zahl der Geraden eine homogene Gruppe bilden können. Mit dieser Tabelle ist aber noch nicht bewiesen, dass auf den Flächen F_n überhaupt nicht $n(11n-24)$ Gerade liegen können, nur bilden sie nicht *eine* homogene Gruppe, sondern Gruppen nicht vollständiger Degeneration oder Ein- und Anschiebungen verschiedener Gruppen und Gruppenarten.

Aus der Tabelle erkennt man ferner, dass die Classenzahl nur bei wenigen Flächen grösser als die Ordnung sein kann.

n	u_{max}	β_{min}	S_I	S_E	n	u_{max}	β_{min}	S_I	S_E
3	5	0	10	12	10	10	4	90	90
4	7	1	21	24	11	10	6	100	99
5	8	2	32	35	12	10	8	110	108
6	9	1	45	48	13	10	10	120	117
7	9	4	54	56	14	10	12	130	126
8	10	0	70	72	15	11	0	154	150
9	10	2	80	81	16	11	1	165	160

Man kann noch von andern Gesichtspunkten aus den grössten Werth von u bestimmen, indem man z. B. die durch die Ebenen der Gruppe repräsentirten dreifachen Tangentialebenen mit der Zahl der dreifachen Tangentialebenen einer F_n vergleicht. Durch eine solche Vergleichung erkennt man leicht, dass für die in Betracht kommenden Werthe von u durch die Ebenen der Gruppe keine Ueberproduction von dreifachen Tangentialebenen stattfindet.

D. Reduction der Gruppen G^I_{n,u,D_n}.

Es sei L eine Seite der Gruppe, so gehen durch dieselbe u Ebenen E^y_e, in denen die $u(n-1)$ Seiten $q^1, q^2, q^3, \ldots, q^y$ und l^y_x liegen, ($x = 1$ bis $n-2$ und $y = 1$ bis u). Eine Seite M, die L nicht schneidet, muss daher aus jeder der u Ebenen E^y_e eine der $n-1$ übrigen Seiten schneiden — es seien dies die u Seiten q^y. Durch die Seite M gehen die u Ebenen E^y_m, in denen ausser M und den u Seiten q^y noch $(n-2)\,u$ andere Seiten m^y_x liegen. Es werden L und M zusammen von $u(2n-3)$ Seiten geschnitten und von $\beta_l = n^2(u-1) - (n-1)(3u-2)$ anderen Seiten nicht getroffen. Diese β_e Seiten können auf keiner der Ebenen E^y_m und E^y_e liegen. Es muss nun jede Seite l^y_x je $u-1$ Seiten $m^{y'}_x$ schneiden. Solche zwei Seiten l^y_x und $m^{y'}_x$, die sich schneiden, bestimmen jedoch wieder eine Ebene $E^{y'y}_{m.l}$ der Gruppe. Die Zahl dieser Ebenen ist, wie leicht ersichtlich, gegeben durch

$$Z^{y'y}_{m.l} = u(u-1)(n-2). \tag{9}$$

Durch jede Seite q^y gehen ausser den beiden Ebenen E^y_l und E^y_m noch $u-2$ Ebenen E^y_x. Die Zahl dieser Ebenen ist daher:

$$Z^y_x = u(u-2). \tag{10}$$

Nun ist:

$$Z_x^v + Z_{m.l}^{v'v} + 2u = u\alpha$$

gleich der Zahl der in der Gruppe vorkommenden Ebenen. Es sind daher alle Ebenen der Gruppe bestimmt.

Die β_l Seiten, die weder L noch M schneiden, müssen ganz in den Ebenen $E_{m.l}^{v'v}$ und E_x^v liegen. Die Vertheilung dieser Seiten auf diese Ebenen kann nun nach drei Richtungen hin stattfinden: Es können eine gewisse Anzahl A_1 von Seiten g_1 nur in den Ebenen E_x^v liegen, eine andere Anzahl A_2 von Seiten g_2 können in den Ebenen $E_{m.l}^{v'v}$ und E_x^v zugleich vorkommen und endlich der Rest in der Anzahl A_3 von Seiten g_3 können nur in Ebenen $E_{m.l}^{v'v}$ sich vorfinden. Unter allen Umständen muss

$$A_1 + A_2 + A_3 = \beta_l \tag{11}$$

sein. Die Ebene E_x^v, die durch die Seite q^v hindurchgeht, schneidet die $u - 1$ übrigen Seiten q^v in $u - 1$ Punkten p. Diese Punkte müssen auf den $n - 1$ ausser q^v noch auf E_x^v liegenden Seiten in gewisser Weise vertheilt liegen. In welcher Weise dies nun bei einer bestimmten Ebene E_x^v eintreffen möge, bleibe vorläufig dahingestellt, aber es liegt in der Natur der Gleichwerthigkeit sämmtlicher Ebenen E_x^v, dass dies bei allen $u(u-2)$ Ebenen E_x^v in derselben Weise stattfindet. Aus denselben Gründen der Gleichwerthigkeit der sämmtlichen Ebenen $E_{m.l}^{v'v}$ müssen in jeder dieser Ebenen gleich viel der Geraden β sich vorfinden, die entweder nur in Ebenen $E_{m.l}^{v'v}$ liegen oder in diesen Ebenen und in Ebenen E_x^v zugleich vorkommen. Gestützt auf diese Eigenschaft der Gleichwerthigkeit lassen sich nun die Zahlwerthe A_1, A_2 und A_3 leicht bestimmen.

I. Bestimmung von A_1.

Liegt die Seite g_1 nur in Ebenen E_x^v, dann muss sie auf u dieser Ebenen sich vorfinden, von denen keine zwei durch dieselbe Seite q^v gehen können. Es schneidet daher jede Seite g_1 alle u Seiten q^v. Diese letzteren liegen daher hyperboloidisch und es kann folglich auch u nicht grösser n sein. Es giebt daher im ganzen $u-2$ der Geraden g_1, von denen in jeder Ebene E_x^v nur eine liegt. Diese $u-2$ Seiten g_1 bilden mit L und M selbst wieder u unter sich windschiefe Geraden und gehören zur zweiten Schaar Erzeugender des durch die q^v bestimmten Hyperboloids $H^2(LM)$. Nehmen wir statt L und M irgend zwei andere sich nicht schneidende Geraden, so erhält man in gleicher Weise wieder ein System von $2u$ Geraden als Seiten der Gruppe, die hyperboloidisch liegen. Die hierdurch charakterisirte Gruppe heissen

wir eine *hyperboloidische*. In hyperboloidischen Gruppen ist daher immer

$$A_1 = u - 2. \tag{12}$$

Aus der Gleichwerthigkeit der Ebenen E_x^y folgt, dass, wenn A_1 nicht gleich $u - 2$ ist, dann

$$A_1 = 0 \tag{13}$$

sein muss.

II. Bestimmung von A_2 und A_3, wenn $A_1 = 0$.

Es sei zunächst $A_1 = 0$. Die u Seiten q^y können in diesem Fall, sobald u grösser 3, im allgemeinen nicht mehr hyperboloidisch liegen. Sollten sie jedoch in einem Specialfall dennoch hyperboloidisch liegen, so können ausser von L und M von keiner weiteren Seite mehr als zwei von ihnen geschnitten werden. Wir nehmen an, dass keine vier oder mehr von ihnen hyperboloidisch liegen. In diesem Fall können auf den Seiten g_2, die in den Ebenen $E_{m.l}^{y'y}$ und E_x^y zugleich liegen, kein, ein, höchstens zwei Schnittpunkte p der durch q^y gehenden Ebene E_x^y mit den $u - 1$ übrigen Seiten $q^{y'}$ liegen. Wir machen daher die Annahme, es gebe in jeder Ebene E_x^y k_3 Seiten h_3 die drei, k_2 Seiten h_2 die zwei, und k_1 Seiten h_1 die eine der Geraden q^y schneiden. Es muss dann

$$\begin{cases} k_3 + k_2 + k_1 = n - 1, \\ 2k_3 + k_2 \quad\quad = u - 1 \end{cases} \tag{14}$$

sein. Jede Ebene $E_{m.l}^{y'y}$ muss $u - 2$ der Seiten q^y in Punkten s schneiden, die nicht zugleich auf Seiten l_x^y und $m_x^{y'}$ liegen. Es liegen nun in jeder dieser Ebenen x_3 Seiten h_3, x_2 Seiten h_2 und x_1 Seite h_1. Es sei ferner y_3, y_2 und y_1 respective gleich der Gesammtzahl der Seiten h_3, h_2 und h_1, dann muss

$$\begin{cases} 3x_3 + 2x_2 + x_1 = u - 2, \\ y_3 = u(u-2)\frac{k_3}{3}, \\ y_2 = u(u-2)\frac{k_2}{2}, \\ y_1 = u(u-2)\frac{k_1}{1}. \end{cases} \tag{15}$$

Auf jeder Ebene $E_{m.l}^{y'y}$ liegen x_3 Seiten h_3 und durch jede Seite [illegible] $u - 3$ Ebenen $E_{m.l}^{y'y}$. Aehnlich verhält es sich mit h_2 und h_1,

[illegible]

$$(16)\qquad \begin{cases} y_3 = \dfrac{u(u-1)(n-2)}{u-3} \cdot x_3, \\ y_2 = \dfrac{u(u-1)(n-2)}{u-2} \cdot x_2, \\ y_1 = \dfrac{u(u-1)(n-2)}{u-1} \cdot x_1. \end{cases}$$

Die Gleichungen (14)—(16) lassen sich leicht in folgende Formen bringen, die zur Bestimmung der nicht hyperboloidischen Gruppen dann auch vollständig genügen:

$$(17)\qquad \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = n - 1, \\ k_1 - k_3 \quad\quad = n - u, \\ 2k_3 + k_2 \quad\quad = u - 1, \\ x_1 = \dfrac{u-2}{n-2} \cdot \dfrac{k_1}{1}, \\ x_2 = \dfrac{(u-2)^2}{(u-1)(n-2)} \cdot \dfrac{k_2}{2}, \\ x_3 = \dfrac{(u-2)(u-3)}{(u-1)(n-2)} \cdot \dfrac{k_3}{3}, \\ y_1 = u(u-2)\dfrac{k_1}{1}, \\ y_2 = u(u-2)\dfrac{k_2}{2}, \\ y_3 = u(u-2)\dfrac{k_3}{3}. \end{cases}$$

Als Werthe für A_2 und A_3 ergeben sich nun leicht

$$(18)\qquad \begin{cases} A_2 = u(u-2)\left(\dfrac{k_3}{3} + \dfrac{k_2}{2} + \dfrac{k_1}{1}\right), \\ A_3 = \beta_i - A_2. \end{cases}$$

Diejenigen ganzen positiven Werthen k_3, k_2 und k_1, welche den Gleichungen (17) unter der Bedingung genügen, dass u nicht grösser (11), die Werthe von $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ zu ganzen positiven Zahlen, Null nicht ausgeschlossen, machen, bestimmen je homogene *nicht* hyperboloidische Gruppen. Die Fälle $u = 2$ und $u = 3$ kommen hier nicht in Betracht, weil sie zu den hyperboloidischen Gruppen gerechnet werden müssen. Um nun obige Gleichungen (17) und (18) nach ganzen positiven Zahlwerthen für die verschiedenen Grössen aufzulösen, unterscheiden wir die drei Hauptfälle: u grösser, gleich und kleiner n.

1. u grösser n.

In diesem Falle haben wir nur eine einzige Lösung für $n = 3$ und $u = 5$. Es ist dann $k_3 = 2$; $k_1 = k_2 = 0$; $x_3 = 1$, $x_1 = x_2 = 0$, $y_3 = 10$; $y_1 = y_2 = 0$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 10; \quad A_3 = 0.$$

Es repräsentirt diese Lösung die 27 Geraden der Fläche 3^{ter} Ordnung. Die hier gegebenen Zahlen repräsentiren den bekannten Satz, *dass ein Quintupel mit 2 Transversalen, von 2 Geraden ganz, von keiner Geraden viermal, von 10 Geraden dreimal, von keiner Geraden zweimal, von 10 Geraden einmal und von keiner Geraden keinmal geschnitten wird.*

2. u gleich n.

Unter dieser Voraussetzung gehen die Gleichungen (17) und (18) in folgende über:

$$(19)\quad \begin{cases} k_1 = k_3; \quad 2k_3 + k_2 = n - 1; \quad x_1 = k_1; \quad x_2 = \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{k_2}{2}; \\ x_3 = \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{k_3}{3}; \quad y_1 = n(n-2)\,k_1; \quad y_2 = n(n-2)\,\frac{k_2}{2}; \\ \qquad\qquad y_3 = n(n-2)\,\frac{k_3}{3}. \end{cases}$$

Diesen Gleichungen können nur folgende zwei Werthsysteme genügen:

$$(20a)\quad \begin{cases} \text{a)}\ k_3 = k_1 = 0, \quad k_2 = n - 1; \quad x_3 = x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{n-2}{2}. \\ y_1 = y_3 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{2}\,n(n-1)(n-2). \\ \mathsf{A}_2 = \frac{1}{2}\,n(n-1)(n-2); \quad \mathsf{A}_3 = \frac{1}{2}\,(n-1)(n-2)^2. \end{cases}$$

Es muss also $\frac{n-2}{2}$ eine gerade Zahl sein, da n gleich u nicht grösser als 11 sein kann, so trifft dies zu bei

$$n = 4; \ = 6; \ = 8; \ = 10.$$

$$(20b)\quad \begin{cases} \text{b)}\ k_3 = k_1 = \frac{n-1}{2}, \quad k_2 = 0; \quad x_3 = \frac{n-3}{2.3}, \\ x_2 = 0; \quad x_1 = \frac{n-1}{2}. \quad y_2 = 0; \\ y_3 = \frac{n(n-1)^2}{2.3}, \quad y_1 = \frac{1}{2}\,n(n-1)(n-2). \\ \mathsf{A}_2 = \frac{2}{3} \cdot n(n-1)(n-2), \\ \mathsf{A}_3 = \frac{1}{3}\,(n-1)(n-2)(n-3). \end{cases}$$

Diesen Gleichungen (20b) genügt ausser $n = 3$ nur noch $n = 9$.

In nachfolgender Tabelle sind die Lösungen für $u = n$ zusammengestellt.

n	k_1	k_2	k_3	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	A_2	A_3
4	0	3	0	0	1	0	0	12	0	12	6
6	0	5	0	0	2	0	0	60	0	60	40
8	0	7	0	0	3	0	0	168	0	168	126
10	0	9	0	0	4	0	0	360	0	360	288
3	1	0	1	1	0	0	3	0	2	4	0
9	4	0	4	4	0	1	252	0	96	336	112

3. u kleiner n.

In diesem Fall erhält man nur Lösungen bei jedem Werthe von n für $u = 3$ und $u = 2$.

1) Für $u = 3$ ist:

$$k_1 = n - 2; \quad k_2 = 0; \quad k_3 = 1.$$
$$y_1 = n - 2; \quad y_2 = 0; \quad y_3 = 1.$$
$$x_1 = 1; \qquad x_2 = 0; \quad x_3 = 0.$$
$$A_2 = 3n - 5, \quad A_3 = 2(n - 2)(n - 3).$$

Da aber jede Gruppe $u = 3$ mit $k_3 = 1$ zu den hyperbolischen gehört, so haben wir hier also keine eigentliche Lösung.

2) Für $u = 2$ erhalten wir:

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0; \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$
$$k_1 = n - 2; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = 0.$$
$$A_2 = 0; \quad A_3 = (n - 2)^2.$$

Diese Gruppen können aber in gewissem Sinn auch zu den hyperboloidischen gerechnet werden und sie fallen daher hier ausser Betracht. Es reducieren sich hierdurch die *nicht* hyperboloidischen Gruppen auf nur einige wenige Specialfälle und sie besitzen daher keinen allgemeinen Charakter.

III. Bestimmungen von A_2 und A_3 wenn $A_1 = u - 2$.

Es sei nun $A_1 = u - 2$. In jeder Ebene E_x^y liegen ausser den beiden Seiten q^y und g_1 noch $n - 2$ andere Seiten g_2, von denen jede, ausser q^y keine der andern Seiten $q^{y'}$ schneiden kann. Es liegt daher jede Seite g_2 nur in einer Ebene E_x^y und die Anzahl dieser Seiten g_2 ist daher $u(u - 2)(n - 2)$. Durch jede g_2 müssen folglich $u - 1$ Ebenen $E_{m.l}^{y'y}$ gehen, und in jeder Ebene $E_{m.l}^{y'y}$ liegen $u - 2$ dieser Seiten g_2. Es ist also

$$A_2 = u(u - 2)(n - 2). \tag{23}$$

In jeder der Ebenen $E_{m.l}^{y'y}$ liegen ausser den beiden Seiten l_x^y und $m_x^{y'}$ sowie den $u-2$ Seiten g_2 noch $n-u$ Seiten g_3. Durch jede von diesen g_3 müssen u Ebenen $E_{m.l}^{y'y}$ hindurchgehen. Die Zahl A_3 der Seiten g_3 ist daher gegeben durch

$$A_3 = (u-1)(n-2)(n-u). \tag{24}$$

Setzt man für A_1, A_2 und A_3 die gefundenen Werthe in die Gleichung (11) ein, dann wird dieselbe identisch erfüllt, sämmtliche Geraden der Gruppe sind daher bestimmt. Auch diese hyperboloidischen Gruppen kommen nur in beschränkter Anzahl vor, *sobald* u grösser 2 ist. Die möglichen Gruppen lassen sich leicht bestimmen. Das Hyperboloid $H^2(LM)$ schneidet die Fläche F_n noch in einer Raumcurve $C_{2n-2u} = C_{2k}$ der $k = n-u^{\text{ten}}$ Ordnung, die von jeder Erzeugenden der $H^2(LM)$ in $n-u$ Punkten geschnitten wird. Jede der Seiten g_3 muss C_{2k} in zwei Punkten schneiden, weil jede g_3 das Hyperboloid $H^2(LM)$ in ebensoviel Punkten schneiden muss, die weder auf Geraden q^y noch g, noch L und M liegen können. Setzt man $k = n-u = 1$ oder $u = n-1$, dann geht C_{2k} in einen Kegelschnitt über, der auf der Ebene F_1 liegt. Die $A_3 = (n-2)^2$ Seiten g_3 müssen daher auf F_1 liegen. Dies ist möglich für $n = 3$, jedoch nicht für ein n grösser als 3. Es giebt somit ausser $n = 3$ keine hyperboloidischen Gruppen der n^{ten} Ordnung, deren Classe gleich $n-1$. Es lässt sich leicht zeigen, dass für u grösser 2 immer durch die Curve C_{2k} einer Fläche F_k der $k = n-u^{\text{ten}}$ Ordnung gelegt werden kann, auf denen alle Geraden g_3 liegen müssen. Die Fläche F_k hat mit F_n ausser der Schnittcurve C_{2k} noch eine Curve der $(n-2)\,k^{\text{ten}}$ Ordnung gemein. Es kann daher A_3 höchstens gleich $k(n-2)$ sein, d. h. es kann nur

$$k(u-1) = k$$

sein. Diese Gleichung wird erfüllt entweder wenn $u-1 = 1$ oder $k = 0$, d. h. wenn

$$u = 2 \quad \text{oder} \quad u = n. \tag{25}$$

Mit andern Worten:

20. *Die homogenen hyperboloidischen Gruppen* I^{ter} *Art sind entweder Gruppen gleicher Ordnung und Classe und sind daher unter allen Umständen nur auf Flächen* 4^{ten} *bis* 10^{ten} *Grades möglich. Oder sie sind Gruppen von der* n^{ten} *Ordnung und* 2^{ten} *Classe, wobei* n *jeden positiven ganzen Zahlwerth annehmen kann.*

Setzen wir $u = n$, dann erhalten wir

$$A_1 = n-2, \quad A_2 = n(n-2)^2; \quad A_3 = 0. \tag{26}$$

Setzt man $u = 2$, dann ist

$$A_1 = 0; \quad A_2 = 0; \quad A_3 = (n-2)^2.$$

Aus den bisherigen Betrachtungen folgt, dass die homogenen Gruppen, deren Classe gleich 2 ist, bei allen Flächen auftreten und sowohl als hyperboloidische wie nicht hyperboloidische betrachtet werden können. Ein eigenthümliches Verhältniss findet bei der Gruppe 3^{ter} Classe statt. Diese treten bei der Bestimmung der nichthyperboloidischen Gruppen als hyperboloidische auf, während sie bei den hyperboloidischen nicht möglich sind. Es kann dies nur dahin gedeutet werden, dass sie bei allen Gruppen eine bestimmte Rolle als Elementengruppe spielen, jedoch für sich allein nicht auftreten können, ähnlich wie es bei den Flächen 3^{ter} Ordnung mit den Triedern der Fall ist.

Bemerkung.

Was nun die homogenen Gruppen G^I_{n,n,D_n} anbelangt, so ist es mir ausser für $n = 4$ noch nicht gelungen die Flächen zu erzeugen, auf denen diese Gruppen ohne andere Gerade vorkommen. Wohl ist es aber leicht solche Flächen gerader Ordnung zu erzeugen, auf denen diese Gruppen mit Ein- und Anschiebungen von Gruppen 2^{ter} Classe vorkommen. Die nachfolgenden mitgetheilten Eigenschaften dieser Gruppen n^{ter} Ordnung und Classe bleiben jedoch bestehen, ob die Gruppe für sich oder mit Einschiebungen anderer vorkommen.

E. Einige Eigenschaften der nichthyperboloidischen Gruppen G^I_{n,n,D_n}.

Setzt man in allgemeinen Gleichungen $u = n$, so wird die Zahl der Ebenen gleich der der Seiten gleich $n\alpha$, wo $\alpha = (n-1)^2 + 1$. Jede Seite wird von $n(n-1)$ der obigen geschnitten und von $(n-1)^3$ nicht getroffen. Es giebt somit $\frac{1}{2}n(n-1)^3\alpha$ mal je zwei sich nicht schneidende Seiten der Gruppe.

Es sei n eine gerade Zahl, d. h. gleich 4, 6, 8 oder 10. Dann erhält man aus Gleichung (20a) folgenden Satz.

21. *Irgend zwei sich nicht schneidende Seiten L und M der Gruppe werden von n unter sich windschiefen Seiten (q^v) geschnitten. Diese n Seiten q^v werden von 2 Seiten ganz, von $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ Seiten g_2 zu je zweien, von $2(n-2)$ Seiten g_1 zu je einer und von $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)^2$ Seiten g_3 gar nicht getroffen.*

Bezeichnen wir solche n Seiten q^v mit N, so ist ein solches N vollständig bestimmt durch die 2 der N ganz schneidenden Geraden (L und M) oder durch zwei Transversalen, d. h.

22. *Es lassen sich die $n\alpha$ Seiten der Gruppe zu $\frac{1}{2}n(n-1)^3\alpha$ N zusammenstellen. Je zwei sich nicht schneidende Geraden kommen je nur in einem N als Transversalen vor.*

Zwei beliebige Seiten q^y und $q^{y'}$ werden von n anderen Seiten geschnitten, je zwei von diesen bestimmen als Transversalen ein N, d. h.:

23. *Zwei sich nicht schneidende Geraden kommen in* $\frac{1}{2}n(n-1)$ N *als Seiten der* N *vor.*

Das $N(L, m_x^y)$ besitzt zunächst die Seite q^y. Ausserdem werden L und m_x^y noch von $n-1$ Seiten l_x^y geschnitten. Lassen wir für dasselbe y den Werth von x alle Werthe von 1 bis $n-2$ annehmen, dann erhält man für jeden Werth x ein bestimmtes N. Es repräsentirt daher $N(L, m_x^y)$ $n-2$ verschiedene N, in welchen L und q^y die erstere als Transversale, die letztere als Seite vorkommen. Da aber q^y auch in $N(L, M)$ als Seite vorkommt, so folgt:

24. *Zwei sich schneidende Seiten der Gruppe kommen in* $n-1$ N *vor und zwar die eine Gerade als Transversale aller* $n-1$ N *und die andere als Seite der verschiedenen* N.

Lässt man y und x gleichzeitig alle möglichen Werthe annehmen, y von 1 bis n und x von 1 bis $n-2$, dann repräsentirt $N(L, m_x^y)$ $n(n-2)$ verschiedene N, in welchen L als Transversale auftritt. Ausserdem kommt sie in $N(L, M)$ ebenfalls als Transversale vor. Man erhält ferner L noch als Transversale in N, welche durch L und einer g_2 oder L und einer g_3 als Transversalen bestimmt werden. Es ist nun aber:

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)^2 + (n-1)n + 1 = (n-1)^3.$$

Oder:

25. *Eine Seite der Gruppe kommt in* $(n-1)^3$ *verschiedenen* N *als Transversale vor.*

Eine Gerade z. B. q^y wird von $n(n-1)$ andern Seiten der Gruppe geschnitten. Lassen wir diese als Transversalen auf, so müssen sie paarweise zu einander gehören, jedoch so, dass die beiden Transversalen nicht in derselben durch q^y gehenden Ebene liegen dürfen. Solcher Paare lassen sich $\frac{1}{2}n(n-1)^3$ bilden. Daraus folgt:

26. *Eine Seite der Gruppe kommt in* $\frac{1}{2}n(n-1)^3$ *verschiedenen* N *als Seite vor.*

Durch die Gerade L gehen die n Ebenen E_l^y (y von 1 bis n). In jeder Ebene liegen ausser L noch $n-1$ Seiten l_x^y (y von 1 bis $n-1$). Jede der $(n-1)^3$ Seiten der Gruppe muss aus jeder dieser n Ebenen je eine Seite schneiden und bildet so zu den n getroffenen Seiten neben L die zweite Transversale, d. h.:

27. *Die Seiten der Gruppe die eine Gerade schneiden, lassen sich* $(n-1)^3$ *mal zu je* n *unter sich windschiefen so zusammenstellen, dass sie noch eine zweite Transversale besitzen.*

Ferner erhält man:

28. *Die $n(n-1)$ Seiten, die eine Seite schneiden, lassen sich $(n-1)^2$ mal zu $n-1$ verschiedenen N zusammenstellen. Diese $n-1$ N sind je durch eine von ihnen bestimmt.*

29. *Die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)^2$ Seiten g_3, die die Seiten und Transversalen einer N nicht schneiden, bilden $\frac{1}{2}(n-2)$ mal je $(n-1)(n-2)$ unter sich je windschiefe Geraden.*

Nimmt man zu solchen $(n-1)(n-2)$ sich nicht schneidenden Seiten noch die n Seiten einer N hinzu, so folgt:

30. *Die grösste Zahl unter sich windschiefer Seiten einer nicht hyperboloidischen Gruppe G^1_{n,n,D_n} ist gleich $\alpha = (n-1)^2 + 1$.*

F. Einige Eigenschaften der hyperboloidischen Gruppen G^{Ih}_{n,n,D_n}.

Setzt man $u = n$, so sind die Zahl der Seiten und der Ebenen einer solchen Gruppe gleich $n\alpha = n((n-1)^2+1)$. Irgend zwei sich nicht schneidende Seiten L und M bestimmen n andere sie treffende Seiten q^ν als Erzeugende derselben Schaar eines Hyperboloids $H^2(L, M)$. Zu L und M gehören noch $n-2$ Seiten g_2, die mit L und M n Erzeugende der zweiten Schaar der $H^2(L, M)$ bilden. Alle übrigen Geraden der Gruppe wie die $n(n-2)$ Seiten l^ν_x, die $n(n-2)$ Seiten m^ν_x und die $n(n-2)^2$ Seiten g_2 schneiden, alle je eine Erzeugende aus beiden Schaaren des Hyperboloids.

Durch irgend zwei sich nicht schneidende Seiten der Gruppe ist ein Hyperboloid mit den auf ihm liegenden $2n$ Seiten vollständig bestimmt. Hieraus folgt:

31. a) *Zwei sich nicht schneidende Seiten kommen nur in einem Hyperboloid, also nur in einem Doppel-N^2 und nur in einem Einfachen N^1 vor.*

b) *Jede Gerade kommt in $(n-1)^2$ Doppel-N^2 vor; oder durch jede Gerade gehen $(n-1)^2$ Hyperboloide.*

c) *Aus den $n\alpha$ Seiten einer Gruppe G^{Ih}_{n,n,D_n} lassen sich $\frac{1}{2}(n-1)^2\alpha$ Doppel-N^2; $(n-1)^2\alpha$ Einfache N^1 bilden.*

d) *Eine Seite einer solchen Gruppe liegt zu je $2n$ auf $\frac{1}{2}(n-1)^2\alpha$ Hyperboloiden.*

Das Doppel-N^2 oder $H^2(L, m^\nu_x)$ besitzt $n-1$ Seiten l^ν_x, die Seite q^ν und noch $n-2$ Seiten g_2. Lässt man x von 1 bis $n-2$ variiren, dann erhält man für jeden Werth x ein Doppel-N^2, in welchen immer die zwei sich schneidenden Seiten L und q^ν vorkommen. Es repräsentirt daher $H^2(L, m^{\nu'}_x)$ für denselben Werth von ν' $n-2$ verschiedene

Hyperboloide. Alle diese Hyperboloide absorbiren $(n-2)^2$ der Geraden g_2. Da nun L und $q^{\nu'}$ sich auch auf $H^2(L, M)$ vorfinden, so folgt:

32. *Zwei sich schneidende Seiten kommen in $n-1$ verschiedenen Doppel-N^2 oder auf $n-1$ Hyperboloiden H^2 vor.*

Variirt man gleichzeitig mit x auch y von 1 bis n, dann repräsentirt jeder $H^2(L, m_x^y)$ ein Doppel-N^2, in welchen je L auftritt. Da L in $H^2(L, M)$ auch vorhanden ist, so ergiebt sich von Neuem der Satz 31 b.

Aus diesem Satze ergiebt sich sofort der folgende:

33. a) *Die $n(n-1)$ Seiten, die eine bestimmte Seite schneiden, lassen sich $(n-1)^2$ mal so zu n windschiefen zusammenstellen, dass diese auf einem Hyperboloid liegen und noch von weiteren $n-1$ Seiten geschnitten werden.*

b) *Unter den $(n-1)^2$ Doppel-N^2, die eine Seite schneiden, giebt es $n-1$ mal je $n-1$ Doppel-N^2, die keine Seite gemein haben.*

Schneiden wir die n Ebenen, sowie die $(n-1)^2$ Hyperboloide, welche durch eine bestimmte Seite gehen, mit einer beliebigen Ebene im Raume, so erhalten wir:

34. *Es lassen sich durch einen Punkt p einer Ebene n Gerade g so legen und auf jeder von diesen ausser dem Punkte p noch $n-1$ weitere Punkte s so bestimmen, dass durch den Punkt p $(n-1)^2$ Kegelschnitte k_2 so gelegt werden können, dass jeder dieser Kegelschnitte je durch einen Punkt s einer jeden Geraden g hindurchgeht und sich in jedem Punkte s je $n-1$ dieser Kegelschnitte schneiden.*

Zwei sich schneidende Seiten (L und q^{ν}) kommen in $n-1$ Doppel-N^2 vor. Solche zwei Seiten bestimmen aber eine Ebene E der Gruppe, in der im ganzen n Seiten liegen. Hieraus folgt:

35. *Jede Ebene gehört zu $\frac{1}{2}\, n(n-1)^2$ Doppel-N^2.* In jedem Doppel-N^2 giebt es jedoch n^2 Ebenen, folglich giebt es:

$$\frac{n\alpha \cdot \frac{1}{2}\, n(n-1)^2}{n^2} = \frac{1}{2}\,(n-1)^2\,\alpha$$

Doppel-N^2, was den Satz 31 c. wieder bestätigt,

Die Seiten einer Doppel-N^2 oder die $2n$ Seiten einer H^2 kommen noch in $n^2(n-1)$ weitern H^2 vor. Daraus folgt:

36. *Es giebt $\frac{1}{2}\, n(n-1)(n-2)(n-3)$ Hyperboloide, die mit einem bestimmten Hyperboloid keine Seite gemeinsam haben.*

Oder auch:

37. *Es giebt $\frac{1}{2}\,(n-2)$ Hyperboloide, die unter sich keine Seite gemein haben. Ausserdem giebt es noch weitere $\frac{1}{2}\,(n-1)(3n-4)$*

Hyperboloide, die mit keinem jener $\frac{1}{2}(n-2)$ *Hyperboloiden eine Seite gemeinsam haben.*

Ebenso findet man leicht:

38. *Es giebt immer* $\frac{1}{2}(n-2)(n-1)^2$ *Hyperboloide, die eine bestimmte Ebene der Gruppe nicht besitzen. Es giebt daher immer mehrmals* $\alpha = (n-1)^2 + 1$ *Ebenen, auf denen sämmtliche Geraden der Gruppe liegen.*

39. *Durch die Geraden der Gruppe gehen mehrmals Büschel von Flächen* α^{ten} *Grades.*

Zürich, im Jänner 1886.

Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes.

Par

Corrado Segre à Turin.

Dans l'étude de la géométrie projective des espaces à plusieurs dimensions après les variétés rationnelles normales de ∞^1 points, droites, plans, etc.*), se présentent naturellement les variétés normales elliptiques et avant tout les courbes elliptiques *normales*, c'est-à-dire les courbes C^n elliptiques qui *appartiennent***) à un S_{n-1}. Jusqu' à-présent on s'est borné par rapport à ces courbes à un simple regard, surtout sur leurs rangs et sur leurs points *singuliers* (points d'hyperosculation); on les rencontre cependant dans plusieurs travaux connus, surtout dans ceux géométriques de Clifford et de M. Veronese***) et dans ceux plus analytiques de M. Klein et de M. Bianchi†). Le but de

*) Ces variétés ont été étudiées surtout par M. Veronese et puis, avec plus de détails, par moi successivement dans les notes: *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (Atti della R. Acc. d. scienze di Torino, t. XIX), *Ricerche sui fasci di coni quadrici* (même tome), et *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani* (mêmes Atti, t. XXI); la première devra être citée dans la suite pour quelques-uns de ses résultats.

**) Si une variété est telle que l'espace (linéaire) de nombre moindre de dimensions qui la contienne soit un S_{n-1}, je dis qu'elle *appartient* à cet espace. Ainsi chaque variété appartient toujours à un seul espace.

***) V. Clifford: *On the classification of Loci* (Philosophical Transactions, 1878). — Veronese: *Behandlung der projectivischen Verhältnisse* etc. (Math. Ann. XIX).

†) Voir: Klein: *Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung* (Math. Ann. XVII); — Bianchi: *Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung* (même tome), où la théorie des fonctions elliptiques est mise en relation avec les courbes elliptiques normales des ordres 3 et 5; — et surtout Klein: *Ueber die elliptischen Normalcurven der N^{ten} Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der N^{ten} Stufe* (Abhandl. d. kgl. sächs. Gesellschaft d. W., Bd. XIII, 1885).

Je citerai encore les travaux suivants où l'on trouve étudiées avec plus on moins de détails les transformations uniformes des courbes elliptiques normales du 3e et du 4e ordre en elles-mêmes: Harnack: *Ueber die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung erster Species* u. s. w. (Math. Ann. XII); — Lange: *Ueber die 16 Wendeberührungspunkte der Raumcurve vierter Ordnung erster Species* (Zeitschrift für M. u. Ph. t. 28), pour les transformations projectives; — Ameseder:

cette note n'est pas de porter beaucoup plus loin cette théorie, mais seulement de montrer comment les ∞^1 transformations uniformes d'une C^n en elle-même, en conduisant à ∞^1 surfaces réglées rationales normales qui la contiennent, permettent d'appliquer des résultats connus sur celles-ci à l'étude de la C^n et peuvent ainsi donner des propriétés nouvelles de cette courbe.

Les deux espèces de transformations.

1. Soit une courbe elliptique normale de l'ordre n C^n d'un espace à $n-1$ dimensions S_{n-1}. En indiquant par u le paramètre d'un point mobile sur la courbe dans la représentation connue de celle-ci par des fonctions elliptiques de périodes ω_1, ω_2 (représentation dans laquelle nous supposerons que la somme constante des paramètres de n points placés sur un S_{n-2} soit nulle)*), les transformations (uniformes) de la courbe en elle-même sont données, comme l'on sait, par l'équation

$$u' \equiv \pm u + C, \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2)$$

où C est une constante quelconque. Il s'ensuit qu'il y a ∞^1 de ces transformations, de deux espèces différentes en relation avec le double signe de u; nous les appellerons respectivement *de* 1e ou *de* 2e *espèce* suivant que ce signe est $-$ ou $+$. Parmi ces transformations celles qui correspondent aux valeurs particulières

$$C \equiv \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n},$$

où λ et μ indiquent des entiers quelconques, sont les $2n^2$ transformations projectives de la courbe en elle-même. Elles se divisent en n^2 de 1e espèce et n^2 de 2e espèce; parmi ces dernières est comprise l'identité. C'est de ces transformations projectives qu'il semble qu'on se soit presque exclusivement occupé jusqu' à-présent, lorsque n est quelconque.

2. Une transformation quelconque de 1e espèce

$$u' \equiv -u + C \tag{1}$$

peut être définie géométriquement d'une façon fort simple; car, en prenant

---

Ueber Configurationen auf der Raumcurve vierter Ordnung erster Species (Wiener Ber. 1883, vol. 87); — Küpper: *Ueber die Steiner'schen Polygone auf einer Curve dritter Ordnung* u. s. w. (Math. Ann. XXIV); — Emil Weyr: *Ueber eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung* (Wien. Ber. 1883, vol. 87), et *Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlechte Eins* (Wien. Ber. vol. 88).

*) Voir surtout le travail cité de M. Klein sur les courbes elliptiques normales.

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} \equiv - C$$

l'équation (1) devient

$$u + u' + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} \equiv 0,$$

et par conséquent les deux points correspondants u, u' seront les points d'intersection variables de C^n avec les S_{n-2} d'un faisceau ayant pour base l' S_{n-3} qui passe par $n-2$ points $u_1 \cdots u_{n-2}$ de C^n (auxquels on peut en substituer $n-2$ quelconques formant un groupe résiduel d'un couple uu'), c'est-à-dire un S_{n-3} *sécant* de C^n.

Chaque transformation de 1e espèce (1) est évidemment involutive; elle a 4 points doubles qui correspondent à $2u \equiv C$, c'est-à-dire

$$u \equiv \frac{C}{2}, \frac{C}{2} + \frac{\omega_1}{2}, \frac{C}{2} + \frac{\omega_2}{2}, \frac{C}{2} + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

En d'autres termes par un S_{n-3} qui contienne $n-2$ points de C^n passent quatre S_{n-2} tangents ailleurs à cette courbe. Il va sans dire que le rapport anharmonique de ces quatre S_{n-2} ne dépend pas de l' S_{n-3} par lequel ils passent (comme l'on voit par la correspondance (2, 2) entre deux tels faisceaux de S_{n-2}, dont les S_{n-2} correspondants passent par un même point de C^n); ce rapport anharmonique est l'invariant absolu de C^n.

3. Chaque transformation de 2e espèce

$$u' \equiv u + C \tag{2}$$

peut être obtenue (d'une infinité de manières) en combinant deux transformations de la 1e espèce. Ainsi en prenant deux S_{n-3} *sécants* de C^n, en joignant un point u de C^n au premier on a un S_{n-2} qui coupe encore la courbe en un point qui joint au second donne un S_{n-2} coupant C^n en un point u', qui correspond à u dans une telle transformation.

La transformation de 2e espèce (2) ne peut évidemment pas avoir des points doubles. Elle n'est involutive, c'est-à-dire identique à son inverse $u \equiv u' + C$, que lorsque

$$C \equiv \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Il y a donc seulement 3 transformations involutives de 2e espèce; elles forment un groupe (avec l'identité). Nous les appellerons *transformations principales.* On voit que les 4 points doubles de chaque transformation de 1e espèce (n° 2) se correspondent dans ce groupe des trois transformations principales de 2e espèce: d'où l'on tire une nouvelle construction de celles-ci.

Les surfaces réglées correspondant aux transformations de 1e espèce.

4. Considérons la surface réglée lieu des droites joignant les points de C^n qui se correspondent dans une transformation de 1e espèce. Ses génératrices sont projetées (n° 2) par ∞^{n-3} S_{n-3} sécants de C^n suivant autant de faisceaux projectifs de S_{n-2}; d'où il suit qu'on peut construire cette surface réglée au moyen de $n-2$ faisceaux projectifs de S_{n-2}. Elle est donc une surface réglée rationnelle de l'ordre $n-2$ *normale*, c'est-à-dire appartenant à S_{n-1} et non décomposée.

Cette surface réglée représente la transformation à laquelle elle correspond; elle a 4 génératrices tangentes à C^n dans les 4 points doubles de cette transformation.

5. Or une surface réglée rationnelle normale est caractérisée non seulement par son ordre, mais encore par un autre nombre.*) Les surfaces réglées rationnelles normales F_2^{n-2} de S_{n-1} peuvent être en effet de différentes *espèces*, qui se distinguent entre elles par l'ordre moindre de courbes qui leur appartiennent: toutes les surfaces d'une même espèce étant d'ailleurs projectives entre elles. Toutes les courbes d'ordre $\leq n-1$ placées sur une telle surface réglée sont des courbes rationnelles normales, c'est-à-dire appartiennent à des espaces dont le nombre des dimensions est égal à leur ordre. L'ordre m de la *courbe minima* peut varier de 0 (pour les cônes) jusqu' à $\frac{n-3}{2}$ si n est impair, et jusqu' à $\frac{n}{2}-1$ si n est pair; en dehors de la courbe minima il n'y a plus sur la surface que des courbes d'ordre $\geq n-2-m$, et il y a effectivement en particulier une infinité de C^{n-2-m}. Il y a toujours une seule courbe minima, hors le cas où l'ordre m est $= \frac{n}{2}-1$, car alors il y a ∞^1 courbes minimae de l'ordre $\frac{n}{2}-1$ formant une série linéaire.

6. Cela posé, il s'agit de déterminer l'espèce de la surface réglée F_2^{n-2} qui correspond à une transformation de 1e espèce. Pour résoudre cette question supposons qu'il y ait sur cette surface une courbe rationnelle C^μ appartenant à un S_μ et rencontrant C^n en ν points (où $\nu \geq 0$): par $n-2-\mu$ de ses points différents de ces derniers passeront autant de génératrices et il y aura un S_{n-2} passant par l' S_μ et par celles-ci et coupant la F_2^{n-2} seulement en C^μ et ces $n-2-\mu$ génératrices, et en conséquence C^n seulement dans les ν points placés sur C^μ et les $n-2-\mu$ couples de points placés sur ces génératrices. Donc

*) Voir pour les propositions que j'énonce ici ma note citée *Sulle rigate razionali* etc.

$$\nu + 2(n-2-\mu) = n,$$

c'est-à-dire

$$\nu = 2\mu - n + 4. \tag{3}$$

Cette formule nous donne le nombre ν des points d'intersection des courbes d'ordre μ ($\leq n-2$) de la F_2^{n-2} avec C^n; elle nous montre qu'il doit être

$$2\mu - n + 4 \geq 0,$$

d'où

$$\mu \geq \frac{n-3}{2} \quad \text{si } n \text{ est impair,}$$

$$\mu \geq \frac{n}{2} - 2 \quad \text{si } n \text{ est pair.}$$

Ainsi pour n impair nous pouvons déjà conclure: *Si n est impair toutes les surfaces réglées F_2^{n-2} représentant les ∞^1 transformations de 1^e^ espèce de C^n ont la courbe minima de l'ordre $\frac{n-3}{2}$; cette courbe minima rencontre en un point la C^n.*

Si au contraire n est pair, pour ces surfaces la courbe minima peut être de l'ordre $\frac{n}{2} - 2$ sans points de rencontre avec C^n, ou bien de l'ordre $\frac{n}{2} - 1$ et ayant 2 points de rencontre avec C^n. Nous allons chercher pour quelles transformations se présentent alors ces deux cas.

7. Supposons donc n pair et que la surface réglée F_2^{n-2} ait une courbe minima de l'ordre $\frac{n}{2} - 2$, $C^{\frac{n}{2}-2}$, ne rencontrant pas C^n. Si sur chaque génératrice on construit le point conjugué harmoniquement à son point d'intersection avec $C^{\frac{n}{2}-2}$ par rapport au couple des points de C^n placés sur la génératrice, le lieu de ce point sera une courbe qui ne rencontrera pas $C^{\frac{n}{2}-2}$. Donc dans chaque S_{n-2} passant par $C^{\frac{n}{2}-2}$, c'est-à-dire par l' $S_{\frac{n}{2}-2}$ auquel elle appartient, et coupant en conséquence encore la F_2^{n-2} suivant $\frac{n}{2}$ génératrices, il y aura justement $\frac{n}{2}$ points de ce lieu: celui-ci est d'aprés cela une courbe de l'ordre $\frac{n}{2}$ $C^{\frac{n}{2}}$ appartenant à un $S_{\frac{n}{2}}$, qui ne coupe en aucun point l' $S_{\frac{n}{2}-2}$ nommé. Il s'ensuit que l'*involution**) ayant pour axes ces $S_{\frac{n}{2}-2}$ et $S_{\frac{n}{2}}$

*) Je nomme *involution* chaque collinéation involutive (de sorte que toutes nos collinéations de 1^e^ espèce seront des involutions). On sait qu'une involution

détermine la transformation considérée de la C^n, à laquelle correspond la surface réglée F_2^{n-2} ayant une $C^{\frac{n}{2}-2}$ pour courbe minima. Donc cette transformation n'est pas une quelconque des ∞^1 transformations de 1e espèce de C^n en elle-même, mais bien une des n^2 qui sont produites par des collinéations; ainsi:

Si n est pair pour une transformation de 1e *espèce non linéaire de C^n en elle-même la surface réglée F_2^{n-2} correspondante a ∞^1 courbes minimae de l'ordre* $\frac{n}{2} - 1$.

8. Avant de passer aux transformations linéaires que, pour le cas de n pair, il nous reste à examiner, il convient de faire quelques remarques générales sur les collinéations de 1e espèce, qui, comme nous savons, sont toutes des involutions. En général une telle involution transformant C^n en elle-même correspond à une surface réglée F_2^{n-2} qui en coupe les axes suivant deux courbes n'ayant pas (de même que ces axes) de points communs et dont les ordres ont en conséquence $n-2$ pour somme. Il s'ensuit que l'un des deux axes est l'espace auquel appartient la courbe minima, lorsqu'il y en a une seule, (ce qui a déjà été prouvé d'une autre façon dans le n0 précédent pour n pair et pourrait aussi être prouvé d'une manière analogue pour n impair) et que les deux axes contiennent deux courbes minimae $C^{\frac{n}{2}-1}$ lorsque (pour n pair) il y en a une infinité. Dans ce dernier cas les ∞^1 courbes minimae de la F_2^{n-2} se correspondent deux-à-deux dans l'involution et les $S_{\frac{n}{2}-1}$ contenant les deux courbes dont chacune correspond à soi-même sont précisément les axes de l'involution.

Maintenant pour n impair nous avons déjà le résultat suivant: *Si n est impair chacune des n^2 involutions qui transforment C^n en elle-même a pour axes un $S_{\frac{n-3}{2}}$, contenant la courbe minima de la surface réglée correspondante, et un $S_{\frac{n-1}{2}}$.*

9. En revenant à-présent au cas de n pair, il est facile de voir qu'il y a en effet parmi les n^2 involutions de 1e espèce qui transforment C^n

dans S_{n-1} a deux *axes* S_i et S_{n-2-i} ne se coupant pas et qui sont les lieux des points doubles et l'enveloppe des S_{n-2} doubles. Deux points correspondants dans l'involution se trouvent sur une droite coupant ces axes en deux points conjugués harmoniquement par rapport à ceux-là; etc. Voir, par exemple, Veronese: *Interprétations géométriques* etc., Annali di matematica, 2e série, t. XI, p. 115; et, pour une étude géométrique détaillée la note de M. Bertini (parue pendant l'impression du présent travail): *Le omografie involutorie in uno spazio lineare a qualsivoglia numero di dimensioni* (Rendiconti del R. Ist Lombardo, ser. II, vol. 19).

en elle-même de celles qui ont pour axes un $S_{\frac{n}{2}-2}$ et un $S_{\frac{n}{2}}$, et d'autres ayant pour axes deux $S_{\frac{n}{2}-1}$. Pour qu'une involution de 1° espèce ait deux axes $S_{\frac{n}{2}-2}$ et $S_{\frac{n}{2}}$, il faut évidemment que $\frac{n}{2}$ couples quelconques de points correspondants soient de C^n sur un S_{n-2} (joignant les droites qui les contiennent à l' $S_{\frac{n}{2}-2}$); tandis que cela ne peut jamais arriver si elle a deux axes $S_{\frac{n}{2}-1}$ (car un S_{n-2}, qui contiendrait $\frac{n}{2}$ droites passant par autant de couples de points correspondants de C^n, devrait aussi contenir les deux $S_{\frac{n}{2}-1}$ puisque chacun de ceux-ci est coupé par ces $\frac{n}{2}$ droites en autant de points indépendants). Or si l'involution dont il s'agit est représentée par

$$u + u' \equiv \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}, \tag{4}$$

$\frac{n}{2}$ couples de points correspondants u, u', seront sur un S_{n-2} seulement lorsque

$$\frac{n}{2}\,\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n} \equiv 0,$$

c'est-à-dire lorsque λ et μ sont pairs. Donc:

Si n est pair, parmi les n^2 involutions de 1° *espèce qui transforment C^n en elle-même il y en a $\left(\frac{n}{2}\right)^2$* (que nous appellerons *singulières*) *qui ont pour axes un $S_{\frac{n}{2}-2}$ et un $S_{\frac{n}{2}}$ et qui donnent en conséquence origine à des surfaces réglées* (*exceptionnelles*) *ayant pour courbe minima une $C^{\frac{n}{2}-2}$ de cet $S_{\frac{n}{2}-2}$; les autres $3\left(\frac{n}{2}\right)^2$ ont pour axes deux $S_{\frac{n}{2}-1}$ et elles donnent origine à des surfaces réglées ayant ∞^1 courbes minimae $C^{\frac{n}{2}-1}$, dont deux sur ces axes.*

10. Les 4 points doubles d'une transformation de 1° espèce de C^n en elle-même seront, lorsque cette transformation est linéaire, les points d'intersection de C^n avec les axes.

Donc si n est impair l'un de ces points doubles sera sur l'axe $S_{\frac{n-3}{2}}$ de l'involution et les 3 autres sur l'axe $S_{\frac{n-1}{2}}$ (n° 6). Un groupe de $\frac{n-1}{2}$ couples de points correspondants de C^n se trouve alors sur

un S_{n-2} avec l'axe $S_{\frac{n-3}{2}}$; en faisant approcher indéfiniment ce groupe au point de C^n placé sur cet axe, l' S_{n-2} a pour limite une position dans laquelle elle rencontre C^n en n points coincidents avec celui-ci. Ce point est en conséquence un des n^2 points *singuliers* (ou d'hyperosculation) et son espace osculateur passe par l'axe $S_{\frac{n-3}{2}}$. Mais aucun des 3 points de C^n placés sur l'$S_{\frac{n-1}{2}}$ n'est singulier, car l'S_{n-2} osculateur d'un de ces points, étant double dans l'involution, (et ne pouvant pas passer par l'$S_{\frac{n-1}{2}}$, qni contient 2 autre points de C^n) passe par l'$S_{\frac{n-3}{2}}$ et coupe encore C^n dans le point placé sur celui-ci. — Ainsi: *Les n^2 points singuliers de C^n pour n impair se trouvent respectivement sur les n^2 axes $S_{\frac{n-3}{2}}$ des n^2 involutions qui transforment C^n en elle-même et ont les espaces osculateurs passant aussi respectivement par ces axes.*

Soit au contraire n pair. Alors si l'involution considérée n'est pas singulière, c'est-à-dire si elle a pour axes deux $S_{\frac{n}{2}-1}$, chacun de ceux-ci contient 2 des 4 points doubles de la correspondance qu'il y a sur C^n; mais on voit facilement qu'aucun de ces 4 points n'est un point singulier. Au contraire si l'involution est singulière, c'est-à-dire si elle a pour axes un $S_{\frac{n}{2}-2}$ et un $S_{\frac{n}{2}}$, il y aura un S_{n-2} passant par l'$S_{\frac{n}{2}-2}$ et par $\frac{n}{2}$ couples de points correspondants de C^n infiniment voisins à l'un des 4 points d'intersection de cette courbe avec l'$S_{\frac{n}{2}}$ (points qui sont les 4 points doubles de la correspondance sur C^n); donc ces 4 points sont singuliers et leurs espaces osculateurs passent par l'$S_{\frac{n}{2}-2}$. — *Les n^2 points singuliers de C^n pour n pair se trouvent par quatre sur les $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ axes $S_{\frac{n}{2}}$ des $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ involutions singulières, tandis que leurs espaces osculateurs passent respectivement par les axes $S_{\frac{n}{2}-2}$ des mêmes involutions.*

Tout cela pourrait être confirmé par l'équation (4) de l'involution; car si les deux points correspondants u, u' coincident on aura pour les 4 points doubles:

$$u \equiv \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{2n} + \frac{P}{2}, \qquad (P = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2).$$

Cette formule lorsque n est impair représente un point singulier (c'est-à-dire le second membre est la n^{me} partie d'une période), quels que soient λ et μ, seulement pour une des 4 valeurs de P; et lorsque n est

pair seulement si λ et μ sont pairs (et dans ce cas pour toutes les valeurs de P). —*)

Les trois transformations principales de 2e espèce.

11. Parmi les transformations de 2e espèce nous nous bornerons dans la suite à considérer celles qui jouissent de la propriété (commune à toutes celles de 1e espèce) d'être involutives, c'est-à-dire (n° 3) les trois transformations principales

$$u' \equiv u + \frac{P}{2}. \qquad (P = \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2).$$

Si n est pair elles ont une importance remarquable; seulement dans ce cas elles proviennent de collinéations. Puisqu' elles sont involutives celles-ci seront des involutions; cherchons quels axes elles auront. Aucun de ces axes n'est rencontré par C^n, car une transformation de 2e espèce de celle-ci n'a jamais de points doubles; donc chaque S_{n-2} passant par l'un de ces axes contient $\frac{n}{2}$ couples de points de C^n et les $\frac{n}{2}$ points d'intersection des droites joignant ces couples avec l'autre axe. Ces $\frac{n}{2}$ points de cet autre axe ne peuvent pas être

*) Sur les surfaces réglées dont nous nous sommes occupés dans ce paragraphe, il convient d'ajouter quelques remarques. M. Klein a prouvé dans le mémoire cité sur les courbes elliptiques que C^n est l'intersection complète du système linéaire de $\infty^{\frac{n(n-3)}{2}-1}$ variétés quadratiques M^2_{n-2}, qui (comme l'on voit facilement en assujétissant une telle variété à passer par $2n$ points donnés *quelconques* de C^n) passe par cette courbe. Une quelconque de ces variétés et une surface réglée normale F_2^{n-2} passant par C^n ne peuvent plus se couper que dans $n-4$ génératrices. De là on peut tirer de nouveau les mêmes résultats qu'au n° 6, car une courbe C^μ de la surface réglée ($\mu \leq n-2$) étant coupée par ces génératrices en $n-4$ points de la M^2_{n-2} serait contenue dans celle-ci s'il n'était pas $2\mu \geq n-4$: donc l'ordre de la courbe minima de la F_2^{n-2} est $\frac{n-3}{2}$ pour n impair, et $\geq \frac{n}{2} - 2$ pour n pair. Réciproquement une surface réglée satisfaisant à ces conditions est coupée par une M^2_{n-2} qui en contienne $n-4$ génératrices suivant une courbe elliptique normale C^n; l'on a ainsi une nouvelle définition géométrique de cette courbe.

Je remarquerai enfin que les équations (52), (52b) du mémoire de M. Klein, si l'on y considère $p(u)$ et $p'(u)$ comme deux variables indépendantes, sont les représentations d'une surface réglée rationnelle normale F_2^{n-2} contenant C^n et ayant pour ordre de la courbe minima respectivement $\frac{n-3}{2}$ et $\frac{n-4}{2}$.

sur un $S_{\frac{n}{2}-3}$, car autrement par celui-ci et les $\frac{n}{2}$ droites passerait un S_{n-3} contenant n points de C^n, ce qui est impossible*); ils appartiendront donc à un espace de $\frac{n}{2}-2$ dimensions au moins et en conséquence l'axe sur lequel ils se trouvent (et qui ne peut pas être contenu, lui aussi, dans l'S_{n-2} que nous avons mené par l'autre) aura au moins $\frac{n}{2}-1$ dimensions. Pour la même raison cela sera vrai pour les deux axes, et comme la somme de leurs nombres de dimensions doit être $n-2$ nous concluons que *pour n pair chacune des trois transformations principales a pour axes deux* $S_{\frac{n}{2}-1}$.

On voit en même temps que la surface réglée des droites joignant les couples de points correspondants de C^n coupe chacun de ces axes suivant une courbe (qui est rencontrée par un S_{n-2} passant par l'autre en $\frac{n}{2}$ points, c'est-à-dire) de l'ordre $\frac{n}{2}$. Cette surface reglée, étant en conséquence coupée par chaque S_{n-2} passant par un axe suivant la courbe d'ordre $\frac{n}{2}$ placée sur cet axe et $\frac{n}{2}$ génératrices, sera de l'ordre n. Elle est elliptique, de même que les deux courbes de l'ordre $\frac{n}{2}$ placées sur les deux axes $S_{\frac{n}{2}-1}$**); et on peut justement l'engendrer au moyen des droites joignant les points correspondants de ces deux courbes elliptiques normales $C^{\frac{n}{2}}$ entre lesquelles il y a une correspondance uniforme *non* projective. — ***)

---

*) On peut même dire que $n-1$ points de C^n ne peuvent pas se trouver sur un S_{n-3}, car autrement ou bien la courbe serait sur un S_{n-2}, ou bien elle serait rationnelle, car chaque S_{n-2} passant par cet S_{n-3} la couperait en un seul point variable. On en tire que plus en général k points de C^n pour $k \leq n-1$ ne sont pas sur un S_{k-2}.

**) Pour s'apercevoir que cette surface réglée est elliptique et non pas rationnelle il suffit de la considérer par exemple pour $n=4$, c'est-à-dire pour la courbe biquadratique elliptique de l'espace ordinaire (dans laquelle on peut d'ailleurs toujours projeter C^n): elle est alors une surface réglée du 4e dégré elliptique à deux droites directrices doubles. Chacune des deux courbes elliptiques de l'ordre $\frac{n}{2}$ dont nous parlons ci-dessus se réduit dans ce cas à une de ces droites comptée deux fois.

***) Disons seulement un mot sur la surface réglée des droites joignant les points correspondants u, $u+C$ dans une transformation de 2e espèce quelconque (non principale). Cette surface réglée est aussi elliptique, car ses génératrices correspondent uniformement aux points u de C^n qu'elles joignent à leurs transformés

La configuration des axes des différentes involutions.

12. En voulant nous occuper des relations qu'il y a entre les involutions qui transforment la courbe elliptique C^n en elle-même et surtout entre leurs axes, remarquons avant tout que si au moyen de l'une de ces involutions on en transforme une autre on obtiendra encore une de ces involutions: donc aux axes d'une involution correspondent par rapport à une autre involution les axes d'une troisième involution, qui cependant pourrait coincider avec la première.

Considérons deux différentes involutions de 1e espèce représentées par

$$u' \equiv -u + \frac{P}{n}, \tag{5}$$

$$u' \equiv -u + \frac{P'}{n}, \tag{6}$$

où P, P' sont des périodes. En transformant la (5) par (6) elle devient

$$-u' + \frac{P'}{n} \equiv -\left(-u + \frac{P'}{n}\right) + \frac{P}{n},$$

c'est-à-dire

$$u' \equiv -u + \frac{2P' - P}{n}; \tag{7}$$

or cette nouvelle transformation ne coincide avec (5), c'est-à-dire (5) et (6) ne sont *échangeables*, que lorsque $\frac{2P'-P}{n} \equiv \frac{P}{n}$, c'est-à-dire $2\frac{P'-P}{n} \equiv 0$, $\frac{P'}{n} \equiv \frac{P}{n} + \frac{pér.}{2}$ ce qui peut arriver seulement lorsque n est pair.

De même en transformant (6) par (5) on a

$$u' \equiv -u + \frac{2P - P'}{n}, \tag{8}$$

qui pourra coincider avec (6) seulement lorsque n est pair. En outre

---

$u + C$. Elle a C^n pour courbe double, car par chaque point u passent deux génératrices qui le joignent à $u - C$ et à $u + C$. Pour avoir son ordre, cherchons combien de ses génératrices rencontrent l'S_{n-3} joignant $n-2$ points de C^n, $u_1, \ldots, u_{n-2}$, autre part que sur ceux-ci: en nommant u, $u+C$ les deux points de C^n placés sur une telle génératrice, on aura $u + (u+C) + u_1 + \cdots + u_{n-2} \equiv 0$, d'où l'on tire $2u$ et en conséquence 4 valeurs de u qui se correspondent entre elles dans le groupe des transformations principales. Ainsi nous concluons que cette surface réglée est de l'ordre $2(n-2)+4$, c'est-à-dire $2n$; et en outre nous trouvons ainsi que les 4 génératrices coupant hors de C^n un S_{n-3} sécant de celle-ci se correspondent entre elles dans le groupe des 3 transformations principales. — Cela n'est d'ailleurs qu'une généralisation d'un raisonnement que M. Harnack fait à la pag. 78 de son mémoire cité. — Parmi ces ∞^1 surfaces réglées elliptiques d'ordre $2n$ correspondant aux transformations de 2e espèce il y a, outre les trois (d'ordre n mais comptées deux fois) qui correspondent aux transformations principales, une autre remarquable qui correspond à l'identité, c'est-à-dire $C = 0$, et se compose des droites tangentes de la courbe C^n.

(7) et (8) coincident si $\frac{2P'-P}{n} \equiv \frac{2P-P'}{n}$, c'est-à-dire $3\frac{P'-P}{n} \equiv 0$, ce qui peut arriver seulement lorsque n est multiple de 3.

En transformant encore (7) et (8) respectivement par (5) et (6) on a les transformations

$$u' \equiv -u + \frac{3P-2P'}{n}, \tag{9}$$

$$u' \equiv -u + \frac{3P'-2P}{n}, \tag{10}$$

et en continuant ainsi l'on obtient, si n est premier, un système de transformations toutes différentes entre elles, qui se termine seulement avec la

$$u' \equiv -u + \frac{\frac{1}{2}(n+1)P - \frac{1}{2}(n-1)P'}{n}, \tag{11}$$

et se compose en conséquence de n transformations. On voit facilement que ce système est tel qu'en transformant l'une quelconque de ses transformations par une autre l'on obtient encore une transformation du système.

Nous supposerons justement n premier; bien que nos considérations vaillent pour n quelconque, mais alors elles conduiraient à des résultats plus compliqués. D'après ce que nous avons dit au commencement de ce n° il est évident que l'S_{n-2} joignant les axes $S_{\frac{n-3}{2}}$ des deux involutions quelconques (5) et (6) (axes qui dans ce cas de n premier ne peuvent pas être, comme on le prouverait facilement, sur un S_{n-3}) devra contenir aussi l'axe $S_{\frac{n-3}{2}}$ de (7), celui de (8), etc., c'est-à-dire tous les n axes $S_{\frac{n-3}{2}}$ des n transformations du système considéré. D'après cela, en se rappelant en outre le résultat du n° 10 pour n impair, on arrive à la proposition suivante:

Si n est premier, les n^2 axes $S_{\frac{n-3}{2}}$ des n^2 involutions qui transforment C^n en elle-même forment une configuration très-remarquable telle que chaque S_{n-2} qui en joint deux en contient n (et contient en conséquence n points singuliers de C^n). On obtient ainsi $n(n+1)$ S_{n-2}, dont chacun contient n de ces axes et tels que par chacun de ceux-ci il en passe $n+1$; ces espaces se divisent en $n+1$ groupes de n tels que les n espaces d'un même groupe contiennent tous les n^2 axes (et par suite tous les n^2 points singuliers)), de sorte que les $n+1$ espaces passant par un même axe appartiennent respectivement aux $n+1$ groupes.* —

*) M. Bianchi avait déjà remarqué (loc. cit.) que pour la C^5 elliptique normale les 25 points singuliers sont sur 6 différents groupes de 5 S_3, chacun de ces S_3 contenant 5 points singuliers.

Les n^2 axes $S_{\frac{n-1}{2}}$ des mêmes involutions forment une configuration qui correspond parfaitement à celle-là par dualité dans S_{n-1}.

En coupant cette configuration de $S_{\frac{n-3}{2}}$ et de S_{n-2} par un $S_{\frac{n+1}{2}}$ on obtient sur celui-ci une nouvelle configuration remarquable de n^2 points et $n(n+1)$ $S_{\frac{n-1}{2}}$ telle que chaque $S_{\frac{n-1}{2}}$ contient n points et par chaque point passent $n+1$ de ces espaces. En particulier pour $n=5$ l'on a dans l'espace ordinaire une configuration remarquable de 25 points et de 30 plans telle que chaque plan contient 5 points, et que ces plans forment 6 pentaèdres dont chacun contient dans ses faces tous les 25 points et que par chaque point passe un plan de chaque pentaèdre.

13. Chaque transformation (de 1^e ou de 2^e espèce) de C^n en elle-même

$$u' \equiv \pm u + C$$

est échangeable à l'une quelconque des 3 transformations principales de 2^e espèce

$$u' \equiv u + \frac{P}{2},$$

car en la transformant par celle-ci on voit bien qu'elle ne change pas. Donc en supposant n pair, comme nous ferons dorénavant dans ce paragraphe, chacune des 3 involutions principales transforme chaque involution, principale ou non, en elle-même; c'est-à-dire en combinant une involution quelconque avec une involution principale on obtient, quel que soit l'ordre de la combinaison (*multiplication*), une même troisième involution. En particulier deux involutions principales donnent pour combinaison la troisième involution principale.

Or si deux involutions sont échangeables, par rapport à chacune d'elles les axes de l'autre ou bien se correspondent entre eux ou bien se correspondent chacun à soi-même. Dans le premier cas chaque axe de l'une n'aurait aucun point (et aucun S_{n-2}) commun avec un axe de l'autre, car autrement ce point serait commun aussi à l'autre axe de celle-ci, ce qui est impossible. Dans le second cas au contraire il y aurait des points (et des S_{n-2}) communs à un axe quelconque de l'une et à un axe quelconque de l'autre: en effet sur un axe de l'une involution l'autre involution déterminerait (puisqu'il correspond à soi-même) une nouvelle involution dont les axes, lieux des points doubles, seraient justement les intersections avec les axes de la seconde involution. Ce raisonnement prouve en même temps que dans un axe d'une involution les intersections avec les axes de l'autre donnent pour somme de leurs nombres de dimensions le nombre de dimensions du premier axe diminué de l'unité, ce qui nous sera utile dans la suite.

Remarquons en outre que chaque point (ou S_{n-2}) commun à deux axes des deux différentes involutions appartient aussi à un axe de l'involution qui résulte de leur combinaison, car il est un point (ou S_{n-2}) double pour les deux premières et en conséquence aussi pour la troisième.

Maintenant si nous considérons deux involutions principales, pour voir si les axes $S_{\frac{n}{2}-1}$ de l'une coupent ou non ceux de l'autre, il suffit de chercher s'il y a des S_{n-2} communs à un axe de l'une et un axe de l'autre, et en conséquence aussi à un axe de la troisième involution principale, c'est-à-dire des S_{n-2} doubles pour les trois involutions principales. Si u est un point d'intersection d'un tel S_{n-2} avec C^n, cet espace devra contenir tout le groupe u, $u+\frac{\omega_1}{2}$, $u+\frac{\omega_2}{2}$, $u+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ transformé en soi-même par les trois involutions principales. Donc les n points d'intersection de cet espace avec C^n doivent se diviser en groupes séparés de 4, et il faut en conséquence que n soit multiple de 4. Ainsi:

Si n est de la forme $4n'+2$ chacune des trois involutions principales échange entre eux les deux axes de chacune des deux autres et ces trois couples d'axes n'ont pas de points communs. — Les droites coupant les deux axes d'une involution principale et un axe d'une autre coupent tous les axes des trois involutions principales; en d'autres termes ces trois couples d'axes $S_{\frac{n}{2}-1}$ sont sur une même variété $S_{\frac{n}{2}-1} - F_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}$ appartenant à S_{n-1} (variété qui peut toujours être considérée comme le lieu des ∞^1 $S_{\frac{n}{2}-1}$ joignant les points correspondants de $\frac{n}{2}$ droites projectives, ou bien des $\infty^{\frac{n}{2}-1}$ droites joignant les points correspondants de deux $S_{\frac{n}{2}-1}$ projectifs).

14. Si au contraire n est de la forme $n=4n'$, considérons n' groupes de points

$$u_i,\ u_i+\frac{\omega_1}{2},\ u_i+\frac{\omega_2}{2},\ u_i+\frac{\omega_1+\omega_2}{2};\qquad (i=1,\ldots,n')$$

ils seront sur un S_{n-2} si la somme de leurs paramètres est $\equiv 0$, c'est-à-dire

$$4\Sigma u_i \equiv 0,$$

d'où:

$$\Sigma u_i \equiv 0,\quad \frac{\omega_1}{4},\quad \frac{\omega_2}{4},\quad \frac{\omega_1+\omega_2}{4},$$

(les autres valeurs que l'on obtiendrait pour Σu_i n'étant pas différentes

au fond de celles-ci, car on peut les avoir en augmentant l'une des u_i de la moitié d'une période, ce qui ne change pas le groupe de 4 points correspondant). Comme on peut prendre arbitrairement $n'-1$ des u_i, on voit que les S_{n-2} doubles pour les trois involutions principales forment dans ce cas 4 différents systèmes de $\infty^{n'-1}$.

De ce fait (et même, indépendamment de cela, de tout ce que nous avons dit auparavant) on tire le résultat suivant:

Si n est doublement pair les trois couples des axes des trois involutions principales sont les $S_{\frac{n}{2}-1}$ qui joignent deux-à-deux quatre $S_{\frac{n}{4}-1}$.

Autour de la figure composée par ces 4 $S_{\frac{n}{4}-1}$, les 6 $S_{\frac{n}{2}-1}$ qui les joignent deux-à-deux et les 4 $S_{3\frac{n}{4}-1}$ qui les joignent trois-à-trois se groupent d'une certaine façon toute la configuration des points singuliers de C^n et celle des axes des différentes involutions.*)

15. En supposant encore n doublement pair, une transformation principale, par exemple

$$u' \equiv u + \frac{\omega_1}{2}$$

forme un groupe avec une involution quelconque de 1e espèce

$$u' \equiv -u + \frac{P}{n}$$

et avec l'involution, échangeable à celle-ci (n° 12),

$$u' \equiv -u + \frac{P}{n} + \frac{\omega_1}{2}.$$

Donc les points de C^n se divisent encore en groupes de 4 qui se transforment en eux-mêmes dans le groupe de ces 3 transformations. Comme la somme des paramètres de $\frac{n}{4}$ de ces groupes est $\equiv \frac{n}{4} \cdot 2\frac{P}{n} \equiv \frac{P}{2}$, il s'ensuit que ceux-ci ne peuvent appartenir à un S_{n-2}, c'est-à-dire il ne peut y avoir d'S_{n-2} passant par un axe de chaque involution, si $\frac{P}{2}$ n'est pas une période, c'est-à-dire si les deux involutions de 1e espèce considérées ne sont pas parmi les $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ singulières. Donc les couples des axes $S_{\frac{n}{2}-1}$ des autres 3 $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ involutions de 1e espèce n'ont pas de points communs avec les axes des 3 involutions principales.

*) On ne peut pas s'attendre toutefois à ce que l'involution ayant pour axes un de ces 4 $S_{\frac{n}{4}-1}$ et l'$S_{3\frac{n}{4}-1}$ opposé transforme C^n en elle-même; d'après ce que nous avons vu cela n'arrive que pour $n = 4$.

Au contraire si les deux transformations de 1e espèce appartiennent aux $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ singulières, on voit que $\frac{n}{4}$ groupes quelconques de 4 points de C^n obtenus de la manière dite se trouvent sur un S_{n-2}, qui sera en conséquence double pour les 3 transformations du groupe: on obtient ainsi un système de $\infty^{\frac{n}{4}}$ S_{n-2} doubles. Cela porte facilement à la proposition suivante:

Si n est doublement pair, par rapport à l'une des trois involutions principales les $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ involutions singulières se groupent en couples, chaque couple formant un groupe avec cette involution principale; les axes $S_{\frac{n}{2}-2}$ et $S_{\frac{n}{2}}$ des deux involutions singulières d'un couple joignent deux $S_{\frac{n}{4}-1}$ placés sur un axe $S_{\frac{n}{2}-1}$ de l'involution principale respectivement à un $S_{\frac{n}{4}-2}$ et un $S_{\frac{n}{4}}$ placés sur l'autre axe de celle-ci. — Les couples dans lesquels se décomposent ainsi les $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ involutions singulières se distinguent en deux catégories de $\left(\frac{n}{4}\right)^2$ couples qui se comportent d'une manière différente par rapport aux deux axes de l'involution principale, et dont l'une est transformée dans l'autre par chaque involution de 1e espèce non singulière.

Pour connaître encore mieux la configuration des axes des différentes involutions dans ce cas où n est doublement pair il y aurait encore à distinguer suivant que n est ou n'est pas multiple de 8. Il y aurait aussi à porter plus loin l'étude de cette configuration lorsque n n'est pas doublement pair. Mais nous nous arrêterons ici, car une étude détaillée n'est pas notre but; cependant on la ferait aisément avec les mêmes raisonnements dont nous nous sommes servis.

Applications aux courbes elliptiques de l'espace ordinaire.

16. En projetant C^n par un S_{n-5} quelconque de S_{n-1} sur l'espace ordinaire, on obtient, comme l'on sait, la courbe elliptique générale de l'ordre n, Γ^n, de cet espace. Les surfaces réglées représentant les transformations de C^n en elle-même se projetteront dans des surfaces réglées de l'espace ordinaire représentant les transformations de Γ^n en elle-même. Nous aurons en conséquence les propositions suivantes:

Dans l'espace ordinaire chaque courbe elliptique de l'ordre n, Γ^n, est contenue simplement dans ∞^1 surfaces réglées rationnelles de l'ordre $n-2$ qui correspondent aux ∞^1 transformations de 1e espèce de Γ^n en elle-même, en sorte que les génératrices d'une telle surface réglée contien-

nent les couples de points correspondants dans la transformation qui lui est relative. Pour n impair chacune de ces surfaces réglées a en général pour courbe simple minima une courbe rationnelle de l'ordre $\frac{n-3}{2}$; *pour n pair chacune de ces surfaces a* ∞^1 *courbes rationnelles minimae de l'ordre* $\frac{n}{2}-1$, *en exceptant* $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ *de ces surfaces, qui ont pour courbe minima une courbe de l'ordre* $\frac{n}{2}-2$. — *Outre ces* ∞^1 *transformations involutives de* Γ^n *en elle-même il y en a trois de 2e espèce qui donnent origine à trois surfaces réglées elliptiques de l'ordre n ayant* Γ^n *pour courbe simple rencontrée en deux points (correspondants dans la transformation) par chaque génératrice.*

Ainsi (sans nous arrêter aux cas de $n = 3, 4$, qui donnent lieu aux courbes elliptiques normales du 3e et du 4e ordre) les courbes elliptiques du 5e ordre appartiennent dans l'espace ordinaire à ∞^1 surfaces réglées cubiques et sont courbes simples pour 3 surfaces réglées elliptiques du 5e dégré. — Les courbes elliptiques du 6e ordre de l'espace ordinaire appartiennent à ∞^1 surfaces réglées rationnelles du 4e dégré; parmi elles 3 ont une droite triple comme lieu, qui est une quadrisécante de la courbe; il y en a en outre 9 ayant une droite simple directrice (triple comme enveloppe). En d'autres termes pour chaque courbe elliptique du 6e ordre il y a (outre les 3 quadrisécantes) 9 droites telles que dans chaque plan passant par l'une d'elles l'équation dont dépendent les 6 points d'intersection avec la courbe se décompose en 3 équations quadratiques. La courbe est courbe simple pour 3 surfaces réglées elliptiques du 6e dégré dont chacune est le lieu des droites joignant les points correspondants de deux cubiques planes qui soient dans une correspondance uniforme non projective. Etc.

17. Les involutions de S_{n-1} transformant C^n en elle-même nous donnent pour la projection Γ^n quelques autres propositions nouvelles et assez remarquables surtout dans les cas de $n = 5$ et 6. Ainsi:

Parmi les ∞^1 *surfaces cubiques réglées qui passent par une courbe elliptique du 5e ordre de l'espace ordinaire il y en a 25 remarquables. Pour une quelconque de celles-ci que l'on détermine sur chaque génératrice le point conjugué harmoniquement au point d'intersection avec la droite directrice simple par rapport aux deux points d'intersection avec la courbe du 5e ordre: le lieu de ce point* (qui pour une surface réglée cubique quelconque serait une cubique gauche) *sera une conique, de sorte que les points de la courbe sont deux-à-deux séparés harmoniquement par la droite directrice et le plan de cette conique. En d'autres termes une courbe elliptique du 5e ordre est de 25 manières différentes symétrique par rapport à une droite et un plan.*

Parmi les ∞^1 surfaces réglées rationnelles du 4e dégré qui passent par une courbe elliptique du 6e ordre de l'espace ordinaire il y en a, outre celles nommées au n^0 précédent, 27 remarquables. Pour une quelconque de celles-ci, de même que pour chacune des trois surfaces réglées elliptiques du 6e dégré, deux points de la courbe qui soient sur une même génératrice sont séparés harmoniquement par deux plans fixes (c'est-à-dire par les points de rencontre de la génératrice avec deux coniques fixes de la surface du 4e dégré ou avec deux cubiques planes fixes de la surfaces du 6e dégré). En d'autres termes une courbe elliptique du 6e ordre est de 27 + 3 manières différentes symétrique par rapport à un couple de plans. Etc. etc.

Un théorème sur les surfaces réglées elliptiques.

18. Nous finirons en établissant une proposition sur les surfaces réglées elliptiques, qui, bien qu'elle ne soit pas très-liée avec ce qui précède, a cependant une certaine relation avec le but de cette note, car elle exige dans la démonstration que nous en donnerons la considération des transformations des courbes elliptiques normales en elles-mêmes.

Supposons que dans une transformation de la courbe elliptique normale en elle-même

$$u' \equiv \pm u + C$$

à [un groupe particulier de points situés sur un S_{n-2}, $u_1, \ldots, u_n$, corresponde un groupe $u_1', \ldots, u_n'$ de points d'un S_{n-2}. On aura:

$$u_1 + \cdots + u_n \equiv 0,$$
$$u_1' + \cdots + u_n' \equiv 0,$$
$$u_1' \equiv \pm u_1 + C, \ \ldots, \ \ u_n' \equiv \pm u_n + C,$$

d'où en sommant

$$nC \equiv 0,$$
$$C \equiv \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}.$$

Donc la transformation sera une collineation.*)

De là il suit immédiatement que si deux courbes elliptiques normales A^n, B^n de deux espaces S_{n-1}, S_{n-1}' ont leurs points dans une correspondance uniforme telle qu'aux points d'intersection de A^n avec un certain S_{n-2} de S_{n-1} correspondent les points d'intersection de B^n avec un S_{n-2} de S_{n-1}', cette correspondance entre A^n et B^n est déterminée par une collinéation entre S_{n-1} et S_{n-1}'.

*) Pour $n=3$ voir la démonstration synthétique de M. Küpper à la pag. 32 du travail déjà cité de ce savant.

19. Maintenant supposons que l'on ait dans un espace S_n une surface réglée elliptique de l'ordre n. Deux espaces S_{n-1}, S'_{n-1} de S_n la couperont suivant deux courbes elliptiques normales A^n, B^n. En considérant sur celles-ci comme correspondants deux points placés sur une même génératrice, on voit qu'il y a entre leurs points une correspondance uniforme dans laquelle les n points de l'S_{n-2} d'intersection de S_{n-1}, S'_{n-1} se correspondent à eux-mêmes. Donc, en force de ce que nous avons prouvé au n° précédent, cette correspondance sera déterminée par une collinéation entre S_{n-1}, S'_{n-1}; et comme il y a n points indépendants doubles pour cette collinéation dans l'S_{n-2} d'intersection, tous les points de celui-ci seront des points doubles et la collinéation sera en conséquence une perspective par rapport à un centre, c'est-à-dire les droites joignant deux points correspondants de S_{n-1}, S'_{n-1}, et en particulier de A^n, B^n passeront par un point fixe. Donc la surface réglée est un cône. Ainsi:

*Il n'y a pas de surfaces réglées elliptiques de l'ordre n appartenant à un espace à n dimensions, en dehors des cônes projetant les courbes elliptiques normales.**)

D'après cela nous pouvons dire maintenant de connaître parfaitement quelles sont les surfaces à deux dimensions de l'ordre n qui appartiennent à un S_n. M. Del Pezzo avait déjà prouvé**) que celles qui appartiennent à un S_{n+1} sont les surfaces réglées rationnelles normales et en outre, pour $n = 4$, une certaine surface non réglée du 4e ordre de l'espace à 5 dimensions. Un raisonnement semblable à celui par lequel il était parvenu à ce résultat prouve (ce qu'il a bien remarqué et qui n'est aussi qu'un cas particulier d'une proposition générale qu'il va publier) que les surfaces de l'ordre n de S_n, en dehors de certaines exceptions particulières, sont réglées. Or ces surfaces réglées peuvent être rationnelles ou elliptiques. Celles rationnelles sont connues, comme projections des surfaces réglées rationnelles normales de l'ordre n de S_{n+1}; et quant à celles elliptiques nous avons vu que, comme elles sont des cônes, leur étude se réduit à celui des courbes elliptiques normales.

Turin, Janvier 1886.

---

*) Un raisonnement analogue pourra servir, à ce qu'il semble, pour établir une proposition plus générale rélativeà des surfaces réglées de genre quelconque.

**) *Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di n + 1 dimensioni.* Rendiconti della R. Acc. d. scienze fis. e mat. di Napoli, settembre 1885.

Untersuchungen über die algebraische Transformation der hypergeometrischen Functionen.

Von

ERWIN PAPPERITZ in Dresden.

Bereits von Euler und Gauss in Angriff genommen, allgemein formulirt durch Herrn Kummer, hat das *Transformationsproblem der hypergeometrischen Functionen* seither mehrfache Behandlung erfahren, insbesondere in neuester Zeit von Seiten des Herrn Goursat.*) Indess beschränkte man sich auf die Betrachtung der *rationalen* Transformationen. — Die vorliegende Untersuchung bezweckt, Beiträge zu einer *allgemeinen Theorie der algebraischen Transformation* zu geben.

Den „hypergeometrischen Functionen" (Riemann'schen P-Functionen) werden hier alle diejenigen Functionen zugezählt, welche einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{\alpha+\alpha'-1+(\beta+\beta'+1)x}{x(1-x)} \cdot \frac{dP}{dx} + \frac{\alpha\alpha' - (\alpha\alpha'+\beta\beta'-\gamma\gamma')x + \beta\beta' x^2}{x^2(1-x)^2} \cdot P = 0$$

mit reellen, an die Bedingung:

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

geknüpften Coefficienten genügen, oder doch durch eine lineare Substitution der Veränderlichen x auf Lösungen dieser Differentialgleichung reducibel sind.

Unseren Betrachtungen liegt der Gesichtspunkt zu Grunde, dass die Transformationstheorie der hypergeometrischen Functionen wesentlich identisch ist mit der der *Schwarz'schen Function* $s(\lambda, \mu, \nu, x)$,

*) Man vergl. Kummer, Ueber die Gauss'sche Reihe etc., Crelle's Journal Bd. 15, (1836); Riemann, Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Transcendenten, Abh. d. Ges. d. Wiss. z. Göttingen, Bd. 7, (1857); Goursat, Sur l'équation différentielle linéaire, qui admet pour intégrale la série hypergéométrique, Ann. de l'Ecole Norm. Supplém. (1881), Sur les intégrales rationelles de l'équation de Kummer, Math. Ann. Bd. 24, (1884), Recherches sur l'équation de Kummer, Acta Soc. Scient. Fennicae, tom. XV, (1885).

d. i. des Quotienten zweier linear unabhängiger Zweige der P-Function, in welcher $\lambda = \alpha - \alpha'$, $\mu = \beta - \beta'$, $\nu = \gamma - \gamma'$ zu setzen ist. Demgemäss bildet den Ausgangspunkt die Eigenart der durch die s-Function vermittelten *conformen Abbildung*, wie sie aus den Untersuchungen des Herrn Schwarz*) bekannt ist. Die weiterhin zu benutzenden Principien entstammen dem Ideenkreise Riemann's und sind im Grunde dieselben, welche Herr Klein erfolgreich auf die Theorie der Transformation der elliptischen Functionen in Anwendung gebracht hat. Vornehmlich ist es das Hülfsmittel der *Riemann'schen Fläche* in einer von der sonst gebräuchlichen etwas abweichenden Form, auf welches wir hier Bezug nehmen.

Der hauptsächliche Inhalt der Artikel I und IV war Gegenstand einer vorläufigen Mittheilung an die Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften (Berichte der Math.-Phys. Classe v. 2. Febr. 1885).

I.

Die Diophantischen Bedingungen des Transformationsproblems.

Bezeichnet man abkürzend mit $[s]_x$ die Differentialinvariante:

$$\frac{\frac{d^3s}{dx^3}}{\frac{ds}{dx}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2s}{dx^2}}{\frac{ds}{dx}}\right)^2$$

und mit $R(\lambda, \mu, \nu, x)$ die rationale Function:

$$R = \frac{1 - \lambda^2 + (\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - 1)x + (1 - \mu^2)x^2}{2x^2(1-x)^2},$$

so kann das in Betracht genommene Transformationsproblem folgendermassen ausgesprochen werden:

Es sollen alle algebraischen Gleichungen:

(1) $$f(x, y) = 0$$

aufgestellt werden, welche den Uebergang von einer Differentialgleichung:

(2) $$[s]_x = R(\lambda, \mu, \nu, x)$$

zu einer Differentialgleichung derselben Form:

(3) $$[s]_y = R(\lambda', \mu', \nu', y)$$

vermitteln, mithin Integralgleichungen der Kummer'schen Differentialgleichung:

(4) $$[x]_y + R(\lambda, \mu, \nu, x) \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = R(\lambda', \mu', \nu', y)$$

darstellen.

---

*) S. Crelle's Journal, Bd. 75.

Als ein erster Schritt zur Beantwortung der aufgeworfenen Frage wird die Lösung der Aufgabe zu betrachten sein, die fraglichen algebraischen Transformationsgleichungen der Art nach, d. h. durch die *Verzweigung der zugehörigen Riemann'schen Fläche* zu definiren. In zweiter Linie wird sich dann die Untersuchung auf ihre *explicite Darstellung* beziehen müssen. Wir beschäftigen uns hier vornehmlich mit dem erstgenannten Theile des Problems.

Die Gleichung (1) werde als *irreducibel* vorausgesetzt; ihr Grad in x und y sei resp. durch n' und n, ihr Geschlecht durch p bezeichnet. Ueber der x- und y-Ebene wollen wir uns dementsprechend die zugehörige Riemann'sche Fläche mit n resp. n' Blättern ausgebreitet denken.

Aus der dreifach unendlichen Schaar particulärer Integrale der Differentialgleichung (2) greifen wir jetzt irgend ein bestimmtes:

$$\mathfrak{z}(\lambda, \mu, \nu, x)$$

heraus, durch welches sich bekanntlich alle anderen in der Form:

$$\frac{c_1 \mathfrak{z} + c_2}{c_3 \mathfrak{z} + c_4} = \mathfrak{z}'$$

mit Hülfe constanter Coefficienten c_i ausdrücken lassen. Bedeuten dann

$$x = \varphi_h(y), \quad h = 1, 2, \ldots, n'$$

die Auflösungen der Gleichung (1) nach x, so gehen durch Substitution derselben aus $\mathfrak{z}(x)$ n' bestimmte particuläre Integrale der Differentialgleichung (3) hervor, welche im Allgemeinen von einander verschieden sein werden. Da indess $f(x, y) = 0$ als irreducibel vorausgesetzt wurde, so kann von den Functionen $\varphi_h(y)$, weil sie sämmtlich Zweige einer und derselben algebraischen Function sind, jede in jede andere dadurch übergeführt werden, dass man y in seiner Ebene geeignete geschlossene Wege beschreiben lässt. Mithin hat die Irreducibilität der Transformationsgleichung auch zur Folge, dass die transformirten Werthe $\mathfrak{z}(\varphi_h(y))$ der Function $\mathfrak{z}(\lambda, \mu, \nu, x)$ als Functionen von y sämmtlich Zweige einer und derselben bestimmten Integralfunction:

$$\mathfrak{z}'(\lambda', \mu' \nu', y)$$

der Differentialgleichung (3) darstellen, welche untereinander durch solche lineare Substitutionen zusammenhängen, wie sie geschlossenen Wegen der Variablen y entsprechen. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass völlig analoge Betrachtungen bezüglich der inversen Transformation Platz greifen.

Nach dem Gesagten besteht unter Vermittelung der Gleichung (1) die identische Gleichung:

$$\mathfrak{z}(\lambda, \mu, \nu, x) = \mathfrak{z}'(\lambda', \mu', \nu', y).$$

Wir verabreden, dass im Folgenden überall für die Variable s der

veränderliche Werth der linken oder rechten Seite der letzten Gleichung genommen werden soll, und ferner, dass überall da, wo von den *Umkehrfunctionen:*

$$x = \mathfrak{x}(s), \quad y = \mathfrak{y}(s)$$

gesprochen wird, unter dieser Bezeichnung diejenigen Functionen verstanden werden sollen, welche aus der Umkehrung der Gleichungen:

$$s = \mathfrak{s}(\lambda, \mu, \nu, x), \quad s = \mathfrak{s}'(\lambda', \mu', \nu', y)$$

entspringen. Diese Gleichungen werden im Allgemeinen nicht als unbeschränkt umkehrbar betrachtet werden dürfen; es genügt aber vorauszusetzen, dass die Umkehrfunctionen für einen gewissen endlichen Bereich der Variablen s erklärt seien, über welchen hinaus sie bis zu etwa vorhandenen natürlichen Grenzen analytisch fortgesetzt gedacht werden mögen.

Man betrachte jetzt in der s-Ebene ein Gebiet S, welches aus $2n$ Kreisbogendreiecken (λ, μ, ν) mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ besteht, die ihrerseits vermöge der conformen Abbildung durch die Beziehung $s = \mathfrak{s}(\lambda, \mu, \nu, x)$ abwechselnd der positiven und negativen Halbebene (x) entsprechen. Dieses Gebiet S werde dadurch erzeugt, dass man zunächst zwei zusammengenommen der ganzen x-Ebene entsprechende Dreiecke (λ, μ, ν) herausgreift, zu einem symmetrischen Kreisbogenviereck vereinigt und zu diesem Ausgangsviereck noch $n - 1$ „äquivalente" aufsucht. Als äquivalent werden aber hierbei je zwei Gebiete bezeichnet, die auseinander durch solche lineare Substitutionen der Variablen s hervorgehen, welche die Umkehrfunction $\mathfrak{x}(s)$ ungeändert lassen. Das Gebiet S, welches an sich kein zusammenhängendes zu sein braucht und überdies eventuell die s-Ebene in gewisser Ausdehnung mehrfach überdecken kann, denke man sich weiterhin noch längs eines gewissen Liniensystems zerschnitten. Dieses Liniensystem sei vorläufig nur durch die Eigenschaft charakterisirt, dass, wenn l eine Linie desselben bedeutet, auch alle zu l äquivalenten, innerhalb S verlaufenden Linien dem Systeme angehören sollen. Das derart zerschnittene Gebiet S hat offenbar die Eigenschaft, dass sich seine Randcurven einander paarweise durch lineare s-Substitutionen zuweisen lassen, welche $\mathfrak{x}(s)$ in sich überführen. Vermöge einer solchen Zuordnung der Randcurven unter sich repräsentirt S in abstracto eine *geschlossene Mannichfaltigkeit* Σ von bestimmtem, eventuell mehrfachem Zusammenhang.

Unsere Voraussetzung geht dahin, dass diese Mannichfaltigkeit Σ genau der über der x-Ebene zu construirenden n-blättrigen Riemann'schen Fläche entspreche, mithin auch ausnahmslos eindeutig auf die n'-blättrige y-Fläche bezogen sei. Hieraus folgt auf Grund des Schwarz'schen Satzes, dass das Polygon S einem aus $2n'$ (abwechselnd der positiven und negativen Halbebene (y) entsprechenden)

Kreisbogendreiecken (λ', μ', ν') zusammengesetzten Polygone S' äquivalent ist. Die Dreiecke des letzteren werden nämlich das Gebiet S in solcher Weise einfach erfüllen, dass die am Rande liegenden Dreiecke eventuell zerstückt erscheinen, die getrennten Theile eines und desselben Dreiecks aber ihren Zusammenhang durch Vereinigung der zugeordneten Randcurven von S erlangen.

Indem wir so in der geschlossenen, zweierlei Dreiecksnetze S und S' tragenden Mannichfaltigkeit Σ ein Aequivalent für die über der x- resp. y-Ebene auszubreitenden Riemann'schen Flächen gewonnen haben, gelingt es, die Eigenschaften der letzteren und damit die Natur der zwischen x und y vorausgesetzten algebraischen Beziehung zu erschliessen.

Zuerst bemerkt man, dass y in Bezug auf x und umgekehrt x in Bezug auf y nur an solchen Stellen verzweigt sein kann, wo wenigstens eine der Variabeln x und y einen der singulären Werthe $0, \infty, 1$ annimmt. Sind nämlich x_0 und y_0 beide von $0, \infty, 1$ verschieden, so lasse man s in seiner Ebene um den zugehörigen Punkt s_0 eine geschlossene Curve einfach durchlaufen, welche keinen Eckpunkt der Dreiecksnetze S und S' umgiebt. Nach dem Schwarz'schen Satze folgt dann, dass gleichzeitig x und y nach einfacher Umkreisung von x_0 resp. y_0 zum Ausgangswerthe zurückkehren.

Von den Werthepaaren, welche hiernach für die Untersuchung der Verzweigung beider Riemann'scher Flächen allein in Betracht kommen, sind die Combinationen der Werthe $x = 0, \infty, 1$ mit den Werthen $y = 0, \infty, 1$, welche $f(x, y) = 0$ befriedigen, gesondert zu behandeln. Sie mögen als *Verzweigungswerthe* 1. *Art* bezeichnet sein. Nach Ausschluss derselben mag die Gleichung $f(x,y)=0$ für $x=0,\infty,1$ noch resp. r, s, t unter sich verschiedene y-Werthe: $y = \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$; $\eta_1', \ldots, \eta_s'$; $\eta_1'', \ldots, \eta_t''$, für $y = 0, \infty, 1$ dagegen resp. r', s', t' verschiedene x-Werthe: $x = \xi_1, \ldots, \xi_{r'}$; $\xi_1', \ldots, \xi_{s'}'$; $\xi_1'', \ldots, \xi_{t'}''$ als Wurzeln zulassen. Diese bilden die *Verzweigungswerthe* 2. *Art*.

Einem Werthepaare 2. Art, z. B. $x = 0$, $y = \eta_t$, entspricht in Σ ein Punkt s_0, welcher Eckpunkt des Netzes S, nicht aber Eckpunkt von S' ist. Ist nun α die kleinste Anzahl von Umläufen um s_0, welche der Punkt s machen muss, damit x zu seinem Ausgangswerthe zurückkehre, so wird wegen der Conformität der Beziehung zwischen den Ebenen (s) und (y) im fraglichen Punkte zum gleichen Ende auch y den Punkt η_t α-mal umkreisen müssen. Hieraus folgt, dass die Summe der am Punkte s_0 von Σ liegenden Dreieckswinkel des Netzes S gleich $2\alpha\pi$ sein muss. Ihre Anzahl ist dabei nothwendig eine gerade $=2\varrho$. Für unser Beispiel ist die Grösse der in Betracht kommenden Dreieckswinkel durch $\lambda\pi$, ihre Anzahl durch $\frac{2\alpha}{\lambda}$ gegeben und folglich muss λ

gleich der rationalen Zahl $\frac{\alpha}{\varrho}$ sein. Offenbar sind α und ϱ relativ prim und bedeuten die Anzahlen der im Punkte $x = 0$, $y = \eta_i$ in der y- resp. x-Fläche cyklisch zusammenhängenden Blätter.

Wir setzen:

$$(5) \qquad \lambda = \frac{\alpha}{\varrho}, \quad \mu = \frac{\beta}{\sigma}, \quad \nu = \frac{\gamma}{\tau},$$
$$\lambda' = \frac{\alpha'}{\varrho'}, \quad \mu' = \frac{\beta'}{\sigma'}, \quad \nu' = \frac{\gamma'}{\tau'}$$

und erkennen im Verfolg obiger Schlussweise, dass die Grössen α, β, γ, α', β', γ' und ϱ, σ, τ, ϱ', σ', τ' positive*) ganze Zahlen (die letzteren > 1) darstellen, sofern nicht die ihnen entsprechenden Zahlen r, s, t, r', s', t' Null sind.

Das Resultat der auf die Werthepaare 2. Art bezüglichen Ueberlegungen bringen wir in die folgende Uebersicht.

Es hängen im Cyklus zusammen:

in der x-Fläche

bei:

$x = 0$	r-mal ϱ Blätter	
$x = \infty$	s „ σ „	
$x = 1$	t „ τ „	
$x = \xi_1$ … $x = \xi_{r'}$	je α' Blätter	Die übrigen Blätter verlaufen an diesen Stellen isolirt.**)
$x = \xi'_1$ … $x = \xi'_{s'}$	„ β' „	
$x = \xi''_1$ … $x = \xi''_{t'}$	„ γ' „	

in der y-Fläche

bei:

$y = 0$	r'-mal ϱ' Blätter
$y = \infty$	s' „ σ' „
$y = 1$	t' „ τ' „

*) Die Exponenten λ, μ, ν, λ', μ', ν' können unbeschadet der Allgemeinheit positiv angenommen werden, da die Differentialgleichungen nur ihre Quadrate enthalten.

**) Ausnahmen hiervon können nur eintreten, wenn irgend ein $\xi_i = \xi'_k$ oder $= \xi''_l$ wird; doch sind derartige exceptionelle Vorkommnisse auf die gegenwärtige Betrachtung ohne Einfluss.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} y=\eta_1 \\ \cdots\cdots \\ y=\eta_r \end{array}\right\} \text{ je } \alpha \text{ Blätter} \\ \left.\begin{array}{l} y=\eta_1' \\ \cdots\cdots \\ y=\eta_s' \end{array}\right\} \text{ „ } \beta \text{ „} \\ \left.\begin{array}{l} y=\eta_1'' \\ \cdots\cdots \\ y=\eta_t'' \end{array}\right\} \text{ „ } \gamma \text{ „} \end{array}\right\} \text{Die übrigen Blätter verlaufen an diesen Stellen isolirt.}$$

Es blieben noch die Werthepaare 1. Art unberücksichtigt. Greift man eines derselben, z. B. $x=0$, $y=0$ heraus, so werden ihm innerhalb Σ eine gewisse Anzahl ε von Punkten entsprechen, welche gleichzeitig Eckpunkte beider Dreiecksnetze S und S' sind. Die anliegenden Dreieckswinkel besitzen für das betrachtete Beispiel die Grösse $\lambda\pi$, resp. $\lambda'\pi$. Stossen nun im i^{ten} Punkte dieser Art resp. $h^{(i)}$ Dreiecke (λ, μ, ν) und $k^{(i)}$ Dreiecke (λ', μ', ν') zusammen, so hat man nothwendig:

$$h^{(i)} \cdot \lambda = k^{(i)} \cdot \lambda', \qquad i=1,2,\ldots,\varepsilon;$$

mithin:

$$\alpha\varrho' h^{(i)} \equiv 0 \pmod{\alpha'\varrho}$$

und, wenn

$$\sum_i h^{(i)} = \delta, \quad \sum_i k^{(i)} = \delta'$$

gesetzt wird:

$$\lambda'\delta' = \lambda\delta.$$

Analoge Resultate ergeben sich für die übrigen Werthepaare 1. Art. Diesen werden daher im Allgemeinen (wenn nämlich die Exponenten des zugeordneten Paares λ, λ', etc. ungleich sind) Windungspunkte der Riemann'schen Flächen entsprechen. Um ihre Zugehörigkeit zu den Combinationen der Werthe $x=0, \infty, 1$, $y=0, \infty, 1$ anzudeuten, wollen wir uns den eingeführten Zahlen ε, $h^{(i)}$, $k^{(i)}$, δ, δ' doppelte untere Indices ertheilt denken. Werden dann die dem einzelnen Werthepaare zuzuweisenden Indices nach Massgabe folgender Tabelle:

	$x=0$	$x=\infty$	$x=1$
$y=0$	1, 1	2, 1	3, 1
$y=\infty$	1, 2	2, 2	3, 2
$y=1$	1, 3	2, 3	3, 3

gewählt, so bestehen zwischen den Anzahlen δ_{ik} und δ'_{ik} bei der den

Werthepaaren 1. Art in der x- resp. y-Fläche in Betracht kommenden Blätter folgende Gleichungen:

$$(6)\qquad \begin{array}{lll} \lambda\delta_{11}=\lambda'\delta'_{11}, & \mu\delta_{21}=\lambda'\delta'_{21}, & \nu\delta_{31}=\lambda'\delta'_{31}, \\ \lambda\delta_{12}=\mu'\delta'_{12}, & \mu\delta_{22}=\mu'\delta'_{22}, & \nu\delta_{32}=\mu'\delta'_{32}, \\ \lambda\delta_{13}=\nu'\delta'_{13}, & \mu\delta_{23}=\nu'\delta'_{23}, & \nu\delta_{33}=\nu'\delta'_{33}. \end{array}$$

Ueber die Art der Vertheilung der Blätter in Cyklen oder, was gleichbedeutend ist, über die Zerlegung der Zahlen $\delta_{11}, \delta_{12}, \ldots, \delta'_{33}$ in ihre Summanden $h^{(i)}_{11}, h^{(i)}_{12}, \ldots, k^{(i)}_{33}$ ist dagegen von vornherein Nichts bekannt. — Die Gesammtzahl der fraglichen Cyklen sei mit

$$q=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}+\cdots+\varepsilon_{33}$$

bezeichnet.

Wir setzen schliesslich:

$$(7)\qquad \begin{array}{ll} \delta_{11}+\delta_{12}+\delta_{13}=a, & \delta'_{11}+\delta'_{21}+\delta'_{31}=a', \\ \delta_{21}+\delta_{22}+\delta_{23}=b, & \delta'_{12}+\delta'_{22}+\delta'_{32}=b', \\ \delta_{31}+\delta_{32}+\delta_{33}=c, & \delta'_{13}+\delta'_{23}+\delta'_{33}=c', \end{array}$$

und heben als eine Folge der Gleichungen (6) die Relation:

$$(8)\qquad a\lambda+b\mu+c\nu=a'\lambda'+b'\mu'+c'\nu'$$

hervor.

Auf Grund des Bisherigen hat man für die Gesammtzahlen n und n' der Blätter beider Riemann'scher Flächen die Zerlegungen:

$$(9)\qquad \begin{array}{l} n=a+r\varrho=b+s\sigma=c+t\tau, \\ n'=a'+r'\varrho'=b'+s'\sigma'=c'+t'\tau', \end{array}$$

überdies aber die Ungleichungen:

$$(10)\qquad a+b+c\geqq q, \qquad a'+b'+c'\geqq q,$$

$$(11)\qquad \alpha,\beta,\gamma\leqq n', \qquad \alpha',\beta',\gamma'\leqq n.$$

Drückt man weiter das Geschlecht p nach bekannter Formel durch die Blätterzahl und die Multiplicitäten der Verzweigungspunkte aus, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (7) und (9):

$$(12)\qquad \begin{array}{l} 2p+q-2=n-r-s-t+r'(\alpha'-1)+s'(\beta'-1)+t'(\gamma'-1), \\ 2p+q-2=n'-r'-s'-t'+r(\alpha-1)+s(\beta-1)+t(\gamma-1). \end{array}$$

Schliesslich stellen wir zu weiterem Gebrauche noch eine Reihe von Relationen zusammen, welche algebraische Folgen der bereits angegebenen sind:

$$(13)\qquad n(1-\lambda-\mu-\nu)=n'(1-\lambda'-\mu'-\nu');$$

$$(14)\qquad 3n\geqq q, \qquad 3n'\geqq q;$$

$$(15)\qquad \begin{array}{l} r(\varrho-3)+s(\sigma-3)+t(\tau-3)\leqq 6p+2q-6, \\ r'(\varrho'-3)+s'(\sigma'-3)+t'(\tau'-3)\leqq 6p+2q-6; \end{array}$$

$$(16)\qquad \begin{aligned} n - r - s - t &\leqq 2p + q - 2, \\ n' - r' - s' - t' &\leqq 2p + q - 2; \end{aligned}$$

$$(17)\qquad \begin{aligned} a + r(\varrho - 2) + b + s(\sigma - 2) &\leqq 2(t + 2p + q - 2), \\ a' + r'(\varrho' - 2) + b' + s'(\sigma' - 2) &\leqq 2(t' + 2p + q - 2). \end{aligned}$$

Die Gleichung (13) ergiebt sich durch Elimination von r, s, t, r', s', t' aus (9) und (12) mit Berücksichtigung von (8). — Eliminirt man $a, b, \ldots, c'$ aus (9) und (10), so folgt:

$$\begin{aligned} 3n - r\varrho - s\sigma - t\tau &\geqq q, \\ 3n' - r'\varrho - s'\sigma' - t'\tau' &\geqq q. \end{aligned}$$

Diese Relationen lassen einerseits unmittelbar die Geltung der Ungleichungen (14) erkennen, andererseits ergeben sie in Verbindung mit (12) durch Elimination von n und n':

$$\begin{aligned} r(\varrho - 3) + s(\sigma - 3) + t(\tau - 3) + 3r'(\alpha' - 1) + 3s'(\beta' - 1) \\ + 3t'(\gamma' - 1) \leqq 6p + 2q - 6, \\ r'(\varrho' - 3) + s'(\sigma' - 3) + t'(\tau' - 3) + 3r(\alpha - 1) + 3s(\beta - 1) \\ + 3t(\gamma - 1) \leqq 6p + 2q - 6, \end{aligned}$$

also a fortiori die Ungleichungen (15). Die Relationen (16), welche directe Folgen der Gleichungen (12) sind, liefern endlich mit den aus (9) abgeleiteten Gleichungen:

$$\begin{aligned} a + r\varrho + b + s\sigma &= 2n, \\ a' + r'\varrho' + b' + s'\sigma' &= 2n' \end{aligned}$$

durch Addition verbunden, die Ungleichungen (17).

Wir wollen jetzt der *exceptionellen Fälle* gedenken, bei denen der in den Gleichungen (5) gemachte Ansatz keine oder doch nur theilweise Anwendung findet. Derlei Ausnahmen treten ein, so oft von den singulären Werthen x, $y = 0, \infty, 1$ irgend zwei solche Elemente, welche zusammen ein Werthepaar 1. Art constituiren, einzeln keinem Werthepaare 2. Art angehören. Den Grund davon können zwei verschiedene Eventualitäten bilden, welche sogleich näher gekennzeichnet werden sollen.

A) Unter den Exponenten der zu transformirenden s-Function mag einer oder mehrere als *willkürlich* (insbesondere als irrationaler Werthe fähig) vorausgesetzt werden. Es sei λ ein solcher Exponent, so ist klar, dass der zugehörige singuläre Werth $x = 0$ keinem Werthepaare 2. Art angehören kann. Die n Wurzeln der Gleichung $f(0, y) = 0$ können daher nur unter den Werthen $y = 0, \infty, 1$ gesucht werden und zwar wird:

$$f(0, y) = C \cdot y^{\delta_{11}}(y - 1)^{\delta_{13}}, \quad \delta_{11} + \delta_{13} = n - \delta_{12},$$

sofern wir, wie bisher, unter δ_{11}, δ_{12}, δ_{13} die Multiplicitäten dieser Wurzeln verstehen. Da letztere nicht sämmtlich $= 0$ sein können, sei etwa δ_{11} von Null verschieden und $x = 0$ eine δ'_{11}-fache Wurzel von $f(x, 0) = 0$; so hat man nothwendig:

$$\lambda' = \frac{\delta_{11}}{\delta'_{11}} \lambda .$$

Es wird also λ' dem willkürlichen Parameter λ bis auf einen rationalen Zahlenfactor $\frac{\delta_{11}}{\delta'_{11}}$ gleich und $y = 0$ kann ebenfalls keinem Werthepaare 2. Art angehören. Ist über diesen Zahlenfactor passend verfügt, so ist zugleich die Zerlegung einer der Zahlen δ_{11} und δ'_{11} in Summanden (welche der Vertheilung der für die Werthecombination $x = 0$, $y = 0$ in der x- resp. y-Fläche in Betracht kommenden Blätter in Cyklen entspricht) durch die Zerlegung der anderen mitbestimmt. Denn ist:

$$\delta_{11} = \sum_i h_{11}^{(i)}, \quad \delta'_{11} = \sum_i k_{11}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, \varepsilon_{11},$$

so muss jetzt einzeln:

$$k_{11}^{(i)} = h_{11}^{(i)} \cdot \frac{\delta'_{11}}{\delta_{11}}$$

sein. — Analoges gilt für die weiteren etwa vorhandenen exceptionellen Werthepaare 1. Art.

Im Uebrigen müssen auch hier die Diophantischen Grundbedingungen der Transformation erfüllt sein und wir können den Ansatz (5) zweckmässig in der Weise aufrecht erhalten, dass wir setzen:

$$\lambda = \frac{1}{\varrho}, \quad \lambda' = \frac{1}{\varrho'}, \quad \text{etc.}$$

und nun unter ϱ und ϱ' willkürliche Parameter verstehen mit der Bedingung:

$$\varrho : \varrho' = \delta_{11} : \delta'_{11},$$

Das Diophantische System enthält dann die Grössen ϱ und ϱ' thatsächlich nicht, da $r = r' = 0$ zu setzen ist.

B) Die zweite der zu erörternden Eventualitäten hängt mit dem Auftreten von *wesentlich singulären Stellen* für die der Transformation zu unterwerfenden s-Functionen zusammen, welche durch Coincidenz eines m-fachen algebraischen und eines *logarithmischen Unstetigkeitspunktes* entstanden gedacht werden können.

Den Charakter dieser Art von Singularität können die Verzweigungspunkte $0, \infty, 1$ nur für ganzzahlige Werthe der Exponenten erhalten, indem dann im Allgemeinen die Entwickelung von s in der Umgebung des betreffenden singulären Werthes ein logarithmisches Glied auf-

weist*). Da in einem solchen Falle der Schwarz'sche Satz über die conforme Abbildung durch die s-Function insofern eine Ausnahme erleidet, als die Begrenzungskreisbögen des der Halbebene des Argumentes entsprechenden Dreiecks der s-Ebene in einer oder in mehreren Ecken sich berühren, unsere ganzen Ausführungen sich aber wesentlich auf die conforme Abbildung stützen, so müssen wir, was den Ansatz (5) betrifft, wiederum eine Modification eintreten lassen.

Es sei beispielsweise λ gleich einer ganzen Zahl m und $x = 0$ ein logarithmischer Unendlichkeitspunkt für die Function $\mathfrak{s}(\lambda, \mu, \nu, x)$; ferner werde δ_{11} und δ'_{11} von Null verschieden angenommen, so folgt zunächst nur, dass auch $y = 0$ für $\mathfrak{s}'(\lambda', \mu', \nu', y)$ eine logarithmische Unendlichkeitsstelle bildet, also neben $r = 0$ auch $r' = 0$. Dagegen ist über den numerischen Werth des zugeordneten Exponenten λ', abgesehen davon, dass er eine ganze Zahl m' sein muss, auch nach Fixirung von δ_{11} und δ'_{11} Nichts bekannt, und umgekehrt ist in der Angabe von m und m' noch keine Bestimmung für das Verhältniss $\frac{\delta_{11}}{\delta'_{11}}$ gegeben. Mit anderen Worten: Ist x_0, y_0 ein Werthepaar 1. Art von solcher Beschaffenheit, dass x_0 für die Function $\mathfrak{s}(x)$ und y_0 für $\mathfrak{s}'(y)$ einen logarithmischen Unendlichkeitspunkt bildet, so können die n Blätter der zu $f(x, y) = 0$ gehörigen *Riemann'schen Fläche* über der x-Ebene an der Stelle $x = x_0$ (und umgekehrt die n' Blätter der y-Fläche an der Stelle $y = y_0$) *in ganz beliebiger Weise verzweigt* sein.

Wie man sieht, ist die Form der Transformationsgleichung unabhängig von den speciellen Werthen der ganzen Zahlen m und m', welche die zu den wesentlich singulären Punkten gehörigen Exponenten darstellen, und nur durch das Verschwinden des ihnen zugeordneten Zahlenpaares aus der Reihe r, s, t, r', s', t' charakterisirt. Demnach können die den Transformationen vom Typus B) entsprechenden Diophantischen Bedingungen in der Weise aufgestellt werden, dass man wiederum

$$\lambda = \frac{1}{\varrho}, \quad \lambda' = \frac{1}{\varrho'}, \quad \text{etc.}$$

ansetzt und jetzt verlangt, dass die Relationen (6) bis (12) für unbegrenzt wachsende Werthe von ϱ, ϱ', etc. stattfinden.

Während hiernach die Transformationen, welche den unter A) gemachten Voraussetzungen entsprechen, jedesmal zugleich Transformationen vom Typus B) bedeuten, findet das Umgekehrte nicht statt und bilden also die letzteren eine der Zahl nach ausgedehntere Classe.

Alles zusammenfassend können wir sagen:

*) Man vergl. die von Hrn. Schwarz, Cr. J. Bd. 75, gegebenen Kriterien für das Verschwinden des Coefficienten des logarithmischen Gliedes.

(I) *Das Problem der algebraischen Transformation hängt in erster Linie ab von der Auflösung des Systems unbestimmter Gleichungen* (5), (6), (7), (9) *und* (12) *in positiven ganzen Zahlen und unter Berücksichtigung der Ungleichungen* (10) *und* (11).

Dieses System geht vermöge der Annahme:

$$n' = 1, \quad p = 0$$

über in das *Diophantische System der rationalen Transformation:*

$$x = R_n(y),$$

welches Hr. Goursat aufgestellt hat.

Man hat nämlich infolge obiger Annahme:

$$q = 3,$$

$$r' = s' = t' = 0, \quad a' = b' = c' = 1, \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

An Stelle des Ansatzes (5) tritt hier nur:

$$\lambda = \frac{1}{\varrho}, \quad \mu = \frac{1}{\sigma}, \quad \nu = \frac{1}{\tau};$$

ferner verschwinden in dem Grössensysteme:

$$\begin{matrix} \delta_{11}, & \delta_{21}, & \delta_{31}, \\ \delta_{12}, & \delta_{22}, & \delta_{32}, \\ \delta_{13}, & \delta_{23}, & \delta_{33} \end{matrix}$$

alle Elemente bis auf drei (so zwar, dass jede Horizontalreihe ein nicht verschwindendes Element enthält) und diese drei bedürfen keiner Zerlegung in Summanden. Drückt man weiter mit Hülfe von (6) die δ'_{ik} durch die δ_{ik} aus, so ergeben die drei letzten Gleichungen (7) die Werthe der λ', μ', ν'. Die Relationen (9), (10), (12), (13), (15), (17) endlich reduciren sich auf:

$$\begin{gathered} n = a + r\varrho = b + s\sigma = c + t\tau, \\ a + b + c \geqq 3, \\ n = r + s + t + 1, \\ 1 - \lambda' - \mu' - \nu' = n(1 - \lambda - \mu - \nu), \\ r(\varrho - 3) + s(\sigma - 3) + t(\tau - 3) \leqq 0, \\ a + r(\varrho - 2) + b + s(\sigma - 2) \leqq 2t + 2; \end{gathered}$$

alle übrigen werden überflüssig.

Es mag noch erwähnt werden, dass die Diophantischen Bedingungen der Transformation auch zu einer einfachen Lösung des von Hrn. Schwarz behandelten Problems dienen können: *alle Fälle zu bestimmen, in denen die Differentialgleichung:*

$$[s]_x = R(\lambda, \mu, \nu, x)$$

algebraisch integrirt werden kann.

Man hat zu diesem Ende nur nöthig

$$\lambda' = \mu' = \nu' = 1$$

anzunehmen, da bei geeigneter Wahl der Integrationsconstanten

$$\mathfrak{s}'(1, 1, 1, y) = y$$

erhalten wird. Weil hier die Werthe $y = 0, \infty, 1$ ihren singulären Charakter verlieren, so brauchen nur noch Werthepaare x, y der 2. Art in Betracht gezogen zu werden und man hat alle Grössen $q, a, b, \ldots, c', \delta_{ik}, \delta'_{ik}$ gleich Null zu setzen. Von den sich ergebenden Gleichungen heben wir nur die folgende hervor:

$$2p - 2 = n\left(1 - \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\tau}\right),$$

welche zeigt, dass das Geschlecht p der zwischen x und

$$s = \mathfrak{s}\left(\frac{\alpha}{\varrho}, \frac{\beta}{\sigma}, \frac{\gamma}{\tau}, x\right)$$

bestehenden algebraischen Gleichung:

$$f(\overset{n'}{x}, \overset{n}{s}) = 0$$

$= 0, 1$, oder > 1 ist, jenachdem $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\tau} \gtreqless = 1$ ist.

Das Diophantische System giebt nur *nothwendige, nicht die hinreichenden Bedingungen für die Aufstellung einer Riemann'schen Fläche,* welche der postulirten Transformationsgleichung entspricht. Die Frage, ob eine solche Fläche immer existirt und wie weit etwa jene Bedingungen hinreichen, um sie zu definiren, bleibt vorläufig unentschieden und kann erst am Schlusse unserer Untersuchungen besprochen werden.

Inzwischen empfiehlt es sich vielleicht, an dem *Beispiele* einer bereits bekannten irrationalen Transformation zu erläutern, in welcher Weise die *Construction einer Riemann'schen Fläche* an der Hand der Daten des Diophantischen Systems gemeint ist.

Beispiel.

Unter k eine nach Willkür zu wählende Zahl verstanden, sei die Transformation:

$$\mathfrak{s}\left(\frac{1}{2k}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2k}, x\right) = \mathfrak{s}'\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}, y\right)$$

vorgelegt, welche folgendem Lösungssystem des Diophantischen Systems entspricht:

$$n = 6,\ n' = 2,\ p = 0,\ q = 6;$$

$\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 1,$	$\alpha' = 1,\ \beta' = 1,\ \gamma' = 1,$
$\varrho = 2k,\ \sigma = 3,\ \tau = 2k,$	$\varrho' = k,\ \sigma' = k,\ \tau' = k,$
$r = 0,\ s = 2,\ t = 0,$	$r' = 0,\ s' = 0,\ t' = 0,$
$a = 6,\ b = 0,\ c = 6;$	$a' = 2,\ b' = 2,\ c' = 2;$

$$\delta_{1,i} = \delta_{3,i} = 2,\quad \delta_{2,i} = 0,\quad i = 1, 2, 3.$$

Hierin sind folgende Angaben über die Riemann'sche Fläche der Transformationsgleichung enthalten: Es giebt 6 Werthepaare 1. Art: (0, 0), (0, ∞), (0, 1), (1, 0), (1, ∞), (1, 1), denen $q = 6$ Blättercyklen entsprechen. In der x-Fläche hängen nämlich an den 2 Stellen $x = 0$ und $x = 1$ je 3-mal 2 Blätter cyklisch zusammen, während umgekehrt in der y-Fläche an den 3 Stellen $y = 0, \infty, 1$ die beiden Blätter isolirt verlaufen. Ferner sind 2 Werthepaare 2. Art vorhanden: (∞, η) und $(\infty, \bar{\eta})$. Demgemäss müssen in der x-Fläche an der Stelle $x = \infty$ 2-mal 3 Blätter, in der y-Fläche an den beiden Stellen $y = \eta$ und $y = \bar{\eta}$ beide Blätter jedesmal cyklisch verzweigt sein.

Um jetzt über der s-Ebene das der Riemann'schen Fläche correspondirende Polygon S zu construiren, setze man etwa $k = \infty$, markire demnach (Fig. 1) als Bild der positiven Halbebene x irgend ein Kreisbogendreieck I mit den Ecken A, B, C und den Winkeln 0, $\frac{2\pi}{3}$, 0 und weise A, B, C bezw. die Werthe $x = 0, \infty, 1$ zu. Unter Anwendung des bekannten Processes wiederholter Spiegelung an den Begrenzungskreisen (wobei Spiegelpunkten immer conjugirte Werthe des Argumentes x entsprechen) construire man von I ausgehend 5 weitere Dreiecke I', II, II', III, III', welche sich um den Punkt B herum in bestimmtem Sinne aneinander anreihen und von denen das letzte III' längs der Kante $\overline{AB}$ mit I vereinigt gedacht werden kann (die zu vereinigenden Kanten correspondiren den beiden Ufern derselben Strecke $\overline{\infty 0}$ der reellen x-Axe). Diese 6 Bilder der positiven bezw. negativen Halbebene x constituiren eine Windungsfläche 1. Ordnung mit B als Windungspunkt und $\overline{AB}$ als Verzweigungsschnitt, welche die s-Ebene nach Erstreckung eines Kreisbogendreiecks ACD mit drei Nullwinkeln doppelt überdeckt. Beiden Blättern dieses Dreiecks ACD ordne man die positive Halbebene (y) zu, speciell den Punkten A, B, C, D jedesmal die Punkte $y = 0, \eta, \infty, 1$. Schliesslich spiegele man die ganze Configuration an dem Begrenzungskreise CD, worauf die über $A'CD$ liegenden Dreiecke der negativen Halbebene (y), speciell der Windungspunkt B' dem zu η conjugirten Werthe $y = \bar{\eta}$ entsprechend zu setzen sind.

In Fig. 2 sind die beiden übereinander liegenden Blätter der so entstehenden Fläche S mit zwei einfachen Windungspunkten einzeln dargestellt und sämmtliche Eckpunkte durch die ihnen correspondirenden Werthecombinationen (x, y) bezeichnet. Die der negativen Halbebene (x) zugehörigen Dreiecke sind schraffirt und die Verzweigungsschnitte doppelt ausgezogen. — Offenbar lassen sich in jedem Blatte die noch freien Kanten einander paarweise durch lineare s-Substitutionen zuweisen, welche bezw. die Punkte (1, ∞), (0, 1), (0, ∞), (1, 1) festlassen. Hier-

durch ist aber eine zusammenhängende Mannichfaltigkeit Σ vom Geschlechte $p = 0$ eindeutig definirt, welche nach geeigneter Deformation als Riemann'sche Fläche der Transformationsgleichung über der y-Ebene ausgebreitet werden kann (Fig. 3).

Die noch verbleibende Aufgabe der expliciten Darstellung der algebraischen Irrationalität x von y, welche eindeutige Function des Ortes in dieser Riemann'schen Fläche ist, ist in Folge der Zuordnung der kritischen Punkte zu gegebenen Werthepaaren (x, y) ein vollständig bestimmtes Problem, dessen Lösung im gegenwärtigen Falle $(p = 0)$ keine Schwierigkeiten darbieten würde. Die betreffende Gleichung:

$$16x(1-x)(1-y+y^2)^3 - 27y^2(1-y)^2 = 0$$

ist indess bereits bekannt, und man kann daher umgekehrt an ihr unsere Aufstellungen verificiren.

II.

Die Gruppe der Periodicitätssubstitutionen für die Umkehrfunction.

Es wurde bereits von den linearen Substitutionen der Variablen s Gebrauch gemacht, welche die beiden Umkehrfunctionen

$$\mathfrak{x}(\lambda, \mu, \nu, s) \quad \text{und} \quad \mathfrak{y}(\lambda', \mu', \nu', s)$$

in sich überführen. Wir wollen diese linearen Substitutionen, deren Existenz im Hinblick auf die fundamentale Eigenschaft der s-Function, dass zwischen je zweien ihrer Zweige eine Gleichung von der Form

$$s' = \frac{c_1 s + c_2}{c_3 s + c_4}$$

besteht, keinem Zweifel unterliegen kann, als die zu $\mathfrak{x}(s)$ und $\mathfrak{y}(s)$ gehörigen *„Periodicitätssubstitutionen"* bezeichnen. Offenbar bilden sie in ihrer Gesammtheit zwei *Gruppen* (im specifischen Sinne dieses Wortes) und diese beiden Gruppen G und G' können wir im Anschluss an die in der s-Ebene entworfen gedachten beiden Gebietseintheilungen S und S' sogleich vollständig definiren, indem wir ihre *erzeugenden Substitutionen* angeben.

Es genügt eine der Gruppen zu betrachten, etwa G. Diese wird erzeugt durch Combination und Iteration der drei linearen Substitutionen A, B, C, welche die Variable $s = \mathfrak{s}(\lambda, \mu, \nu, x)$ erleidet, wenn x die singulären Punkte $x = 0, \infty, 1$ je einfach in positivem Sinne umkreist. Zwischen ihnen besteht in bekannter Symbolik die Gleichung:

$$C = A^{-1} B^{-1}. \tag{1}$$

In der That ist ja, da $\mathfrak{s}(x)$ nur bei $x = 0, \infty, 1$ verzweigt ist, die successive einmalige Umkreisung von $x = 0$ und $x = \infty$ in negativem

Sinne mit einem positiven Umlaufe des x um $x = 1$ äquivalent. Sonach handelt es sich zunächst nur um die Darstellung der erzeugenden Substitutionen A, B, C mit Rücksicht auf (1).

In einem im XXV. Bde. der Mathem. Annalen abgedruckten Artikel: „Ueber verwandte s-Functionen" habe ich die Bedingungen, welche sich für die erzeugenden Substitutionen der Periodicität aus der Relation $CBA = 1$ ergeben, von rein analytischem Gesichtspunkte aus entwickelt. Für den gegenwärtigen Zweck wird es nöthig sein, diese Betrachtungen wesentlich zu modificiren, um die geometrische Bedeutung unserer Operationen klar hervortreten zu lassen.

Aus den Untersuchungen des Hrn. Schwarz ist zu entnehmen, dass jede Function $s(\lambda, \mu, \nu, x)$, deren Entwickelung für die Umgebung jedes singulären Punktes von Logarithmen frei ist, im Besonderen der drei Formen fähig ist:

$$(2) \qquad s = \frac{A_1 s_0 + A_2}{A_3 s_0 + A_4} = \frac{B_1 s_\infty + B_2}{B_3 s_\infty + B_4} = \frac{C_1 s_1 + C_2}{C_3 s_1 + C_4},$$

in welchen die A_i, B_i, C_i Constanten und s_0, s_∞, s_1 particuläre Integrale der Differentialgleichung $[s]_x = R(\lambda, \mu, \nu, x)$ bedeuten, welche resp. nach Multiplication mit x^λ, $\left(\frac{1}{x}\right)^\mu$, $(x-1)^\nu$ in der Umgebung der singulären Punkte $x = 0, \infty, 1$ eindeutig, endlich und von Null verschieden bleiben. — Diese Functionen s_0, s_∞, s_1 sollen der Kürze halber als die zu den singulären Punkten gehörigen *„Normalformen" der s-Function* bezeichnet werden. Sie entstehen aus den *„Fundamentalsystemen"**) der Differentialgleichung der zugehörigen hypergeometrischen Function durch Quotientenbildung. Da die Normalformen ihrer Definition gemäss offenbar nur bis auf constante Factoren bestimmt sind, sobald die Function $s(x)$ gegeben ist, so wird zur Erreichung völliger Bestimmtheit über diese Factoren noch eine geeignete Verfügung getroffen werden müssen, welche wir uns vorbehalten.

Im Falle logarithmischer Unstetigkeiten ist nur nöthig, die Definition der Normalformen s_0, s_∞, s_1 dahin abzuändern, dass, unter $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ geeignete Constanten verstanden, die Ausdrücke

$$s_0 - \mathfrak{A} \cdot \log x, \quad s_\infty - \mathfrak{B} \cdot \log\left(\frac{1}{x}\right), \quad s_1 - \mathfrak{C} \cdot \log(x-1)$$

in der Umgebung von $x = 0, \infty, 1$ eindeutig und nach Multiplication mit x^λ, $\left(\frac{1}{x}\right)^\mu$, $(x-1)^\nu$ endlich und von Null verschieden bleiben sollen. Auch für diese Fälle lassen sich die folgenden Untersuchungen voll-

*) Diese Bezeichnung wurde von Hrn. Fuchs in die Theorie der linearen Differentialgleichungen eingeführt. Vergl. den Aufsatz: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten, Crelle's Journal, Bd. 66, und Zusätze, Bd. 68.

ständig durchführen; indess können die hierzu nöthigen speciellen Erörterungen füglich übergangen werden, da sich die bezüglichen Resultate aus den hier vorzuführenden durch einen Analogieschluss ergeben.

Die Functionen $\mathfrak{z}_0(x)$, $\mathfrak{z}_\infty(x)$, $\mathfrak{z}_1(x)$ gehen ihrer Definition zufolge bei einem positiven Umlaufe von x um $x = 0, \infty, 1$ resp. über in:

$$e^{2\lambda\pi i} \cdot \mathfrak{z}_0, \quad e^{2\mu\pi i} \cdot \mathfrak{z}_\infty, \quad e^{2\nu\pi i} \cdot \mathfrak{z}_1.$$

Bezeichnet man diese linearen Substitutionen durch A', B', C' und setzt überdies:

$$\mathfrak{z}_0 = T(\mathfrak{z}_\infty) = U(\mathfrak{z}_1), \tag{3}$$

so werden die erzeugenden Substitutionen der Periodicität A, B, C für die aus der Umkehrung von

$$s = \mathfrak{z}(\lambda, \mu, \nu, x)$$

entspringende Function $\mathfrak{x}(s)$ — falls man, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0$ wählt — gegeben sein durch:

$$A = A', \quad B = TB'T^{-1}, \quad C = UC'U^{-1}. \tag{4}$$

Bei der Entwickelung der durch die Relation (1) gegebenen Bedingungen, welche uns zur Aufstellung der Substitutionen A, B, C hinführen soll, wollen wir uns eines einfachen Kunstgriffes bedienen, um letztere sogleich in einer für die geometrische Deutung geeigneten Form zu erhalten.

Es mögen nämlich die sämmtlichen auftretenden linearen Substitutionen in der Form:

$$s' = \frac{(d + ic)\, s - (b - ia)}{(b + ia)\, s + (d - ic)} \tag{5}$$

angesetzt werden mit der Determinante:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

Die einzuführenden Grössen a, b, c, d denken wir uns stets auf die Form gebracht:

$$a = \xi \sin\frac{\varphi}{2}, \quad b = \eta \sin\frac{\varphi}{2}, \quad c = \zeta \sin\frac{\varphi}{2}, \quad d = \cos\frac{\varphi}{2}$$

mit der Bedingung:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

und schreiben die Substitution (5) alsdann abkürzend:

$$s' = (\xi, \eta, \zeta, \varphi; s).^*) \tag{6}$$

*) Man vergl. F. Klein, Vorl. über d. Ikosaeder u. d. Auflösung d. Gleichungen v. 5ten Grade, Leipzig 1884, p. 34. — Denkt man sich um den Punkt $s = 0$ der s-Ebene ($\zeta = 0$) eine Kugel ($\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$) beschrieben und die s-Ebene durch stereographische Projection aus dem Punkte ($\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 1$) auf diese Kugel bezogen, so entspricht bei reellen Werthen der a, b, c, d der

Hiernach haben wir zunächst den Ansatz:

$$(A') \quad s' = (0,\ 0,\ 1,\ -2\lambda\pi;\ s),$$
$$(B') \quad s' = (0,\ 0,\ 1,\ -2\mu\pi;\ s),$$
$$(C') \quad s' = (0,\ 0,\ 1,\ -2\nu\pi;\ s).$$

Die Relation (1) ergiebt ferner drei Bedingungen für die 8 Coefficienten der Substitutionen T und U. Da nun letztere bereits der Bedingung unterworfen wurden, dass ihre Determinante jeweils den Werth 1 erhalten soll, so bleiben nur 3 Constante verfügbar; diese hängen von den noch willkürlichen Factoren der Normalformen ab und mögen — ohne der Frage zu präjudiciren, ob nicht für andere Zwecke eine andere Normirung vortheilhafter erscheint — so gewählt werden, dass die hier abzuleitenden Formeln eine möglichst einfache Gestalt annehmen. Zu diesem Ende schreiben wir:

$$(T) \quad s' = (0,\ 1,\ 0,\ N;\ s),$$
$$(U) \quad s' = (\xi_0,\ \eta_0,\ 0,\ M;\ s)$$

und haben hierauf nur die noch unbekannten Grössen ξ_0, η_0, M, N gemäss der Bedingung $\xi_0^2 + \eta_0^2 = 1$ und der Relation (1) zu bestimmen.*)

Denken wir uns die durch (4) definirten Substitutionen auf die Function $s = \mathfrak{s}_0(x)$ angewandt, so ergiebt eine einfache Rechnung zuerst für A, B, C die Formen:

$$(A) \quad s' = (\ 0,\ \ 0,\ \ 1,\ -2\lambda\pi;\ s),$$
$$(B) \quad s' = (\sin N,\ \ 0,\ \cos N,\ -2\mu\pi;\ s),$$
$$(C) \quad s' = (\eta_0 \sin M,\ -\xi_0 \sin M,\ \cos M,\ -2\nu\pi;\ s),$$

---

linearen Transformation (6) der s-Ebene eine Drehung der Kugel durch den Winkel φ um eine die Punkte (ξ, η, ζ) und $(-\xi, -\eta, -\zeta)$ verbindende Axe. — Man beachte, dass die zu (6) inverse Operation durch blosse Umkehrung des Zeichens von φ erhalten wird, sowie dass für die Zusammensetzung zweier Substitutionen zu einer neuen die Formeln gelten:

$$a'' = (ad' + a'd) - (bc' - b'c),$$
$$b'' = (bd' + b'd) - (ca' - c'a),$$
$$c'' = (cd' + c'd) - (ab' - a'b),$$
$$d'' = -aa' - bb' - cc' + dd'.$$

*) Die in dem gemachten Ansatz enthaltene Annahme über die Normalform $\mathfrak{s}_0(x)$ besteht, wenn die durch sie vermittelte conforme Abbildung in Betracht gezogen wird, darin, dass das zugehörige Dreieck (λ, μ, ν) der s-Ebene zwei geradlinige Seiten besitzt, welche sich in der bei $s = \infty$ gelegenen Ecke unter dem Winkel $\lambda\pi$ schneiden und von denen die eine mit der Axe der reellen Zahlen zusammenfällt. Durch $\mathfrak{s}_0(x)$ sind bei unseren Voraussetzungen die beiden anderen Normalformen $\mathfrak{s}_\infty(x)$ und $\mathfrak{s}_1(x)$ mitbestimmt.

Sodann aber zeigen die aus der Relation (1) fliessenden Bedingungen, dass:

$$\xi_0 = -\sin\lambda\pi, \quad \eta_0 = \cos\lambda\pi$$

zu wählen ist, und dass zur *Bestimmung der Grössen M und N* die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin\nu\pi \sin M &= \sin\mu\pi \sin N, \\ \sin\lambda\pi \sin\nu\pi \cos M &= \cos\lambda\pi \cos\nu\pi + \cos\mu\pi, \\ \sin\lambda\pi \sin\mu\pi \cos N &= \cos\lambda\pi \cos\mu\pi + \cos\nu\pi \end{aligned} \tag{7}$$

dienen.

In *definitiver Form* lauten daher die *erzeugenden Periodicitätssubstitutionen:*

$$\begin{aligned} &(A)\quad s' = (0,\ 0,\ 1,\ -2\lambda\pi;\ s), \\ &(B)\quad s' = (\sin N,\ 0,\ \cos N,\ -2\mu\pi;\ s), \\ &(C)\quad s' = (\cos\lambda\pi \sin M,\ \sin\lambda\pi \sin M,\ \cos M,\ -2\nu\pi;\ s). \end{aligned} \tag{8}$$

Will man endlich die *festbleibenden Elemente* hervortreten lassen, so können die erzeugenden Substitutionen auch in der Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} &(A)\quad s' = e^{-2\lambda\pi i}\cdot s, \\ &(B)\quad \frac{s' + \operatorname{tang}\frac{1}{2}N}{s - \operatorname{cotg}\frac{1}{2}N} = e^{-2\mu\pi i}\cdot\frac{s + \operatorname{tang}\frac{1}{2}N}{s - \operatorname{cotg}\frac{1}{2}N}, \\ &(C)\quad \frac{s' + e^{\lambda\pi i}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}M}{s' - e^{\lambda\pi i}\cdot\operatorname{cotg}\frac{1}{2}M} = e^{-2\nu\pi i}\cdot\frac{s + e^{\lambda\pi i}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}M}{s - e^{\lambda\pi i}\cdot\operatorname{cotg}\frac{1}{2}M}. \end{aligned} \tag{9}$$

Bei der geometrischen Discussion dieser Ausdrücke für die Substitutionen A, B, C hat man dreierlei Eventualitäten auseinanderzuhalten, welche sich bei der hier gewählten Form der Fragestellung auf den Charakter der Substitutionen T und U beziehen. Da diese Unterscheidungen aber überhaupt in der Theorie der hypergeometrischen Functionen eine fundamentale Wichtigkeit besitzen, so mögen hier einige allgemeine Bemerkungen über dieselben Platz finden.

Im gegenwärtigen Falle ist es, wie Hr. F. Klein gelegentlich bemerkt hat, zu besserer Orientirung zweckdienlich, bei der Darstellung der Werthe der Variablen s, statt wie gewöhnlich die *Ebene*, eine *Kugel* zu verwenden, welche man sich auf erstere durch eine geeignete stereographische Projection bezogen denken mag. Der Schwarz'sche Satz lässt sich dann folgendermassen aussprechen: Durch ein particuläres Integral der Differentialgleichung:

$$[s]_x = R(\lambda, \mu, \nu, x)$$

wird die positive (resp. negative) Halbebene (x) auf ein Kreisbogendreieck der s-Kugel mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ abgebildet, welches — abgesehen etwa von den Ecken — keinen Windungspunkt enthält.

Die Ebenen der Begrenzungskreise dieses Dreiecks (λ, μ, ν) haben einen Punkt O gemein, dessen Polarebene in Bezug auf die Kugel von letzterer in dem ihnen gemeinsamen Orthogonalkreis $\mathfrak{K}$ geschnitten wird. Man unterscheide nun hinsichtlich der Lage von O einfach folgende Fälle:

I) *O liegt innerhalb der Kugel, der Orthogonalkreis $\mathfrak{K}$ ist imaginär.* Hier kann die benutzte stereographische Projection so eingerichtet werden, dass O in das Centrum der Kugel fällt und das Dreieck (λ, μ, ν) ein eigentliches sphärisches wird;

II) *O liegt auf der Kugel, der Orthogonalkreis $\mathfrak{K}$ ist in den Punkt O selbst ausgeartet* und bildet für die Umkehrfunction stets eine *wesentlich singuläre Stelle.* Wird er in das Centrum der Projection $(s = \infty)$ verlegt, so wird das Dreieck (λ, μ, ν) der s-Ebene ein geradliniges.

III) *O liegt ausserhalb der Kugel, der Kreis $\mathfrak{K}$ ist reell* und erlangt für die Umkehrfunction die Bedeutung einer *natürlichen Grenze.*

Es hängt von dem Verhalten der Exponenten λ, μ, ν ab, welcher von den Fällen I, II, III eintritt, und zwar entsprechen sie der Reihe nach den Annahmen:

$$\lambda + \mu + \nu \gtreqless 1,$$

sofern man sich — wie dies für den gegenwärtigen Zweck statthaft ist — die Zahlen λ, μ, ν durch die absoluten Beträge ihrer (mod. 2) absolut kleinsten Reste ersetzt denkt*).

Die Substitutionen A, B, C sind ebenso wie A', B', C' *„elliptisch"*; die zur Transformation von B' und C' benutzten Substitutionen T und U können dagegen *„elliptisch"*, *„parabolisch"* oder *„hyperbolisch"* sein. Es ist zu zeigen, wie sich diese Eventualitäten den obigen Fällen I, II, III unterordnen.

Man überzeugt sich leicht, dass der Grenzfall der parabolischen Substitutionen nur eintreten kann, wenn sich sin M oder sin N der Null nähert; die Gleichungen (7) zeigen, dass diese beiden Fälle nur gleichzeitig und für $\lambda + \mu + \nu = 1$ stattfinden. Da sich aber herausstellt, dass für diese Annahme unsere Formeln nicht anwendbar bleiben, so lassen wir sie vorläufig bei Seite und können dann die Substitutionen T und U in der Form gegeben annehmen:

*) Die Vermehrung oder Verminderung der Grössen λ, μ, ν um Multipla von 2 lässt die Formeln (7), auf welche es hier ankommt, ungeändert; ihre Vorzeichen aber sind an sich beliebig. — Man vergl. zur Ergänzung des Textes die Angaben des Hrn. Schwarz. (Cr. J. Bd. 75).

$$(10)\qquad \begin{aligned} &(T)\quad \frac{s'-i}{s'+i} = e^{-Ni}\cdot\frac{s-i}{s+i}.\\ &(U)\quad \frac{s'-ie^{\lambda\pi i}}{s'+ie^{\lambda\pi i}} = e^{-Mi}\cdot\frac{s-ie^{\lambda\pi i}}{s+ie^{\lambda\pi i}}. \end{aligned}$$

Infolge der Relationen (7) sind die Grössen $\cos M$ und $\cos N$ stets reell; dieselben Relationen zeigen aber weiter, dass $\cos^2 M$ und $\cos^2 N$ entweder beide < 1 oder beide > 1 zu nehmen sind. Sieht man daher von Vielfachen der Grösse 2π ab, so sind M und N entweder gleichzeitig reell oder rein imaginär. Beachtet man endlich, dass die Gleichungen (7) der Form nach mit gewissen Fundamentalrelationen der sphärischen Trigonometrie zusammenfallen, welche die Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ eines sphärischen Dreiecks mit seinen Seiten L, M, N verknüpfen, so bemerkt man, dass immer M und N reell sind, sobald $\lambda+\mu+\nu > 1$ vorausgesetzt wird. Daher im Hinblick auf (10) das Resultat:

Den Annahmen $\lambda+\mu+\nu \gtrless 1$ entsprechend sind die Substitutionen T und U gleichzeitig elliptisch oder hyperbolisch.

Generell besteht die *geometrische Bedeutung* der Gruppe G der Periodicität von $\chi(s)$ offenbar darin, dass sie die den Blättern der x-Fläche entsprechenden Kreisbogenvierecke des über der s-Ebene ausgebreiteten Netzes S ineinander überführt. Man kann hinzufügen, dass die Gruppe einen „*Hauptkreis*" besitzt, welcher bei allen ihren Substitutionen in sich übergeht; als solcher stellt sich nämlich der den Seiten jener Kreisbogenvierecke gemeinsame (imaginäre, ausgeartete oder reelle) Orthogonalkreis $\mathfrak{K}$ dar. Gestützt auf diesen Umstand lässt sich aber die geometrische Bedeutung der Gruppe G noch einfacher charakterisiren, wenn man sich entschliesst, den *Orthogonalkreis $\mathfrak{K}$ als Fundamentalkegelschnitt der Massbestimmung* einzuführen. Man erhält so in den Fällen I) und III) resp. eine *elliptische* oder *hyperbolische, nichteuklidische Massbestimmung*, im Falle II) aber die *gemeine parabolische.*

Bei einer derartigen Auffassung erscheinen die einzelnen Kreisbogenvierecke als *congruent;* den Substitutionen der Gruppe G aber entsprechen *Bewegungen* dieser Vierecke in der Ebene (s), welche sich aus den Drehungen um die Ecken eines derselben resp. durch die Winkel $2\lambda\pi$, $2\mu\pi$, $2\nu\pi$ mittels Combination und Iteration zusammensetzen. Die Seiten der Dreiecke (λ, μ, ν) spielen hierbei die Rolle von geraden Linien und die Relation:

$$CBA = 1$$

erscheint nur als ein anderer Ausdruck des bekannten phoronomischen Satzes*), dass ein Dreieck in seine Anfangslage zurückkehrt, wenn

*) Vgl. Thomson u. Tait, Handb. d. theoret. Physik, Braunschweig 1871, I., p. 76.

man dasselbe successive um seine drei Ecken in einerlei Sinn durch Winkel dreht, welche doppelt so gross sind, als die zugehörigen Dreieckswinkel (resp. deren Nebenwinkel).

[Anmerkung: Unsere bisherigen Ausführungen enthalten die analytische Bestätigung dieser Bemerkungen. In der That giebt eine einfache Ueberlegung ohne Weiteres folgende Resultate:

I) $\lambda + \mu + \nu > 1$. Die anzuwendende elliptische Geometrie ist wesentlich identisch mit der Geometrie auf einer Kugel. Die Relationen (7) lassen sich, wie schon bemerkt, unmittelbar an einem eigentlichen sphärischen Dreiecke mit den Seiten L, M, N und den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ deuten.

II) $\lambda + \mu + \nu = 1$. L und M lassen sich als zwei Seiten eines verschwindend kleinen sphärischen Dreiecks (λ, μ, ν) auffassen. Von diesem geht man zu einem gemeinen geradlinigen Dreiecke (λ, μ, ν) mit den endlichen Seiten l, m, n über, indem man:

$$L = \frac{l}{R}, \quad M = \frac{m}{R}, \quad N = \frac{n}{R}$$

setzt und den Grenzwerth $\lim R = \infty$ in Betracht zieht. Die erste Relation (7) ergiebt dann:

$$m \sin \nu\pi = n \sin \mu\pi,$$

während die beiden anderen in die goniometrischen Formeln für

$$\cos(\lambda + \nu)\,\pi \quad \text{und} \quad \cos(\lambda + \mu)\,\pi$$

übergehen.

III) $\lambda + \mu + \nu < 1$. Man setze:

$$iM = m, \quad iN = n,$$

so sind m und n reell. Die Relationen (7) gehen über in die von Lobatschewsky entwickelten trigonometrischen Relationen der hyperbolischen Geometrie und lassen sich demgemäss wiederum an einem geradlinigen Dreiecke (λ, μ, ν) mit den Seiten l, m, n deuten. In der That, führt man durch die Beziehung:

$$e^{-v} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \Pi(v)$$

das Lobatschewsky'sche Symbol $\Pi(v)$ ein*), so wird:

$$\cos M = \frac{1}{\sin \Pi(m)}, \quad \sin M = -i \operatorname{cotg} \Pi(m),$$

und die entstehenden Formeln:

---

*) Nicolaus Lobatschewsky, Geometr. Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Berlin 1840. — $\Pi(v)$ bezeichnet den sogen. „Parallelwinkel" (d. h. den Winkel, welchen eine zur Linie g durch den Punkt P zu ziehende Parallele mit dem von P auf g gefällten Perpendikel v bildet) als Function der Grösse v.

$$\sin \nu\pi \operatorname{tang} \Pi(n) = \sin \mu\pi \operatorname{tang} \Pi(m),$$
$$\sin \lambda\pi \sin \nu\pi = (\cos \lambda\pi \cos \nu\pi + \cos \mu\pi) \sin \Pi(m),$$
$$\sin \lambda\pi \sin \mu\pi = (\cos \lambda\pi \cos \mu\pi + \cos \nu\pi) \sin \Pi(n)$$

stimmen mit Lobatschewsky's Angaben überein (a. a. O. pag. 58).]

Durch die gegebene explicite Darstellung ihrer erzeugenden Operationen ist die *Gruppe G_0 der Periodicität* für die Function $\mathfrak{x}(s)$, welche aus der Umkehrung der Gleichung:

$$s = \mathfrak{z}_0(\lambda, \mu, \nu, x)$$

entspringt, *vollständig definirt.*

Will man allgemein die Gruppe G aufstellen, welche die Periodicität der durch Umkehrung irgend einer Gleichung:

$$s = \mathfrak{z}(\lambda, \mu, \nu, x)$$

entstehenden Function $\mathfrak{x}(s)$ bestimmt, so führe man $\mathfrak{z}(x)$ auf die zum singulären Punkte $x = 0$ gehörige Normalform $\mathfrak{z}_0(x)$ zurück. Geschieht dies durch die lineare Substitution:

$$\mathfrak{z} = T_0(\mathfrak{z}_0),$$

so entsteht die Gruppe G einfach durch Transformation der Gruppe G_0 mittels der Operation T_0, d. h. die Operationen V der ersten sind den Operationen V_0 der letzteren vermöge der Relation:

$$V = T_0 V_0 T_0^{-1}$$

umkehrbar eindeutig zugeordnet, so dass zwischen beiden Gruppen *holoedrischer Isomorphismus* besteht.

III.

Die Beziehung zwischen den Gruppen der Periodicität zweier algebraisch von einander abhängiger Umkehrfunctionen.

Wir wenden uns zur Untersuchung der gegenseitigen Stellung zweier Gruppen G und G' linearer Substitutionen der Variablen s, welche zu zwei durch eine algebraische Transformation verbundenen s-Functionen gehören.

Besteht durch Vermittelung der irreduciblen algebraischen Gleichung:

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

die Beziehung:

$$\mathfrak{z}(\lambda, \mu, \nu, x) = \mathfrak{z}'(\lambda', \mu', \nu', y), \tag{2}$$

so wird nach Substitution der durch Umkehrung der Gleichungen:

$$s = \mathfrak{z}(\lambda, \mu, \nu, x), \quad s = \mathfrak{z}'(\lambda', \mu', \nu', y) \tag{3}$$

entstehenden Functionen $\chi(s)$ und $\eta(s)$ für x und y die Relation (1) zu einer identischen Gleichung in s.

Die Existenz der Umkehrfunctionen kann im Hinblick auf die conforme Abbildung keinem Zweifel unterliegen: sie sind jedenfalls für einen endlichen Bereich der Variablen s erklärbar. Auf die Frage nach ihrer analytischen Darstellung durch convergente Processe gehen wir hier nicht ein. — Um ferner die folgende Betrachtung nicht durch die leicht zu übersehenden Modificationen unterbrechen zu müssen, die sie in specielleren Fällen erheischen würde, denken wir uns für s einen solchen Ausgangswerth gewählt, dass sowohl $\chi(s)$ als $\eta(s)$ von 0, ∞, 1 verschieden ausfallen. Ebenso setzen wir voraus, dass die Anfangswerthe für diese Functionen in bestimmter Weise gemäss der Gleichung (1) fixirt seien, — eine Festsetzung, die desshalb geboten erscheint, weil die Umkehrung der Gleichungen (3) eventuell mehrdeutige Functionen liefern wird.

Dies vorausgeschickt, denke man sich auf die Functionen $\chi(s)$ und $\eta(s)$ nach und nach alle Substitutionen der Gruppe G angewendet, so wird $x = \chi(s)$ ungeändert bleiben, $y = \eta(s)$ seinen Werth im Allgemeinen ändern. Da aber die auf diese Weise erhaltenen Werthe von y keine anderen sind, als die, welche durch (1) bestimmt werden, und vermöge dieser Gleichung nach unserer Voraussetzung einem jeden Werthe x nur n verschiedene Werthe von y entsprechen können, so müssen sich unter den Substitutionen von G solche befinden, welche auch $\eta(s)$ ungeändert lassen und mithin zugleich in G' enthalten sind.*)

Diese Ueberlegung führt zu der Erkenntniss, *dass die beiden Gruppen G und G' eine gemeinsame, in beiden ausgezeichnete Untergruppe Γ enthalten*, welche die sämmtlichen s-Substitutionen umfasst, die beide Umkehrfunctionen $\chi(s)$ und $\eta(s)$ und somit jedes der Gleichung (1) entnommene Werthepaar (x, y) einzeln in sich überführen. Ausgezeichnet ist aber die Untergruppe Γ insofern, als, unter V eine beliebige in G oder G' enthaltene Substitution und unter T eine beliebige Substitution von Γ verstanden, offenbar auch alle Operationen von der Form:

$$T' = VTV^{-1}$$

in Γ enthalten sind.

Es sei $x = \chi(s)$ ein Werth, welcher den obigen Voraussetzungen entspricht und in bestimmter Reihenfolge $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die zu ihm gehörigen ungleichen Wurzeln der Gleichung (1), welche sich, da

*) Hierbei mag indess hervorgehoben werden, dass, wenn von einer Substitution in G bekannt ist, dass sie einen der zu x gehörigen Werthe y der Function $\eta(s)$ invariant lässt, darum noch nicht geschlossen werden darf, dass sie in G' enthalten sei.

$f(x, y) = 0$ irreducibel vorausgesetzt wird, als die Werthe einer Function $\eta(s)$ für eine gewisse Reihe von Werthen:

$$U_1(s),\ U_2(s),\ \ldots,\ U_n(s)$$

ihres Argumentes darstellen. Die letzteren, welche kurz als „*Repräsentanten*" bezeichnet werden mögen, bilden die Resultate gewisser zur Gruppe G gehöriger Substitutionen $U_1, U_2, \ldots, U_n$, von denen die erste $U_1 = 1$ gewählt werden mag.

Wendet man auf das System der n Functionen:

$$(4) \qquad y_1 = \eta(U_1(s)),\ y_2 = \eta(U_2(s)),\ \ldots,\ y_n = \eta(U_n(s))$$

successive alle Substitutionen der Gruppe G an; so werden die $y_1, y_2, \ldots, y_n$ im Allgemeinen untereinander vertauscht. Die Gesammtheit der entstehenden und von einander verschiedenen Vertauschungen aber bildet eine *Gruppe* g, und zwar ist dies keine andere als die *Monodromiegruppe der algebraischen Gleichung* $f(x, y) = 0$ *mit Bezug auf* y *als Unbekannte und* x *als Parameter*. — In der That ist ja diese Monodromiegruppe als Inbegriff derjenigen Vertauschungen der Zweige $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der algebraischen Function y von x definirt, welche beliebigen geschlossenen Wegen der Variablen x entsprechen; jeder geschlossene Weg des x lässt sich aber gegenwärtig als lineare, in G enthaltene Substitution der Variablen s schreiben.

Bezeichnen nun:

$$1,\ A_2, A_3, \ldots, A_N$$

die sämmtlichen in g enthaltenen Permutationen der Indices $1, 2, 3, \ldots, n$, ferner:

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_N$$

irgend welche ihnen derart zugeordnete Substitutionen in G, dass bei Anwendung derselben auf s die Indices der Functionen (4) resp. die Permutationen $1, A_2, A_3, \ldots, A_N$ erfahren, endlich:

$$1,\ T,\ T',\ T'', \ldots$$

sämmtliche Substitutionen der ausgezeichneten Untergruppe Γ, so sind (indem offenbar $S_1 = 1$ gesetzt werden darf) durch das Schema:

$$\begin{array}{l} 1,\quad T,\quad T',\quad T'', \ldots, \\ S_2,\ S_2T,\ S_2T',\ S_2T'', \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_N,\ S_NT,\ S_NT',\ S_NT'', \ldots \end{array}$$

alle Substitutionen von G gegeben. Die k^{te} Horizontalreihe des Schemas enthält aber alle Substitutionen von G, welche auf das System der Functionen (4) angewandt, eine und dieselbe Permutation A_k ihrer Indices hervorbringt, und das Schema giebt daher zugleich ein Bild des *zwischen den Gruppen* G *und* g *bestehenden meroedrischen Isomor-*

phismus, nach welchem jeder Substitution in G eine bestimmte Substitution von g, umgekehrt aber jeder Substitution in g mehrere (im Allgemeinen unendlich viele) Substitutionen von G, speciell der Identität in g die Operationen von Γ entsprechen.

Eine völlig analoge Beziehung besteht natürlich auch zwischen der *Gruppe* G' und der *Monodromiegruppe* g' *von* $f(x, y) = 0$ *mit Bezug auf* x *als Unbekannte und* y *als Parameter.* Die Stellung der Gruppen G und G' zu einander lässt sich daher am einfachsten durch die *symbolischen Gleichungen:*

$$G = g \,.\, \Gamma, \qquad G' = g' \,.\, \Gamma \tag{5}$$

charakterisiren, deren Sinn nach dem Vorhergehenden wohl keiner Erläuterung bedarf.

Im Anschluss hieran soll schliesslich die Bedeutung der beiden extremen Annahmen erörtert werden, welche bezüglich der Gruppe Γ gemacht werden können.

1°. *Reducirt sich* Γ *auf die identische Substitution:* $\Gamma = 1$, so heisst dies, dass jede von der Identität verschiedene Substitution in G den Werth der Function $\eta(s)$ ändert. Man erhält also zu einem Werthe der x ebensoviele Werthe von y, als es Substitutionen in G giebt, und umgekehrt zu einem Werthe des y ebensoviele Werthe von x als Substitutionen in G'. Die Anzahl der Operationen in G und G' ist also endlich, nämlich bezw. gleich n und n', und die Annahme der Existenz einer algebraischen Beziehung $f(\overset{n'}{x}, \overset{n}{y}) = 0$ schliesst die Voraussetzung ein, *dass die beiden Functionen* $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ *und* $s(\lambda', \mu', \nu', y)$ *selbst algebraische Functionen ihrer Argumente seien.*

Zugleich lässt sich aber über den Charakter der Gleichung $f(x,y)=0$ noch eine nähere Angabe machen. Da nämlich die Gruppen G und G' jetzt holoedrisch isomorph auf die Monodromiegruppen g und g' bezogen sind, so zeigt sich, dass die letzteren beide genau einfach transitiv werden. — Welche der Grössen x und y man als Unbekannte, welche als Parameter herausgreifen mag, ist gleichgültig; jedenfalls kann man es durch Adjunction geeigneter numerischer (vom Parameter unabhängiger) Irrationalitäten erreichen, dass sich die algebraische Gruppe der Gleichung $f(x, y) = 0$ auf die betreffende Monodromiegruppe reducirt. Alsdann charakterisirt sich aber diese Gleichung als *ihre eigene Galois'sche Resolvente* und man hat das Resultat: *Alle Zweige der durch die Gleichung* $f(x, y) = 0$ *definirten algebraischen Function* y *von* x (*oder* x *von* y) *lassen sich, sobald* $\Gamma = 1$ *ist, rational durch irgend einen von ihnen darstellen.*

2°. Es mag andererseits die *Gruppe* Γ *mit einer der Gruppen* G *oder* G' *zusammenfallen*, etwa: $\Gamma = G$, so bedeutet dies, dass jede Substitution, welche x ungeändert lässt, auch y nicht ändert. Zu jedem

Werthe des x gehört daher immer nur ein Werth von y, d. h. $n=1$, umgekehrt zu jedem Werthe des y im Allgemeinen mehrere Werthe von x. Da aber beide algebraisch von einander abhängen, so folgt: *Für* $\Gamma = G$ *wird* y *eine rationale Function von* x.

IV.

Classification der s-Functionen. Ueber die Anzahl der möglichen Lösungen des Transformationsproblems.

Die Diophantischen Bedingungen des Art. I gestatten eine Reihe von Schlussfolgerungen, welche es einerseits ermöglichen, einen allgemeinen Satz darüber auszusprechen, innerhalb welcher Grenzen die Kummer'sche Differentialgleichung algebraischer Integrale fähig ist — ein Satz, welcher das Goursat'sche Theorem über die rationalen Integrale umfasst —, andererseits aber in Verbindung mit den gruppentheoretischen Resultaten des Art. II und III geeignet erscheinen, uns der vollständigen Lösung des Transformationsproblems näher zu bringen. — Der Entwickelung dieser Folgerungen sind die beiden letzten Abschnitte dieser Arbeit gewidmet.

Wir übergehen die Fälle algebraischer Transformationen, bei denen von den Exponenten λ, μ, ν (oder λ', μ', ν') noch mindestens einer *willkürlich* bleibt. Alle hierher gehörigen algebraischen Integrale der Kummer'schen Differentialgleichung, welche der Kürze halber gelegentlich unter der Bezeichnung „*Kummer'sche Typen*" zusammengefasst werden mögen, müssen nämlich ohnehin erhalten werden, indem man die Existenz logarithmischer Unstetigkeiten für die zu transformirende s-Function zur Annahme macht. Ueberdies aber wurden diese Fälle von Herrn Goursat bereits behandelt*): er fand, dass nur solche algebraische Transformationen auftreten, welche durch Combination der seit Kummer's Arbeiten bekannten rationalen Transformationen entstehen.

Hierüber hinaus nehmen in der Transformationstheorie noch zwei Classen von Functionen eine Ausnahmestellung ein, welche bedingt, dass wir uns hier nicht näher mit ihnen beschäftigen. Dies sind:

(A) die *algebraischen s-Functionen*,

(B) diejenigen *transcendenten s-Functionen*, welche sich durch *Logarithmen*, *cyklometrische Functionen* und *elliptische Integrale* ausdrücken lassen**).

---

*) Goursat, Sur l'équation différ. linéaire etc. p. 100, f. —

**) Beispiele solcher Functionen sind:

$$s\left(\frac{m'}{m}, 1, 1, x\right) = \sqrt[m]{x^{m'}},$$

Was die *algebraischen* s-Functionen angeht, so besitzen bei ihnen nur die schon anderwärts behandelten *rationalen Transformationen* eigentliches Interesse. Diese treten, wenn überhaupt vorhanden, in *unbegrenzter Anzahl* auf. Ueber die Anzahl der möglichen irrationalen Transformationen giebt der noch abzuleitende Satz näheren Aufschluss. Uebrigens aber gilt die einfache Bemerkung: Sind $\varphi(s, x) = 0$ und $\psi(s, y) = 0$ die algebraischen Gleichungen, welchen irgend zwei Functionen der Kategorie (A) genügen, so enthält das Resultat der Elimination von s aus beiden die zugehörige Transformationsgleichung $f(x, y) = 0$.

Die unter (B) aufgeführten *transcendenten* s-Functionen, welche, allgemein zu reden, der Gattung der *elliptischen Integrale* angehören, theilen mit den vorigen die Eigenschaft, bereits von *rationalen Transformationen* eine *unbegrenzte Mannichfaltigkeit* zuzulassen. Die ausführliche Behandlung ihrer Transformation gehört in die Theorie der elliptischen Functionen und ist durch zahlreiche Untersuchungen schon bis zu einem gewissen Abschluss gefördert worden.

Den Kategorien (A) und (B) stellen sich gegenüber:

(C) die *s-Functionen*, welche als *selbständige Transcendenten* zu betrachten sind.

Der Begriff dieser Gattung von Functionen mag durch die beiden Eigenschaften genauer bestimmt werden, dass

1°. die singulären Punkte $x = 0, \infty, 1$ der Differentialgleichung $[s]_x = R(\lambda, \mu, \nu, x)$ für sie den Charakter wirklicher Verzweigungsstellen besitzen und dass sie

2°. sich nicht auf Functionen der Kategorieen (A) und (B) reduciren sollen.

Die so umgrenzte Kategorie (C) wird den eigentlichen Gegenstand unserer Untersuchung bilden. Sie umfasst insbesondere eine Reihe von s-Functionen mit ganzzahligen Exponenten, wie die aus der Theorie der elliptischen Modulfunctionen bekannten Transcendenten $s(0,0,0,x)$ und $s\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}, x\right)$, welche den Werth des Periodenverhältnisses ω eines elliptischen Integrals 1. Gattung in seiner Abhängigkeit von dem Legendre'schen Modul $x = k^2$ oder der absoluten Invariante $x = J$ darstellen.

In der Folge wird eine Unterscheidung von Wichtigkeit werden, welche sich auf das Vorzeichen der Grössen:

$$s\,(0, 1, 1, x) = \log \text{nat}\, x,$$

$$s\left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, x\right) = \arcsin \sqrt{x},$$

$$s\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, x\right) = \int^{x} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)^2}};\ \text{etc.}$$

$$\varpi = 1 - \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\tau}, \quad \varpi' = 1 - \frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\sigma'} - \frac{1}{\tau'}$$

bezieht. Mit Bezug hierauf mögen daher einige Bemerkungen vorausgeschickt werden.

Zuerst mag an die Modificationen erinnert werden, welche auf pag. 13 für den Fall ganzzahliger Werthe der Exponenten eingeführt wurden: Ist z. B. $x = 0$ ein eigentlicher Verzweigungspunkt und der zugehörige Exponent eine ganze Zahl, so setze man $\lambda = \frac{1}{\varrho}$ und $\lim \varrho = \infty$. Für die zu (C) gehörigen Functionen mit ganzzahligen Exponenten ist daher $0 < \varpi \leqq 1$.

Ist ferner keiner der Exponenten eine ganze Zahl und betrachtet man insbesondere die beiden Classen von Functionen:

$$\text{(I)} \quad s\left(\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{\beta}{2}, \tfrac{\gamma}{m}, x\right), \; s\left(\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{\beta}{3}, \tfrac{\gamma}{3}, x\right), \; s\left(\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{\beta}{3}, \tfrac{\gamma}{4}, x\right), \; s\left(\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{\beta}{3}, \tfrac{\gamma}{5}, x\right),$$

$$\text{(II)} \quad s\left(\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{\beta}{3}, \tfrac{\gamma}{6}, x\right), \; s\left(\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{\beta}{4}, \tfrac{\gamma}{4}, x\right), \; s\left(\tfrac{\alpha}{3}, \tfrac{\beta}{3}, \tfrac{\gamma}{3}, x\right),$$

welche bezw. den Voraussetzungen $\varpi \leqq 0$ entsprechen, und in denen m eine beliebige ganze Zahl, α, β, γ aber irgend solche ganze Zahlen bedeuten, welche zu den ihnen zuertheilten Nennern relativ prim sind, so zeigt die Anwendung der Schwarz'schen Kriterien, dass die unter (I) aufgeführten sämmtlich *algebraisch* sind, während die unter (II) aufgeführten sich auf *elliptische Integrale* zurückführen lassen.

Demnach ist für alle der Kategorie (C) angehörigen Functionen die Voraussetzung $\varpi > 0$ als erfüllt zu betrachten, während alle übrigen s-Functionen neuerdings in zwei Kategorien zerfallen, für welche diese Voraussetzung stattfindet, bezw. nicht stattfindet.

An die Spitze der Discussion der Diophantischen Gleichungen stellen wir folgende, an die Gleichung:

$$n(1-\lambda-\mu-\nu) = n'(1-\lambda'-\mu'-\nu')$$

anknüpfende allgemeine Bemerkung:

Die Vorzeichen der Grösse $\Omega = 1 - \lambda - \mu - \nu$ *bleibt bei jeder algebraischen Transformation, welche man auf die Function* $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ *anwenden mag, ungeändert.*

Hierin ist ein neuer Beleg für die Zweckmässigkeit der von Herrn Schwarz eingeführten Eintheilung der s-Functionen nach dem Vorzeichen von Ω enthalten, welche wir bereits gelegentlich benutzten. Da nämlich nach unserer Vereinbarung in obiger Gleichung λ, μ, ν direct die Verhältnisse der bei der conformen Abbildung auftretenden Dreieckswinkel zu π bedeuten sollen, so fallen wir gerade auf die pag. 22 gemachten Unterscheidungen zurück.

Der transformirte Werth von Ω heisse Ω'. Lässt man den Grenzfall $\Omega = \Omega' = 0$ bei Seite, so stellen, bei Einführung einer geeigneten nichteuklidischen Massbestimmung, die absoluten Werthe der Grössen $\Omega\pi$ und $\Omega'\pi$ bezw. den Flächeninhalt der Dreiecke (λ,μ,ν) und (λ',μ',ν') dar, welche bei der conformen Abbildung durch:

$$s = \mathfrak{F}(\lambda, \mu, \nu, x), \quad s = \mathfrak{F}'(\lambda', \mu', \nu', y)$$

auftreten, und die Relation:

$$n\Omega = n'\Omega'$$

bildet daher, was ihre geometrische Bedeutung angeht, das Analogon zu der in der Theorie der elliptischen Functionen bei der Transformation n^{ter} Ordnung der Perioden:

$$\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2,$$
$$\omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2,$$

auftretenden Relation $ad - bc = n$, welche ausdrückt, dass der Flächeninhalt des ursprünglichen und der des transformirten Periodenparallelogramms sich wie $1 : n$ verhalten.

Ist eine algebraische Transformation:

$$f(x, y) = 0$$

gefunden, welche zwei Functionen $\mathfrak{F}(\lambda, \mu, \nu, x)$ und $\mathfrak{F}'(\lambda', \mu', \nu', y)$ verbindet, so ergeben sich hieraus im Allgemeinen insgesammt 36 Transformationen, indem man auf x und y die Gruppe der 36 simultanen linearen Substitutionen:

$$x' = x,\ \frac{1}{x},\ \frac{x-1}{x},\ \frac{x}{x-1},\ \frac{1}{1-x},\ 1-x,$$
$$y' = y,\ \frac{1}{y},\ \frac{y-1}{y},\ \frac{y}{y-1},\ \frac{1}{1-y},\ 1-y$$

anwendet. Diese Transformationen finden zwischen den s-Functionen statt, welche aus den beiden ursprünglichen durch Permutation der Exponenten hervorgehen. In speciellen Fällen kann sich natürlich die Zahl der auf diese Weise ableitbaren Transformationen reduciren und es wird dann die Gleichung $f(x, y) = 0$ eine solche mit gewissen linearen (zu obiger Gruppe gehörigen) Substitutionen in sich ein.

Wir wollen die Gesammtheit der Transformationen, welche durch die genannten 36 simultanen Substitutionen untereinander zusammenhängen, wie eine einzige auffassen und haben dann die Füglichkeit, unter den möglichen Permutationen der Exponenten jedesmal eine bestimmte nach Belieben herauszugreifen, um an sie unsere Betrachtung anzuknüpfen. Dies soll in der Weise geschehen, dass wir

$$\varrho \leqq \sigma \leqq \tau, \qquad \varrho' \leqq \varrho' \leqq \tau'$$

voraussetzen und im Falle zweier Exponenten mit gleichen Nennern den grösseren Exponenten voranstellen.

Man bemerkt ohne Schwierigkeit, dass das *Diophantische System* solange im Allgemeinen eine *unbegrenzte Anzahl von Lösungen* zulassen wird, als nicht von den in das System eingehenden Zahlen *wenigstens zwei fixirt* sind, als welche man offenbar p in Verbindung mit einer der Zahlen n, n' oder q zu wählen hat.

Unsere Betrachtungen lassen sich unabhängig davon durchführen, welches der drei Zahlenpaare:

$$p \text{ und } n, \quad p \text{ und } n', \quad p \text{ und } q$$

man als gegeben betrachten mag. Indess dürfte es vielleicht am einfachsten und natürlichsten sein, p und n' als gegeben vorauszusetzen*).

Sind die λ, μ, ν als rationale Zahlen gegeben, und $\mathfrak{z}(\lambda, \mu, \nu, x)$ zur Kategorie (C) gehörig, so ist nach dem Früheren:

$$\varpi = 1 - \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\tau}$$

eine bestimmte positive Grösse und aus den Relationen (16), pag. 11, folgt, indem man $r = \frac{n-a}{\varrho}$, etc. setzt, für n die obere Begrenzung:

$$n < \frac{2p+q-2}{\varpi}.$$

Ist über die Exponenten noch keine Verfügung getroffen, so sind vier Fälle zu unterscheiden:

1^0. $r > 0$, $s > 0$, $t > 0$. Die Relationen (15) ergeben:

$$r(\varrho-3) + s(\sigma-3) + t(\tau-3) \leqq 6p + 2q - 6.$$

Demnach können die Grössen ϱ, σ, τ nicht gleichzeitig $\geqq 6p+2q-3$ sein. Ist aber $\tau > 6p + 2q - 3$, so folgt $\varrho = 2$ und wir können, indem wir den Fall $\varrho = \sigma = 2$, der auf Functionen der Kategorieen (A) und (B) führen würde, ausschliessen, $\varrho = 2$, $\sigma > 2$, $\tau \geqq \sigma$ annehmen. Die erste Ungleichung (17) giebt sodann:

$$b + s(\sigma-2) \leqq 2(t+2p+q-2).$$

Hieraus geht unter Berücksichtigung der Beziehung:

$$1 \leqq \frac{\sigma}{\sigma-2} \leqq 3$$

die Kette von Ungleichungen hervor:

$$t\tau \leqq c + t\tau = b + s\sigma \leqq \frac{b\sigma}{\sigma-2} + s\sigma$$

$$\leqq \frac{2\sigma}{\sigma-2}(t+2p+q-2) \leqq 6(t+2p+q-2),$$

aus welcher durch Vergleichung der äusseren Glieder:

$$t(\tau-6) \leqq 6(2p+q-2)$$

d. h. die Begrenzung:

*) In meiner früheren Darstellung liess ich p und q gegeben sein.

$$\tau < 12p + 6q - 5$$

gewonnen wird.

Sonach kommt nur eine bestimmte endliche Anzahl möglicher Systeme der Grössen ϱ, σ, τ in Frage. Für jedes dieser Systeme ist, sobald man es nicht mit den Ausnahmefällen (A) und (B) zu thun hat, $\varpi > 0$ und es gilt wiederum:

$$n < \frac{2p + q - 2}{\varpi}.$$

In den drei noch übrigen Fällen lässt sich die soeben gebrauchte Schlussweise mit unwesentlichen Modificationen wiederholen, so dass es genügen mag, die Resultate anzuführen.

2°. $r > 0$, $s > 0$, $t = 0$.

$$\varrho, \sigma < 6p + 2q - 2 \quad \text{oder} \quad \varrho = 2, \sigma < 12p + 6q - 5,$$

$$n < \frac{2p + q - 2}{1 - \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sigma}}.$$

3°. $r > 0$, $s = t = 0$.

$$\varrho < 6p + 2q - 2,$$

$$n < \frac{2p + q - 2}{1 - \frac{1}{\varrho}}.$$

4°. $r = s = t = 0$.

$$n < 2p + q - 2.$$

Nach dem Gesagten ergiebt sich, so oft p und q oder p und n' gegeben sind, für n eine obere Grenze; denn im letzteren Falle ist q seinerseits durch die Bedingung $q \leqq 3n'$ beschränkt. Somit bleibt nur noch bezüglich des ersten Falles auch für n' eine obere Grenze nachzuweisen, was auf ganz dieselbe Weise, wie soeben für n, geschieht.

Sind n und n' einmal fixirt, so existirt, wie man sofort erkennt, nur eine bestimmte endliche Anzahl von Lösungen des Diophantischen Systems. Letzteres ist dahin zu verstehen, dass alle Grössen, die in das System thatsächlich eingehen, bestimmte endliche Werthe erhalten; denn es kann sehr wohl eintreten, dass von den Grössen ϱ, σ, τ, ϱ', σ', τ' solche, deren Coefficienten r, s, t, r', s', t' Null sind, entweder als unbegrenzt wachsende oder überhaupt als willkürliche Grössen betrachtet werden müssen. Unsere früheren Betrachtungen haben uns aber gezeigt, dass die Riemann'sche Fläche der Transformationsgleichung in einem solchen Falle ihrer Natur nach unabhängig wird von den willkürlich bleibenden Grössen und allein durch diejenigen dem Diophantischen System zu entnehmenden Grössen definirt wird, welchen, wie wir soeben sahen, nur endliche ganzzahlige Werthe innerhalb vorbestimmter Grenzen beigelegt werden können.

Wir fassen die erhaltenen Resultate in folgende Sätze zusammen.

(II) *Soll die Kummer'sche Differentialgleichung*:

$$[x]_y + R(\lambda, \mu, \nu, x) \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = R(\lambda', \mu', \nu', y)$$

algebraische Integrale besitzen, welche nicht unter die „Kummer'schen Typen" gehören, so ist erforderlich, dass die Zahlen $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ *rationale Werthe* $\frac{\alpha}{\varrho}, \frac{\beta}{\sigma}, \frac{\gamma}{\tau}, \frac{\alpha'}{\varrho'}, \frac{\beta'}{\sigma'}, \frac{\gamma'}{\tau'}$ *haben.*

(III) *Sind* λ, μ, ν *gegeben und ist* ϖ *positiv und von Null verschieden, so ergiebt sich nur eine endliche bestimmbare Anzahl algebraischer Integralgleichungen, für welche die Ordnung* n' *in der Variablen* x *und das Geschlecht* p *vorgegebene Werthe haben, andernfalls unendlich viele.*

(IV) *Schliesst man die Fälle* $\varpi \leqq 0$ *aus, so existirt überhaupt nur eine endliche bestimmbare Anzahl wesentlich verschiedener algebraischer Irrationalitäten, welche der Kummer'schen Differentialgleichung genügen und für welche* p *und* n' *gegebene Werthe haben.*

(V) *Nach Ausschluss der Fälle* $\varpi, \varpi' \leqq 0$ *existirt nur eine endliche bestimmbare Anzahl wesentlich verschiedener algebraischer Irrationalitäten, welche der Kummer'schen Differentialgleichung genügen und für deren Riemann'sche Fläche das Geschlecht* p *sowie die Gesammtzahl* q *der Blättercyklen, welche Combinationen der singulären Werthe* $x, y = 0, \infty, 1$ *entsprechen, gegebene Werthe haben.*

Beschränkt man die Betrachtung auf die transcendenten s-Functionen der Kategorie (C), so folgt als Corollar:

(VI) *Die* s*-Functionen der Kategorie* (C) *gestatten (sowohl einzeln, als auch in ihrer Gesammtheit) nur eine endliche angebbare Zahl algebraischer Transformationen von gegebenem Geschlecht* p *und gegebener Ordnung* n'.

V.

Die Riemann'sche Fläche der Transformationsgleichung.

Liegt ein vollständiges Lösungssystem der Diophantischen Gleichungen berechnet vor, so erscheint jetzt das *Transformationsproblem zurückgeführt auf das Problem der Aufstellung der algebraischen Irrationalitäten, welche eindeutige Functionen des Ortes in einer gegebenen Riemann'schen Fläche sind.* Letzteres wird weiterhin dadurch bestimmt, dass diese Fläche in zweierlei Form (als x- und y-Fläche)

definirt ist und ihre Verzweigungspunkte jedesmal bestimmten Werthen der Variablen zugeordnet sind.

Indess wurde bereits am Schlusse des Art. I hervorgehoben, dass noch nicht festgestellt sei, ob immer eine Riemann'sche Fläche *existire*, welche dem gegebenen Lösungssystem entspricht.*) Demnach bleibt durch eine specielle Untersuchung zu entscheiden, ob und auf wievielerlei Weisen durch irgend ein Lösungssystem eine zusammenhängende Riemann'sche Fläche definirt werden kann.

Diese Erwägung lässt die Entwickelung einer Methode wünschenswerth erscheinen, welche in jedem Falle die *Entscheidung über die Möglichkeit des Problems* herbeiführt und zugleich gestattet, mittels einer begrenzten Anzahl von Versuchen alle die gesuchten Riemann'schen Flächen in eindeutiger Weise zu *construiren*. Bei ihrer Aufstellung wird die Unterscheidung einer Reihe von verschiedenen Möglichkeiten unumgänglich, jedoch findet wenigstens der vereinfachende Umstand statt, dass man sich auf die Functionen der Kategorie (C) beschränken kann, da bei den übrigen der in letzter Linie verfolgte Zweck der expliciten Darstellung der Transformationsgleichung als durch bereits bekannte Methoden erreichbar angesehen werden kann.

Wir beginnen mit folgenden allgemeinen Ueberlegungen.

Nach Art. II darf für die Umkehrfunction $\chi(s)$ die Gruppe G der Periodicitätssubstitutionen — rein theoretisch betrachtet — als durch Angabe der λ, μ, ν eindeutig bestimmt angesehen werden, sobald die lineare Transformation:

$$\mathfrak{z} = T_0(\mathfrak{z}_0)$$

bekannt ist, vermöge welcher $\mathfrak{z}(x)$ auf die zum Punkte $x=0$ gehörige Normalform $\mathfrak{z}_0(x)$ zurückgeführt wird. Dieser Umstand giebt die Directive für unsere Betrachtung.

Es seien $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ gegebene rationale Zahlen, welche einem vorgelegten Lösungssystem (Λ) der Diophantischen Gleichungen angehören. Wir denken uns die zu den singulären Punkten $x = 0$, resp. $y = 0$ gehörigen Normalformen:

$$\mathfrak{z}_0(\lambda, \mu, \nu, x), \quad \mathfrak{z}_0'(\lambda', \mu', \nu' y)$$

gebildet. — Gesetzt nun, es existire eine algebraische Gleichung $f(x, y) = 0$, durch deren Vermittelung eine Identität von der Form:

$$\mathfrak{z}(\lambda, \mu, \nu, x) = \mathfrak{z}'(\lambda', \mu', \nu', y)$$

besteht, so können wir offenbar die lineare Transformation:

$$\mathfrak{z} = T_0(\mathfrak{z}_0)$$

nach Willkür ansetzen und haben dann die andere:

*) In der That sind Lösungen des Diophantischen Systems bekannt, welche kein Integral der Kummer'schen Differentialgleichung liefern. Vergl. Goursat, Math. Ann. Bd. 24, p. 457.

$$s' = T_1'(s_0')$$

demgemäss zu bestimmen.

Diese Bestimmung vollzogen gedacht, mögen die Gruppen der Periodicität G und G' für die Umkehrfunctionen $\mathfrak{x}(s)$ und $\mathfrak{y}(s)$ einen Augenblick als thatsächlich bekannt angesehen werden. Wir besitzen dann in der Aufsuchung der ihnen gemeinsamen ausgezeichneten Untergruppe Γ ein Mittel, um zu einer eindeutigen Construction der Riemann'schen Fläche zu gelangen, welche der postulirten Transformationsgleichung entspricht. Existirt nämlich eine von der Identität verschiedene Gruppe Γ, so kann auf bekannte Weise*) innerhalb des Polygonnetzes S der s-Ebene ein aus $2m$ Kreisbogendreiecken (λ, μ, ν) bestehendes „*Fundamentalpolygon*" Σ von solcher Beschaffenheit bestimmt werden, dass jedes Kreisbogendreieck (λ, μ, ν) in S vermöge einer Substitution von Γ mit einem der in Σ enthaltenen „*relativ äquivalent*" wird. Die Zahl m wird hierbei als „*Index*" der Untergruppe Γ mit Bezug auf G bezeichnet. Dieses Fundamentalpolygon Σ (welches noch mannichfacher äquivalenter Modificationen fähig ist, die indess hier unberücksichtigt bleiben können) lässt sich in S als zusammenhängendes Ganze ausbreiten und seine freien Kanten werden einander paarweise durch Substitutionen von Γ zugeordnet. In analoger Weise wird aus S' ein von $2m'$ Kreisbogendreiecken (λ', μ', ν') gebildetes Fundamentalpolygon Σ ausgeschieden, wo m' der Index von Γ mit Bezug auf G' ist.

Unsere Voraussetzung verlangt nun geradezu, dass die Polygone Σ und Σ', vermöge der Zusammenordnung ihrer Kanten als geschlossene Mannichfaltigkeiten betrachtet, die zu $f(x, y) = 0$ gehörigen Riemann'schen Flächen über der x- resp. y-Ebene repräsentiren. Demnach erübrigt nur, durch eine einfache Vergleichung zu entscheiden, ob die Polygone Σ und Σ' den Daten des Lösungssystems (Λ) entsprechen, wozu insbesondere erforderlich ist, dass $m = n$ und $m' = n'$ sei.**) Ist dies der Fall, so ist nicht nur die Existenz der gesuchten Riemann'schen Fläche erwiesen, sondern auch der Weg zu ihrer Aufstellung gefunden.

Der practischen Anwendung des geschilderten Verfahrens stellt

*) Man vergl. Dyck, Gruppentheoretische Studien, I. Math. Ann. Bd. 20, Klein, Ueber die Transformation der elliptischen Functionen. Math. Ann. Bd. 14, Hurwitz, Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Math. Ann. Bd. 18.

**) Findet sich an Stelle obiger Beziehungen: $m = ln$, $m' = ln'$, wo l eine ganze Zahl bedeutet, und ist $p > 0$, so leite man aus dem gegebenen Lösungssysteme (Λ) ein neues $(\Lambda)_1$ ab, indem man $p_1 = l(p-1) + 1$ und für q_1, n_1, n_1', $r_1, \ldots, t_1'$, $a_1, \ldots c_1'$, $(\delta_{ik})_1$, $(\delta_{ik}')_1$ die mit l multiplicirten Zahlen q, n, n', etc. einsetzt, alle übrigen Grössen aber, insbesondere $\lambda, \mu, \ldots, \nu'$ unverändert von (Λ) in $(\Lambda)_1$ herübernimmt. Hierauf betrachte man das Lösungssystem $(\Lambda)_1$ als das gegebene.

sich im Allgemeinen die Unmöglichkeit entgegen, die unendlich vielen Substitutionen der Gruppen G und G' explicite darzustellen, oder doch unter eine allgemeine Form zu bringen, deren unbestimmte Coefficienten nur an gewisse Bedingungen gebunden sind, wie dies etwa bei den Gruppen ganzzahliger linearer Substitutionen geschieht, welche durch Congruenzen nach einem Zahlenmodul definirt werden. Die hiermit gekennzeichnete Schwierigkeit wird aber durch den Nachweis gehoben, *dass es zur Aufstellung der gesuchten Riemann'schen Fläche nur der Kenntniss einer begrenzten Anzahl von Substitutionen der Gruppen G und G' bedarf*, welche durch die uns bekannten erzeugenden Operationen jederzeit dargestellt werden können.

Dies vorausgeschickt, wenden wir uns zur Bestimmung der linearen Transformation T_1 bei gegebenem T_0.

Aus der Definition der Gruppe G ist ersichtlich, dass jede ihrer Substitutionen V einen bezw. zwei von den Eckpunkten des Netzes S festlässt, übrigens aber den zu den Kreisen dieses Netzes gehörigen Orthogonalkreis $\mathfrak{K}$ in sich überführt. Ist nämlich die betreffende Substitution V eine elliptische, so lässt sie zwei in Bezug auf $\mathfrak{K}$ conjugirte Punkte fest, welche entweder ($\mathfrak{K}$ imaginär) beide Eckpunkte von S sind, oder von denen ($\mathfrak{K}$ reell) wenigstens einer Eckpunkt von S ist. Ist V dagegen eine parabolische oder hyperbolische Substitution, so bleiben zwei zusammenfallende, bezw. von einander verschiedene Punkte des in diesem Falle reellen Hauptkreises $\mathfrak{K}$ einzeln ungeändert. — Es wird genügen, die Untersuchung für diesen Fall durchzuführen, dass jede der Gruppen G und G' einen reellen Hauptkreis besitzt, da die hierbei sich ergebenden Resultate ohne Schwierigkeit auf den Fall eines imaginären Hauptkreises übertragen werden können. Endlich dürfen wir voraussetzen, dass die Gruppe Γ nicht bloss aus den Wiederholungen einer einzelnen Substitution bestehe, was auf den Fall elementarer Functionen der Kategorien (A) und (B), wie:

$$\mathfrak{z}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{2}, x\right) = \sqrt[m]{1 - 2x + 2\sqrt{x(x-1)}},$$

$$\mathfrak{z}\left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, x\right) = \arcsin\sqrt{x},$$

führen würde.

Wir setzen $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0$ und denken uns gemäss der Beziehung $s = \mathfrak{z}_0(x)$ in der Ebene (s) als Bild der positiven Halbebene (x) ein Ausgangsdreieck (λ, μ, ν) mit den Ecken A, B, C markirt. A liege bei $s = \infty$ und von den geradlinigen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ falle erstere mit der reellen Axe zusammen (cf. pag. 20, Anm.). Der reelle Orthogonalkreis $\mathfrak{K}$ wird sich entweder

α) als eine *gerade Linie* oder

β) als ein *Kreis um den Nullpunkt*

darstellen, und zwar tritt Ersteres ein, wenn $x = 0$ für $\mathfrak{z}_0(x)$ ein logarithmischer Unstetigkeitspunkt ist, Letzteres, wenn $\mathfrak{z}_0(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ den Charakter einer algebraischen Function besitzt. Durch symmetrische Reproduction des Dreiecks ABC wird das eine der beiden Gebiete, in welche die s-Ebene durch $\mathfrak{K}$ zerfällt, mit den unendlich vielen Dreiecken (λ, μ, ν) des Netzes S überdeckt; dieses Gebiet heisse R. — In einer zweiten Ebene (s') denken wir uns auf ganz dieselbe Art ein Ausgangsdreieck (λ', μ', ν') mit den Ecken A', B', C' construirt, welches vermöge der Beziehung $s' = \mathfrak{z}_0'(y)$ der positiven Halbebene (y) entspricht. Das von dem gleichfalls reellen Orthogonalkreis $\mathfrak{K}'$ begrenzte, mit den symmetrischen Wiederholungen des Dreiecks $A'B'C'$ zu überdeckende Gebiet heisse R'.

Nun ist klar, dass die beiden *Gruppen G und G' einen und denselben Hauptkreis besitzen müssen.* Denn, gesetzt, dies sei nicht der Fall, so müssten die Substitutionen von Γ zwei verschiedene Kreise in sich überführen, überdies aber noch mindestens einen Eckpunkt von S (bezw S') festlassen, was nur möglich ist, wenn sich Γ auf die Identität reducirt oder doch wenigstens nur aus den Wiederholungen einer einzelnen Substitution besteht. Beide Annahmen sind hier auszuschliessen.

Demnach muss die lineare Transformation $\mathfrak{z}' = T_1(\mathfrak{z}_0')$ die Eigenschaft haben, dass durch die Beziehung:

$$s = T_1(s')$$

das Gebiet R' der Ebene (s') conform auf das Gebiet R der Ebene (s) abgebildet wird. Nun giebt es ∞^3 lineare Transformationen, welche eine Kreisfläche auf eine andere Kreisfläche conform abbilden. Durch die obige Forderung sind also erst 3 von den 6 in den complexen Coefficienten der linearen Transformation T_1 enthaltenen Constanten bestimmt; es bleibt die Verfügung über die drei übrigen offen.*)

Zur Bestimmung derselben dient die Bemerkung, dass die beiden Fundamentalpolygone Σ und Σ', mithin überhaupt die beiden Polygonnetze S und S' in der Ebene (s) mindestens zwei von einander verschiedene Eckpunkte gemein haben müssen. Von den ihnen entsprechenden Werthepaaren 1. Art (x, y) kann wenigstens das eine durch eine geeignete Permutation der Exponenten λ, μ, ν und λ', μ', ν' in das Werthepaar $(0, 0)$ übergeführt werden; das andere sei (ξ, η), wo ξ und η je eine der Zahlen $0, \infty, 1$ bedeutet. Welche zwei der zu $x = 0$ innerhalb R und zu $y = 0$ innerhalb R' gehörigen Punkte man

*) Mit anderen Worten: die Transformation T_1 ist vorläufig nur bestimmt bis auf eine zutretende lineare Transformation, welche den Kreis $\mathfrak{K}$ in sich überführt; von solchen giebt es wieder ∞^3. Wird der Kreis $\mathfrak{K}$ imaginär, so treten an ihre Stelle die ∞^3 Bewegungen in einer Kugelfläche, wenn er in den unendlichfernen Punkt ausartet, die ∞^3 Bewegungen in der Ebene.

einander zuordnet, ist gleichgültig, da die zu $s = \mathfrak{z}_0(x)$ und $s' = \mathfrak{z}_0'(y)$ gehörigen Riemann'schen Flächen in Bezug auf alle diese Punkte symmetrisch sind. Also weise man etwa die Punkte A und A' einander zu und verlange demnach, dass durch die Gleichung $s = T_1(s')$ nicht nur R' auf R, sondern auch A' auf A abgebildet werde.

Durch diese Forderung ist T_1 bis auf eine beliebig zutretende lineare Transformation bestimmt, welche A festlässt und $\mathfrak{R}$ in sich überführt. Diese letztere charakterisirt sich demnach entweder

α) als eine *Parallelverschiebung* der s-Ebene längs der Geraden $\mathfrak{R}$ oder

β) als eine reine *Drehung* um den Punkt $s = 0$.

Endlich zeigt sich, dass diese Translation, bezw. Rotation nur auf eine endliche Anzahl von Arten so gewählt werden kann, dass auch der letzten Bedingung genügt werde, einen zu $y = \eta$ gehörigen Punkt in R' auf einen zu $x = \xi$ gehörigen in R abzubilden.

Man bilde nämlich, von dem Dreieck ABC ausgehend, innerhalb R auf alle möglichen Arten ein zusammenhängendes Polygon aus $2n$ abwechselnd der positiven und negativen Halbebene (x) entsprechenden Dreiecken (λ, μ, ν). Dies sei auf N Arten möglich und die erhaltenen Polygone seien:

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_N;$$

die zu diesen Polygonen gehörigen Punkte aber, welche dem Werthe $x = \xi$ entsprechen, seien:

$$P_1, P_2, \ldots, P_M.$$

Ebenso bilde man innerhalb R', von $A'B'C'$ ausgehend, auf alle möglichen Arten ein zusammenhängendes Polygon aus $2n'$ Dreiecken (λ', μ', ν'). Die hierbei erhaltenen Polygone seien:

$$\Sigma_1^0, \Sigma_2^0, \ldots, \Sigma_{N'}^0,$$

und die in ihnen zu $y = \eta$ gehörigen Punkte:

$$P_1', P_2', \ldots, P_{M'}'.$$

Existirt nun überhaupt eine lineare Transformation T_1, die den zu stellenden Anforderungen entspricht, so können die zu $x = \xi$ resp. $y = \eta$ gehörigen von A resp. A' verschiedenen Punkte in R und R', welche durch sie in einander übergeführt werden sollen, nur unter den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_M$ und $P_1', P_2', \ldots, P_{M'}'$ gesucht werden und die gesuchte Transformation T_1 ist daher jedenfalls *endlichdeutig bestimmt.*

Es sei T_1 eine lineare Transformation der geforderten Art, so bilde man mittels der Gleichung $s = T_1(s')$ das Gebiet R' ab auf R. Hierbei mögen aus den Polygonen $\Sigma_1^0, \Sigma_2^0, \ldots, \Sigma_{N'}^0$ die neuen Polygone:

$$\Sigma_1', \Sigma_2', \ldots, \Sigma_{N'}'$$

hervorgehen. — Nach dem Früheren können dann die beiden in den Gruppen G und G' enthaltenen endlichen Complexe H und H' von Substitutionen gebildet werden, welche bezw. die den Polygonen $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$ und $\Sigma_1', \ldots, \Sigma_{N'}'$ angehörigen Kreisbogendreiecke (λ, μ, ν) und (λ', μ', ν') sowie deren freie Kanten in einander überführen. Bezeichnet endlich H den Complex derjenigen Substitutionen, die gleichzeitig in H und H' enthalten sind, so muss es unter den oben aufgeführten, wenn nicht mehrere äquivalente, so doch wenigstens ein Fundamentalpolygon Σ und dementsprechend ein Polygon Σ' geben, dessen freie Kanten durch Substitutionen von H einander zugewiesen werden und welches keine zwei mit Bezug auf H relativ äquivalenten Dreiecke umfasst. Sind diese Fundamentalpolygone gefunden und entsprechen sie dem vorgelegten Lösungssystem (Λ), so ist die Aufgabe, die durch (Λ) definirte Riemann'sche Fläche aufzustellen, als gelöst zu betrachten; denn offenbar stellen die geschlossenen Polygone Σ und Σ' direct die Riemann'schen Flächen der Transformationsgleichung über der x- resp. y-Ebene dar.

Die erhaltenen Resultate lassen sich dahin aussprechen:

(VII) *Durch ein gegebenes Lösungssystem der Diophantischen Gleichungen ist das Transformationsproblem endlichdeutig bestimmt.*

Die geschilderten, einigermassen umständlichen Operationen, welche zur Aufstellung der gesuchten Riemann'schen Flächen führen, lassen sich, wie man an der Hand des in Art. I behandelten Beispiels beurtheilen mag, im concreten Falle noch wesentlich abkürzen, indem man sich häufig auf eine rein geometrische Discussion beschränken kann, während wiederum in anderen Fällen (Modulfunctionen) die gruppentheoretische Behandlung Vortheile gewähren wird.

Was die Aufgabe der *expliciten Darstellung der Transformationsgleichung* betrifft, für welche die Riemann'sche Fläche bekannt ist, so beherrscht man ihre Lösung bis jetzt nur in den niedersten Fällen.

Ist das Geschlecht $p=0$, so lassen sich x und y bekanntlich rational durch einen Parameter Θ darstellen, als welchen man diejenige eindeutige Function des Ortes in der Riemann'schen Fläche einzuführen hat, durch welche sich alle übrigen rational darstellen. Da Θ durch diese Bedingung nur bis auf eine lineare Transformation bestimmt ist, so kann Θ noch drei unabhängigen Bedingungen nach Willkür unterworfen werden. Setzt man hierauf:

$$x \cdot \psi_1(\Theta) - \varphi_1(\Theta) = 0,$$
$$y \cdot \psi_2(\Theta) - \varphi_2(\Theta) = 0,$$

wo φ_1, ψ_1 ganze Functionen n^{ten} Grades und φ_2, ψ_2 ganze Functionen n'^{ten} Grades bezeichnen, so entsprechen die Werthe x und y, für welche

diese Gleichungen in Θ vielfache Wurzeln aufweisen, den Verzweigungsstellen der Riemann'schen Flächen über der x- resp. y-Ebene. Da aber diese Stellen in unserem Falle nur bei $x, y = 0, \infty, 1$ liegen können, so kann man an der Hand der Daten des gegebenen Lösungssystems (Λ) die Functionen $\varphi_1, \psi_1, (\varphi_1 - \psi_1)$ sowie $\varphi_2, \psi_2, (\varphi_2 - \psi_2)$ der Art nach mit unbestimmten Coefficienten anschreiben, worauf in Rücksicht auf die evidenten Identitäten:

$$\varphi_1 - \psi_1 = (\varphi_1 - \psi_1),$$
$$\varphi_2 - \psi_2 = (\varphi_2 - \psi_2)$$

die Coefficienten durch Vergleichung ausgewerthet werden können. Schliesslich ist noch Θ zu eliminiren.*) — Weit schwieriger gestaltet sich die Aufgabe bereits, wenn $p = 1$ ist.

Weitere Fortschritte in der Lösung des hier angeregten Problemes sind erst zu erwarten, wenn es gelungen sein wird, die s-Functionen bezw. diejenigen Functionen mit linearen Substitutionen in sich, welche aus ihrer Umkehrung entspringen, in bequeme und rasch convergirende Reihen zu entwickeln.

Beispiel.

Zum Schlusse dieser Arbeit mag ein der Theorie der Modulargleichungen entnommenes Beispiel für die Aufstellung der Riemann'schen Fläche der Transformationsgleichung mit Benutzung gruppentheoretischer Hülfsmittel gegeben werden, welches meines Wissens bisher noch nicht behandelt wurde.

Wir wählen die Function $s\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}, x\right)$, welche bekanntlich das Periodenverhältniss ω eines elliptischen Integrals 1. Gattung, abhängig von der absoluten Invariante $x = J$, darstellt und betrachten diejenige algebraische Umformung der Differentialgleichung:

$$[\omega]_J = \frac{32 - 41J + 36J^2}{72J^2(1-J)^2}$$

in sich, welche auf die zur Transformation 11. Ordnung der elliptischen Functionen gehörige Modulargleichung:

$$f(J, \bar{J}) = 0$$

zwischen den absoluten Invarianten führt.

Zu diesem Ende setzen wir:

$$\omega = s\left(\tfrac{1}{3}, 0, \tfrac{1}{2}, J\right), \quad \bar{\omega} = s\left(\tfrac{1}{3}, 0, \tfrac{1}{2}, \bar{J}\right), \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{11}$$

*) Näheres findet man in der bereits citirten Abhandlung: Ueber die Transformation d. ellipt. Functionen, Math. Ann. Bd. 14, in welcher Herr Klein die zur Aufstellung der Modulargleichungen führenden Principien allgemein entwickelt, und speciell die Fälle $p = 0$ ausführlich behandelt hat.

und denken uns $\mathfrak{z}$ so bestimmt, dass durch Vermittelung von $\omega = \mathfrak{z}(J)$ die positive Halbebene (J) auf ein Ausgangsdreieck $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}\right)$ der Ebene (ω) abgebildet wird, dessen Ecken resp. bei:

$$\omega = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}),\ \infty,\ i$$

liegen*). Zu den Umkehrfunctionen:

$$J = \mathfrak{x}(\omega), \quad \overline{J} = \mathfrak{x}(\overline{\omega})$$

gehören dann als Gruppen der Periodicität die ganzzahligen linearen Gruppen:

$$\text{(G)} \qquad \omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1;$$

$$\text{(G')} \qquad \overline{\omega}' = \frac{a\overline{\omega} + b}{c\overline{\omega} + d}, \quad ad - bc = 1,$$

und die ihnen gemeinsame ausgezeichnete Untergruppe Γ wird aus G durch die Bedingung:

$$\beta \equiv 0 \pmod{11}$$

ausgeschieden.

Demnach ist es leicht, die Riemann'sche Fläche der Gleichung $f(J, \overline{J}) = 0$ zu bilden, welche dem Umstande entsprechend, dass das zugehörige Lösungssystem (Λ) bei Vertauschung der nichtaccentuirten Buchstaben mit den gleichbezeichneten accentuirten in sich übergeht, eine eindeutige Transformation in sich von der Periode 2 besitzt (Vertauschbarkeit von J und $\overline{J}$ in der Modulargleichung). Man findet nämlich:

$$\begin{gathered} n = n' = 12, \quad p = 1, \quad q = 2, \\ \alpha = \alpha' = \beta = \beta' = \gamma = \gamma' = 1, \\ \varrho = \varrho' = 3, \quad \sigma = \sigma' = \infty, \quad \tau = \tau' = 2, \\ a = a' = 0, \quad b = b' = 12, \quad c = c' = 0, \\ r = r' = 4, \quad s = s' = 0, \quad t = t' = 6 \end{gathered}$$

und alle $\delta_{ik} = \delta'_{ik} = 0$ bis auf $\delta_{22} = \delta'_{22} = 12$, deren Zerlegung in $q = 2$ Summanden durch:

$$\delta_{22} = 1 + 11, \quad \delta'_{22} = 11 + 1$$

angedeutet werden mag:

Ist ω ein Werth, welcher durch einen Punkt des Ausgangsdreiecks repräsentirt wird, so können die zu $J = \mathfrak{x}(\omega)$ gehörigen Werthe $\overline{J}$ durch:

$$\mathfrak{x}\left(-\frac{1}{11\omega}\right), \quad \mathfrak{x}\left(\frac{\omega \pm m}{11}\right),$$
$$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

*) S. Klein, a. a. O. Math. Ann. Bd. 14.

dargestellt werden. Man construire also von dem Ausgangsdreieck $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}\right)$ anfangend die $2 \cdot 12$ äquivalenten den Repräsentanten:

$$-\frac{1}{\omega}, \quad \omega \pm m$$

entsprechenden Dreiecke und suche die Substitutionen von Γ auf, welche die freien Kanten des von ihnen gebildeten Fundamentalpolygons Σ aneinander binden. Die 24 Dreiecke von Σ sind äquivalent mit 24 anderen Dreiecken $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}\right)$, welche leicht construirt werden, indem man mit der zur Gruppe G gehörigen bekannten Eintheilung der ω-Ebene eine im 11-fachen Massstabe ausgeführte zur Deckung bringt.

In Fig. 4 ist das doppelt eingetheilte Fundamentalpolygon Σ dargestellt. Ueber die Zusammengehörigkeit seiner freien Kanten durch Substitutionen von Γ giebt Fig. 5 und die nachfolgende Tabelle Aufschluss. Endlich erscheint in der (schematisch zu verstehenden) Fig. 6, die durch Σ definirte Riemann'sche Fläche ($p=1$) mittels einer geeigneten Deformation in die Form eines Parallelogramms übergeführt, dessen gegenüberliegende Seiten einander zugewiesen sind. Bei der eindeutigen Transformation der Riemann'schen Fläche in sich werden die Punkte O und O' vertauscht:

Tabelle zu Fig. 4 und 5.

Zusammengehörige Kanten:	Verbindende ω-Substitutionen:	festbleibende Elemente:	Charakter d. Subst.
1 und 24	$\omega' = \omega + 11$	$\omega = \infty$ (doppelt)	parabolisch,
2 „ 9 3 „ 8	$\omega' = \frac{-2\omega - 11}{\omega + 5}$	$\omega = \frac{1}{2}(-7 \pm \sqrt{5})$	hyperbolisch,
4 „ 19 5 „ 18	$\omega' = \frac{3\omega + 11}{\omega + 4}$	$\omega = \frac{1}{2}(-1 \pm 3\sqrt{5})$	„
6 „ 21 7 „ 20	$\omega' = \frac{4\omega + 11}{\omega + 3}$	$\omega = \frac{1}{2}(1 \pm 3\sqrt{5})$	„
16 „ 23 17 „ 22	$\omega' = \frac{5\omega - 11}{\omega - 2}$	$\omega = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{5})$	„
10 „ 15 11 „ 14 12 „ 13	$\omega' = \frac{\omega}{\omega + 1}$	$\omega = 0$ (doppelt)	parabolisch.

Dresden, Mitte Januar 1886.

Beiträge zur Theorie der algebraischen Flächen.

Erster Theil.

Zur Theorie der Steiner'schen Kernflächen.

Von

A. Voss in München.

Unter der k^{ten} Polare eines Punktes y in Bezug auf eine allgemeine Fläche n^{ter} Ordnung

$$f = (a_x)^n = 0,$$

sei verstanden die Form

$$(a_x)^{n-k}(a_y)^k = 0.$$

Die Bedingung, dass dieselbe im Punkte x einen Doppelpunkt habe, wird bekanntlich ausgedrückt durch die Gleichungen

$$(a_x)^{n-k-1}(a_y)^k a_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

aus denen durch Elimination der x sich die Gleichung einer Fläche S_k ergiebt, für deren Punkte die k^{ten} Polaren einen Doppelpunkt haben, während diese Doppelpunkte selbst eine Fläche H_k bilden. Gleichzeitig besitzt dann, wie bekannt, die $n - k - 1^{\text{te}}$ Polare des Punktes x von H_k einen Doppelpunkt im Punkte y von S_k. Die beiden Flächen S_k, H_k, welche ich *conjugirte Kernflächen k^{ter} Ordnung in Bezug auf die Ordnungsfläche $f = 0$* nenne — und zwar mag S_k die k^{te} Steiner'sche Fläche, H_k die k^{te} Hesse'sche heissen — sind, wie man sieht, eindeutig auf einander bezogen. Es soll sich im folgenden darum handeln, die Singularitäten dieser Flächen, welche auf's engste mit der Polarentheorie der algebraischen Flächen verbunden sind, zu untersuchen. Von diesen Flächen hat bisher nur der Fall $k = 1$, in welchem S_1 und H_1 in die (erste) Steiner'sche und Hesse'sche Fläche übergehen, wegen seiner Beziehungen zur Theorie der Flächen dritter Ordnung die Aufmerksamkeit der Geometer auf sich gezogen; insbesondere ist der Fall $n = 3$ sehr ausführlich von Herrn Sturm in seinen synthetischen Untersuchungen über die Fläche dritter Ordnung behandelt

worden, während für ein beliebiges n ausser den von Herrn Cremona entwickelten Sätzen nur eine noch weiter zu erwähnende Arbeit von Herrn Bäcklund vorliegt.*)

Die Aufgabe kommt, wie man sieht, auf die Untersuchung eines eindeutig auf einander bezogenen Flächenpaares zurück, welches durch vier biquaternäre Gleichungen, allerdings von einer besonderen Form, definirt ist.

Nun hat Herr Krey bereits den allgemeinen Fall des eindeutigen Entsprechens behandelt, welcher durch vier biquaternäre Gleichungen ausgedrückt wird**). Einerseits aber lassen sich die von Herrn Krey gefundenen anzahlgeometrischen Resultate nicht auf den vorliegenden Fall übertragen, weil die Flächen S_k, H_k speciellere Singularitäten enthalten, andererseits werden in der genannten Arbeit neben den von Herrn Schubert aufgestellten Correspondenzformeln complicirte algebraische Hülfsmittel, wie z. B. die Vorstellung allgemeiner Resultantenbildungen, herangezogen, was für den vorliegenden Zweck wenigstens entbehrlich ist. Diess veranlasste mich, in § 1 den von Herrn Krey behandelten Fall auf einem anderen Wege zu untersuchen, welcher zeigt, wie derselbe mit Hülfe der einfachsten rein algebraischen Formenbildungen erledigt werden kann, und der zugleich eine Ausdehnung auf das speciellere Problem gestattet.

Daran knüpfe ich im § 2 die analoge Untersuchung über ein Curvenpaar, welches durch fünf biquaternäre Gleichungen gegeben ist. In § 3 bespreche ich sodann einen speciellen Fall des § 1, in welchem die eindeutig auf einander bezogenen Flächen auch Rückkehrcurven enthalten. Es gelingt hier mit Hülfe einfacher Abzählungen direct fast alle charakteristischen Singularitäten dieser Flächen zu finden; die übrigen ergeben sich aus denselben vermöge bekannter Formeln. In § 4 beweise ich ein allgemeines Theorem über die Polarflächen einer beliebigen Ordnung und zeige, wie die Betrachtungen des § 3 unmittelbar auch die sämmtlichen Singularitäten der Flächen S_k, H_k liefern. § 5 enthält endlich eine weitere Ausführung der Verhältnisse, welche bei der ersten Steiner'schen und Hesse'schen Fläche auftreten.

Erst nachdem die sämmtlichen Resultate dieser Arbeit gefunden waren, ward ich auf die bereits oben erwähnte, an interessanten Sätzen reichhaltige Abhandlung des Herrn Bäcklund „Om geometriska ytor, kongliga Svenska vetenskaps — Academiens Handlingar, tom. IX, 1871" aufmerksam, in welcher die Enveloppe der Polarebenen einer Fläche in Bezug auf eine beliebige andere untersucht wird. Herr Bäcklund

*) Cremona, Theorie der algebr. Oberflächen, Cap. X.

**) Diese Annalen Bd. XVIII, S. 82, Ueber einen besonderen Fall des eindeutigen Entsprechens der Punkte zweier Flächen.

ermittelt daselbst auch am Schluss eine grosse Zahl der Singularitäten der Steiner'schen Fläche S*). Obwohl also einige der im § 5 meiner Arbeit hergeleiteten Resultate nicht neu sind, habe ich sie doch nicht unterdrücken wollen, da sie sowohl auf einem ganz anderen Wege gefunden sind, als auch manche wesentliche Ergänzung enthalten. Von diesen führe ich hier nur ein allgemeines Theorem an, welches sich auf die parabolische Curve der Steiner'schen Fläche einer beliebigen Mannigfaltigkeit bezieht, nach welchem jene Curve immer durch diejenigen Punkte auf der Hesse'schen Fläche charakterisirt wird, deren Tangentenebenen den zugehörigen Punkt der Steiner'schen Fläche enthalten. Ausserdem enthält der § 5 ein weiteres Beispiel für die schöne Theorie des eindeutigen Entsprechens zweier Flächen, welche Herr Zeuthen im vierten und zehnten Bande dieser Annalen auseinandergesetzt hat.

Im zweiten Abschnitte dieser Beiträge beabsichtige ich das von Herrn Fiedler seit einer Reihe von Jahren gestellte Problem, welches die zu zwei eindeutig auf einander bezogenen Flächen gehörigen Strahlensysteme betrifft, und welches meines Wissens bisher keine Lösung erfahren hat, zu behandeln**).

§ 1.

Eindeutiges Entsprechen von zwei Flächen vermöge vier biquaternärer Gleichungen.

Es seien vier biquaternäre Gleichungen

$$f_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

zwischen den homogenen Coordinaten x_i, y_i, $i = 1, 2, 3, 4$ gegeben, welche in Bezug auf dieselben von den Geraden m_j, n_j sein mögen. Durch die Gleichungen (1) sind zwei Flächen F_x, Φ_y eindeutig auf einander bezogen, welche bezüglich von den Ordnungen

$$F = m_1 n_2 n_3 n_4 + m_2 n_1 n_3 n_4 + m_3 n_1 n_2 n_4 + m_4 n_1 n_2 n_3,$$
$$\Phi = n_1 m_2 m_3 m_4 + n_2 m_1 m_3 m_4 + n_3 m_1 m_2 m_4 + n_4 m_1 m_2 m_3,$$

sind. Durch die Verbindungsgeraden der correspondirenden Punkte x, y entsteht ein *Strahlensystem* von der *Classe*

$$\mathsf{E} = m_1 m_2 n_3 n_4 + m_1 m_3 n_2 n_4 + m_1 m_4 n_2 n_3 + m_2 m_3 n_1 n_4 + m_2 m_4 n_1 n_3 + m_3 m_4 n_1 n_2;$$

E ist, wie man sieht, zugleich die Ordnung der Curven auf F_x und Φ_y,

---

*) Vergl. namentlich § 61—64 der erwähnten Abhandlung, sowie die im § 5 dieser Arbeit angegebenen Citate.

**) Salmon-Fiedler, Geometrie d. Raumes 3te Auflage, pag. LX.

welche den ebenen Schnittcurven von Φ_y und F_x entsprechen. Treten zu den Gleichungen (1) noch zwei neue biquaternäre Gleichungen von den Graden m_5, n_5; m_6, n_6 in den Coordinaten x, y hinzu, so ist die *Anzahl der den 6 Gleichungen zugleich genügenden Punktepaare*, wie Herr Krey*) bemerkt, gleich dem übrigens in sämmtlichen m, n symmetrischen Ausdrucke

$$m_5 m_6 F + n_5 n_6 \Phi + (m_5 n_6 + m_6 n_5) \mathsf{E}.$$

Die Untersuchung der Fläche Φ_y lässt sich nun auf folgendem Wege führen. Aus den Gleichungen (1) ergiebt sich durch Differentiation das System

$$(2) \qquad \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i + \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial y_i} dy_i = 0, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

Vermöge derselben kann man zu den Differentialen dx_i einer Fortschreitungsrichtung auf F_x die entsprechenden dy_i auf Φ_y eindeutig berechnen, so lange nicht die Determinante

$$(3) \qquad \Omega_y = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} & \frac{\partial f_1}{\partial y_4} & \alpha_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_3} & \frac{\partial f_2}{\partial y_4} & \alpha_2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} & \frac{\partial f_3}{\partial y_3} & \frac{\partial f_3}{\partial y_4} & \alpha_3 \\ \frac{\partial f_4}{\partial y_1} & \frac{\partial f_4}{\partial y_2} & \frac{\partial f_4}{\partial y_3} & \frac{\partial f_4}{\partial y_4} & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 \end{vmatrix},$$

für beliebige Werthe der α, β verschwindet. Ebenso erhält man die Gleichung der Tangentialebene der Fläche Φ_y im Punkte y, wenn man in der Determinante

$$(4) \qquad \Omega_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \alpha_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \alpha_2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \alpha_3 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 \end{vmatrix},$$

an Stelle der α_j die nach den y genommenen totalen Differentiale der f_j einsetzt und die dy_i durch die laufenden Coordinaten Y_i ersetzt. Beseitigt man dann den zufolge der Gleichungen (1) in Ω_x enthaltenen Factor β_x, so erhält dieselbe die Form

*) a. a. O.

$$(5) \qquad \sum_{i,j} Y_i \frac{\partial f_j}{\partial y_i} p_j = \frac{1}{\beta_x} \sum_{i,j} \frac{\partial \Omega_\chi}{\partial \alpha_j} \frac{\partial f_j}{\partial y_i} Y_i = 0,$$

in welcher die Coefficienten von Y biquaternäre Formen von den Geraden

$$\mathsf{M}-4, \quad \mathsf{N}-1 \quad \text{in} \quad x, y$$

sind, falls man zur Abkürzung

$$\mathsf{M} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4,$$
$$\mathsf{N} = n_1 + n_2 + n_3 + n_4,$$

setzt.

Man erhält daher sofort die Ordnung a des Tangentenkegels von Φ_y *mit der Spitze* Y, wenn man mit den Gleichungen (1) und (5) noch die Gleichung

$$(a_Y)(b_y) - (b_Y)(a_y) = 0,$$

verbindet, welche aussagt, dass die Verbindungslinie Yy von der willkürlichen Geraden

$$(a_z) = 0, \quad (b_z) = 0,$$

getroffen wird, also

$$(6) \qquad a = (\mathsf{N}-1)\,\Phi + (\mathsf{M}-4)\,\mathsf{E}.$$

Im allgemeinen können die Determinanten Ω_x, Ω_y nur für eine bestimmte Zahl von Punkten verschwinden, wenn die Gleichungen (1) bestehen, denn das Verschwinden von Ω_x oder Ω_y ist *zwei* unabhängigen Bedingungen äquivalent. Einem Punktepaar, für das $\Omega_x = 0$ ist, entspricht nicht mehr eine bestimmte Tangentialebene (2) von Φ_y, sondern es gehören dazu unendlich viele, welche ein Büschel bilden, dessen Axe durch den Punkt y geht. In der That erfordert das Verschwinden von Ω_x das Bestehen der Gleichungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = r_k p_i + s_k q_i;$$

und aus den Gleichungen (2)

$$\sum_k \frac{\partial f_i}{\partial y_k} dy_k + p_i (r_{dx}) + q_i (s_{dx}) = 0,$$

folgt dann sofort für

$$p_z = 0, \quad q_z = 0,$$

als Gleichung jenes Tangentenebenenbüschels

$$\sum_{i,k} Y_k \frac{\partial f_i}{\partial y_k} z_i = 0.$$

Würde dagegen Ω_x für eine ganze Reihe von Punkten, welche auf F_x und Φ_y zwei correspondirende Curven C_x und Γ_y bilden, verschwinden, so gehören zu jedem Punkte von Γ_y *zwei unendlich benachbarte*

Punkte auf F_x, von denen nur *einer* auf C_x im allgemeinen liegt. Denn es lässt sich dann stets eine Fortschreitungsrichtung dx_i auf F angeben, bei welcher der Punkt y sich nicht ändert. *Die Fläche Φ_y hat also dann Γ_y zur Rückkehrcurve.* Eine solche ist, wie oben bemerkt, im allgemeinen, d. h. wenn die f_j beliebige Formen sind, nicht vorhanden. Dagegen muss Φ_y eine *Doppelcurve* enthalten; sie entsteht dadurch, dass zu zwei verschiedenen, nicht unendlich benachbarten x ein und dasselbe y gehört; ihre *Ordnung* ist unmittelbar aus der Zahl a (6) zu entnehmen. Aus dieser Betrachtung folgt:

Die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen (1) *und* $\Omega_x = 0$ *liefern die Pinchpunkte der Fläche* Φ_y. Bezeichnet man die Anzahl derselben durch j, so erkennt man:

Die Classe n' der Fläche Φ_y ist gegeben durch die Zahl der Lösungen der Gleichungen (1) und der beiden folgenden

$$\sum Z_i\, p_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\sum Y_i\, p_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0,$$

welche aussagen, dass die Tangentenebene (5) von F_y durch die beiden willkürlichen Punkte Z, Y hindurch geht. Entfernt man nun die j Pinchpunkte, für welche die p_i sämmtlich verschwinden, so ergiebt sich

$$(7) \qquad n' = (\mathsf{M}-4)^2 F + (\mathsf{N}-1)^2 \Phi + 2(\mathsf{M}-4)(\mathsf{N}-1)\mathsf{E} - j,$$

als *Classe von* Φ_y.

Damit sind die von Herrn Krey gefundenen Resultate vollständig hergeleitet.*) Es erübrigt nur noch die *Bestimmung der Zahl j* selbst.**) Hierzu führt aber eine genauere Betrachtung von Ω_x, welches, wenn zur Abkürzung

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = f_{ik},$$

gesetzt wird, in der Form

$$\Omega_x = \frac{\alpha_x}{x_4}\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \beta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \beta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \beta_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & \beta_4 \end{vmatrix} = \frac{\alpha_x}{x_4} P,$$

geschrieben werden kann. Es verschwindet daher Ω_x, wenn alle Determinanten

---

*) Herr Krey ermittelt nicht die einfachen Anzahlen a, n', sondern statt deren die Ordnung der Doppelcurve und die Anzahl ihrer dreifachen Punkte. Uebrigens lassen sich leicht auch noch weitere Zahlen direct angeben; Vgl. § 8.

**) Vergl. die Darstellung bei Herrn Krey, S. 86—88.

$$\frac{\partial P}{\partial \beta_i}$$

verschwinden, falls nur nicht $x_4 = 0$ ist. Nun liefern die Gleichungen

$$\frac{1}{x_4}\frac{\partial P}{\partial \beta_1} = 0, \quad \frac{1}{x_4}\frac{\partial P}{\partial \beta_2} = 0,$$

welche von den Geraden

$$\mathsf{M} - m_1 - 4, \quad \mathsf{N} - n_1; \quad \mathsf{M} - m_2 - 4, \quad \mathsf{N} - n_2;$$

in den x resp. y sind,

$$\alpha = (\mathsf{M} - m_1 - 4)(\mathsf{M} - m_2 - 4)F + (\mathsf{N} - n_1)(\mathsf{N} - n_2)\Phi + [(\mathsf{M} - m_1 - 4)(\mathsf{N} - n_2) + (\mathsf{M} - m_2 - 4)(\mathsf{N} - n_1)]\mathsf{E}$$

Lösungen. Von diesen sind aber diejenigen auszuscheiden, für welche die $\frac{\partial P}{\partial \beta_3}$ und $\frac{\partial P}{\partial \beta_4}$ *nicht* Null sind, d. h. diejenigen, für welche die Determinante

$$Q = \begin{vmatrix} f_{31} & f_{32} & f_{33} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

bei beliebigen γ verschwindet, falls x_4 nicht Null ist. Das liefert die Systeme

$$\frac{\partial Q}{\partial \gamma_1} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial \gamma_2} = 0,$$

mit

$$\beta = (m_3 + m_4 - 2)^2 F + (n_3 + n_4)^2 \Phi + 2(m_3 + m_4 - 2)(n_3 + n_4)\mathsf{E}$$

Lösungen, von denen wieder die des Systemes

$$f_{33} = 0, \quad f_{43} = 0,$$

mit

$$\gamma = (m_3 - 1)(m_4 - 1)F + n_3 n_4 \Phi + [n_3(m_4 - 1) + n_4(m_3 - 1)]\mathsf{E},$$

Lösungen vorher auszuscheiden sind, da für diese $\frac{\partial Q}{\partial \gamma_3}$ nicht Null ist. Ausserdem sind aber noch diejenigen Lösungen $Q = 0$ zu entfernen, welche vermöge $x_4 = 0$ stattfinden. Da nun für $x_4 = 0$

$$Q = \frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3}{x_3} \begin{vmatrix} f_{31} & f_{32} \\ f_{41} & f_{42} \end{vmatrix},$$

so hat man noch die Lösungen des Systems

$$x_4 = 0, \quad \begin{vmatrix} f_{31} & f_{32} \\ f_{41} & f_{42} \end{vmatrix} = 0,$$

deren Zahl

$$\delta = (m_3 + m_4 - 2)F + (n_3 + n_4)\mathsf{E}$$

ist, zu entfernen, falls aus dieser letzteren Zahl noch das System

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

mit

$$\varepsilon = F$$

Lösungen ausgeschieden wird. Und so ergiebt sich

$$j = \alpha - \beta + \gamma + \delta - \varepsilon,$$

oder in ausgerechneter Form

$$(8) \qquad j = (\mathsf{M}_2 - 4\mathsf{M} + 10)F + \mathsf{N}_2\Phi + (\mathsf{MN} - 4\mathsf{N} - \mathsf{T})\mathsf{E},$$

falls, wie bei Herrn Krey

$$(9) \qquad \begin{aligned} \mathsf{M}_2 &= m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_1 m_4 + m_2 m_3 + m_2 m_4 + m_3 m_4, \\ \mathsf{N}_2 &= n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_1 n_4 + n_2 n_3 + n_2 n_4 + n_3 n_4, \end{aligned}$$

und endlich

$$(10) \qquad \mathsf{T} = n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 + n_4 m_4,$$

gesetzt wird.

Vertauscht man die Zahlen m, n und die von ihnen abhängigen M, N; M_2, N_2, so erhält man die entsprechenden Charaktere für die Fläche F_x. Zugleich zeigt aber die vorliegende Untersuchung, welche Modification diese Formeln erfahren werden, wenn eine Rückkehrcurve auf den Flächen F_x, Φ_y auftritt. Die Bedingungen hiertür lassen sich allgemein nicht durch vollständige Schnittpunktssysteme definiren, da es auf das Verschwinden der Determinanten Ω ankommt; ein besonders wichtiger Fall dieser Art wird aber in § 3 genauer untersucht werden.

§ 2.

Eindeutiges Entsprechen von zwei Curven vermöge fünf biquaternärer Gleichungen.

Durch fünf biquaternäre Gleichungen von den Ordnungen m_j, n_j in x und y

$$f_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

ist ein Curvenpaar C_x, Γ_y eindeutig auf einander bezogen. Werden die *Ordnungen* von C_x, Γ_y durch L_x, Λ_y bezeichnet, so hat man

$$(1) \qquad \begin{aligned} L_x &= m_5 F + n_5 \mathsf{E}, \\ \Lambda_y &= n_5 \Phi + m_5 \mathsf{E}, \end{aligned}$$

wo F, Φ, E die in § 1 definirten Zahlen bedeuten; übrigens sind beide Werthe symmetrisch aus den verschiedenen Gradzahlen m, n zusammengesetzt.

Ich ermittele zuerst den *Rang der Curve* Γ_y. Man erhält, wie eine einfache Betrachtung zeigt, denselben durch Elimination der Differentiale aus den Gleichungen

$$Df_j = 0,$$

$$\sum \beta_i dx_i = 0, \quad \sum \gamma_i dy_i = 0,$$
$$(a_y)(b_{dy}) - (b_y)(a_{dy}) = 0,$$

welche ausdrücken, dass eine Tangente der Γ_y von der willkürlichen Geraden

$$a_x = 0, \quad b_x = 0,$$

getroffen wird. Es muss also eine mehrreihige Determinante verschwinden, welche Bedingung in abgekürzter Form

$$(2) \qquad \left| \begin{matrix} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} & \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \\ 0 & \gamma_i \\ 0 & a_y b_i - b_y a_i \\ \beta_i & 0 \end{matrix} \right| = 0$$

geschrieben werden kann; durch die Indices $j = 1, 2, 3, 4, 5$ entstehen 5 horizontale Reihen, durch die zweimal wiederholten Indices $i = 1,2,3,4$ 8 Verticalreihen. Aus (2) ergeben sich, falls man die Factoren β_x, γ_y beseitigt,

$$(\mathsf{M}-4)\, L_x + (\mathsf{N}-2)\, \Lambda_y$$

Lösungen, welche auch den Gleichungen $f_j = 0$ genügen, falls man hier durch M und N die Summen

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5,$$
$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5,$$

versteht. Von diesen sind indess diejenigen in Abzug zu bringen, für welche die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \beta_1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \beta_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5}{\partial x_3} & \beta_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} & \frac{\partial f_5}{\partial x_4} & \beta_4 \end{matrix} \right\|$$

verschwindet. Es geschieht dies aber, wie man aus einer Betrachtung erkennt, welche der in § 1 bei Gelegenheit der Pinchpunkte angestellten ganz analog ist, für die *Spitzen der Curve* Γ_y, deren Zahl durch β_y (und für C_x durch β_x) bezeichnet sein möge. Man gewinnt so als Rangzahlen r_x und r_y der beiden Curven C_x und Γ_y:

$$(3) \qquad \begin{aligned} r_x &= \Lambda_y(\mathsf{N}-4) + L_x(\mathsf{M}-4) - \beta_x, \\ r_y &= L_x(\mathsf{M}-4) + \Lambda_y(\mathsf{N}-4) - \beta_y. \end{aligned}$$

Man kann ferner die *Classe* der Curven ebenfalls direct bestimmen. Man erhält für die entsprechenden Zahlen m_x und m_y die Formeln

$$(4)\qquad \begin{aligned} m_x &= \Lambda_y(3\mathsf{N}-12) + L_x(3\mathsf{M}-9) - 2\beta_x, \\ m_y &= L_x(3\mathsf{M}-12) + \Lambda_y(3\mathsf{N}-9) - 2\beta_y, \end{aligned}$$

und somit das *Geschlecht* p von C_x ausgedrückt durch:

$$(5)\qquad \begin{aligned} 2p-2 &= m_x + L_x - 2r_x \\ &= L_x(\mathsf{M}-4) + \Lambda_y(\mathsf{N}-4); \end{aligned}$$

aus der Symmetrie dieser Formel in m und n geht zugleich die Gleichheit des Geschlechtes der beiden Curven C_x, Γ_y hervor.

Zur Bestimmung der Classe m_y hat man die Zahl der Lösungen zu bestimmen, für welche die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ dy_1 & dy_2 & dy_3 & dy_4 \\ d^2y_1 & d^2y_2 & d^2y_3 & d^2y_4 \end{vmatrix}$$

bei gegebenem z verschwindet. Aus derselben sind die Differentiale vermöge der 10 Gleichungen

$$\sum\nolimits_k \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\,dx_k + \frac{\partial f_j}{\partial y_k}\,dy_k\right) = 0,$$

$$\sum\nolimits_{i,k}\left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx_i dx_k + 2\,\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial y_k}\,dx_i dy_k + \frac{\partial^2 f_j}{\partial y_i \partial y_k}\,dy_i dy_k\right) + \sum\nolimits_k \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\,d^2x_k + \sum\nolimits_k \frac{\partial f_j}{\partial y_k}\,d^2y_k = 0,$$

$$\sum \alpha_i dx_i = 0, \qquad \sum \beta_i dy_i = 0,$$

zu eliminiren. Hierzu erweist sich das folgende Verfahren geeignet. Man multiplicire die Determinante D

$$D = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dy_1 & dy_2 & dy_3 & dy_4 & dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d^2y_1 & d^2y_2 & d^2y_3 & d^2y_4 & d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 & d^2x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

mit der Determinante

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_j}{\partial y_i} & \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \\ \beta_i & 0 \\ 0 & \alpha_i \\ l_i & m_i \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} j = 1, 2, 3, 4, 5, \\ i = 1, 2, 3, 4. \end{matrix}$$

Setzt man nun

$$(6)\quad \sum_{i,k}\left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k + 2\frac{\partial^2 f_j}{\partial y_i \partial x_k} dy_i dx_k + \frac{\partial^2 f_j}{\partial y_i \partial y_k} dy_i dy_k\right) = -D_j,$$

$$\sum_i z_i \frac{\partial f_j}{\partial y_i} = \zeta_j, \qquad \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = f_{ji},$$

so entsteht vermöge jener Multiplication

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & \zeta_5 & \sum z_i\beta_i & 0 & \sum z_i l_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum y_i\beta_i & \sum \alpha_i x_i & \sum y_i l_i + m_i x_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum dy_i l_i + m_i dx_i \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & 0 & 0 & \sum d^2 y_i l_i + m_i d^2 x_i \\ f_{11} & f_{21} & f_{31} & f_{41} & f_{51} & 0 & \alpha_1 & m_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} & f_{42} & f_{52} & 0 & \alpha_2 & m_2 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_{43} & f_{53} & 0 & \alpha_3 & m_3 \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & f_{44} & f_{54} & 0 & \alpha_4 & m_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Aus dieser Determinante sondern sich die Factoren

$$\sum \alpha_i x_i, \quad \sum \beta_i y_i, \quad \sum l_i dy_i + m_i dx_i,$$

aus, sobald man beachtet, dass die zu dem Elemente $\sum z_i\beta_i$ in der ersten Horizontalreihe gehörige Unterdeterminante verschwindet. Es bleibt demnach die Gleichung:

$$\sum X_{ik} dx_i dx_k + 2\sum Z_{ik} dx_i dy_k + \sum Y_{ik} dy_i dy_k = 0,$$

in welcher die Coefficienten X_{ik}, Z_{ik}, Y_{ik} linear in den z_i und vom Grade

$$\mathsf{M} - 6, \quad \mathsf{N} - 1,$$

in x und y sind. Trägt man nun die Verhältnisse der Differentiale in jene quadratische Form ein, so lassen sich die Factoren $\sum \alpha_i x_i$, $\sum \beta_i y_i$, noch einmal absondern, und man erhält die Gleichung der

Schmiegungsebene, welche die Variablen x und y in der Geraden $3M - 12$, $3N - 9$ enthält, so dass die Classe den zuvor angegebenen Werth erhält, sowie man bemerkt, dass für die Spitzen β_y die sämmtlichen Coefficienten der Form verschwinden. Im allgemeinen ist natürlich $\beta_y = 0$. So liefern z. B. fünf bilineare Gleichungen zwischen x, y ein Curvenpaar 10^{ter} Ordnung, 10^{ten} Ranges, vom Geschlechte 21. Hierbei ist der besondere Fall zu erwähnen, wo die Gleichungen $f_j = 0$ die Polaren von fünf Flächen zweiter Ordnung sind. Die beiden Curven fallen dann in eine einzige zusammen, welche eindeutig auf sich selbst bezogen ist, gebildet von denjenigen Punkten, deren Polaren in Bezug auf fünf Flächen zweiten Grades durch einen Punkt gehen.

§ 3.

Ueber einen speciellen Fall der in § 1 behandelten Frage.

Wenn die Gleichungen $f_j = 0$ von der Form

$$f_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \tag{1}$$

sind, und demgemäss f eine biquaternäre Form vom Grade m, n in den Variablen x, y bedeutet, gelten die Resultate des § 1 nicht mehr, soweit sie sich auf die Fläche Φ_y beziehen. Man hat zunächst

$$\sum_i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_i + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial y_i} dy_i \right) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{2}$$

und hieraus, wenn man mit den x_j multiplicirt und über j summirt, zufolge der Gleichungen (1)

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i = 0. \tag{2}$$

Demnach wird die Fläche Φ_y umhüllt von den Polarebenen der Punkte von F_x in Bezug auf die Form f, und die Gleichung der Tangentialebene von Φ_y wird:

$$\sum_i Y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0. \tag{4}$$

Setzt man nun nach § 1

$$F = 4(m-1)n^3, \quad \Phi = 4n(m-1)^3, \quad \mathsf{E} = 6n^2(m-1)^2,$$
$$\mathsf{M}_2 = 6(m-1)^2, \quad \mathsf{N}_2 = 6n^2, \quad \mathsf{T} = 4(m-1)n,$$

so erhält man aus (4) für den *Rang* von Φ_y

$$a = (n-1)\,\Phi + m\,\mathsf{E}. \tag{5}$$

Aber die Fläche enthält jetzt eine *Rückkehrcurve*, bestimmt durch das Verschwinden der Determinante

$$\Omega_x = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & \alpha_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & \alpha_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & \alpha_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 \end{vmatrix} \equiv R\,\alpha_x\beta_x,$$

in welcher

$$f_{ik} = f_{ki} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$$

zu setzen ist.

Da R vom Grade $3m-8$, $3n$ in den Variablen x, y ausfällt, so wird die *Ordnung der Rückkehrcurve von* Φ_y

$$c = 3n\Phi + (3m-8)\mathsf{E}. \tag{6}$$

Da die Gleichung der Tangentialebene (4) im allgemeinen nie unbestimmt wird, so sind auf der Doppelcurve keine pinch-points, auf der Rückkehrcurve keine close-points oder off-points vorhanden*), man hat also

$$j = 0, \quad \chi = 0, \quad \varpi = 0, \tag{7}$$

dagegen wird die *Classe* der Fläche

$$m^2F + (n-1)^2\Phi + 2m(n-1)\mathsf{E}. \tag{8}$$

Der *Rang der Rückkehrcurve* bestimmt sich mit Hülfe der in § 2 entwickelten Formeln aus den Gleichungen (1) und $R = 0$, zu

$$\begin{aligned} r = {} & (3m-8)(7m-16)F + 2n(7n-2)\Phi \\ & + [(3n)(7m-16) + (7n-2)(3m-8)]\mathsf{E} - \beta \end{aligned} \tag{9}$$

falls man durch β die *Zahl der Spitzen der Rückkehrcurve* bezeichnet. Da auch in den Punkten der Rückkehrcurve die Tangentialebene (4) nicht unbestimmt wird, so erhält man als *Classe der Rückkehrtangentenebenen*

$$\begin{aligned} \sigma = {} & m(3m-8)F + 3n(n-1)\Phi \\ & + [(n-1)(3m-8) + 3nm]\mathsf{E}. \end{aligned} \tag{10}$$

Ich untersuche nun die *parabolische Fläche der Curve* Φ_y. Zu diesem Zwecke bestimme ich zunächst die *Richtung der Haupttangenten in einem Punkte von* Φ_y; d. h., diejenigen Richtungen, für welche

$$d^2y_i \equiv dy_i$$

wird. Man erhält durch Differentiation der Gleichungen (2)

$$\begin{aligned} \sum_{i,\iota} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_\iota} dx_i dx_\iota + 2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial y_i \partial x_\iota} dy_i dx_\iota + \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial y_i \partial y_\iota} dy_i dy_\iota \right) \\ + \sum_i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial y_i} d^2 y_i + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} d^2 x_i \right) = 0 \end{aligned}$$

*) Vergl. Zeuthen, Sur la théorie des surfaces réciproques, diese Annalen Band X.

und wenn $d^2y_i = \mu\, dy_i$, sowie

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial y_i} dy_i = -\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \qquad j = 1, 2, 3, 4;$$

gesetzt wird

$$\sum_{i,i}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_i} dx_i dx_i + 2\frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial y_i \partial x_i} dx_i dx_i + \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial y_i \partial y_i} dy_i\, dy_i\right]$$
$$+ \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(d^2x_i - \mu\, dx_i) = 0,$$
$$j = 1, 2, 3, 4.$$

Multiplicirt man die soeben erhaltene Gleichung mit x_j und summirt über j, so entsteht

$$\text{(11 a)} \qquad \sum_{i,i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_i} dy_i dy_i - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} dx_i\, dx_i\right) = 0,$$

oder auch

$$\text{(11 b)} \qquad \sum_{i,i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_i} dy_i dy_i + \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial x_i} dy_i\, dx_i\right) = 0$$

als charakteristische Beziehung zwischen den Differentialen dy einer Haupttangentenrichtung auf der Fläche Φ_y. Soll nun die quadratische Form (11 a) oder (11 b), wie es für die parabolischen Punkte von Φ_y erforderlich ist, mit den Gleichungen (2) für die Verhältnisse der Differentiale zwei zusammenfallende Lösungen ergeben, so muss eine 14-reihige Determinante verschwinden, deren Kern aus den Coefficienten von (11) gebildet ist. Aus derselben lässt sich dann der Factor

$$\Omega = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & \alpha_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & \alpha_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & \alpha_4 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{vmatrix}$$

absondern, welcher sich auf die Punkte der Rückkehrcurve von Φ_y bezieht. Einfacher erhält man indessen die Determinante mittels der Gleichungen

$$\text{(12)} \qquad \sum_i\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_i} dy_i + \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial x_i} dx_i\right) = \varrho \frac{\partial f}{\partial y_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

welche das Vorhandensein einer nach der Richtung dy stationären Ebene auf der Fläche Φ_y ausdrücken.

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial x_i} = f''_{ii}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_i} = f'_{ii} = f'_{ii}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_i} = f_i,$$

und eliminirt aus den Gleichungen (12) und (2) sowie aus den beiden Relationen

$$\sum \alpha_i dx_i = 0, \quad \sum \beta_i dy_i = 0,$$

also im ganzen aus 10 linearen Gleichungen die Differentiale, so entsteht mit Benutzung der willkürlichen Coefficienten c_i die Resultante

$$\begin{vmatrix} f'_{11} & f'_{12} & f'_{13} & f'_{14} & f''_{11} & f''_{12} & f''_{13} & f''_{14} & f_1 & c_1 \\ f'_{21} & f'_{22} & f'_{23} & f'_{24} & f''_{21} & f''_{22} & f''_{23} & f''_{24} & f_2 & c_2 \\ f'_{31} & f'_{32} & f'_{33} & f'_{34} & f''_{31} & f''_{32} & f''_{33} & f''_{34} & f_3 & c_3 \\ f'_{41} & f'_{42} & f'_{43} & f'_{44} & f''_{41} & f''_{42} & f''_{43} & f''_{44} & f_4 & c_4 \\ f''_{11} & f''_{21} & f''_{31} & f''_{41} & f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & 0 & 0 \\ f''_{12} & f''_{22} & f''_{32} & f''_{42} & f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & 0 & 0 \\ f''_{13} & f''_{23} & f''_{33} & f''_{43} & f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & 0 & 0 \\ f''_{14} & f''_{24} & f''_{34} & f''_{44} & f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welche sich nach Absonderung des Factors α_x auf die Gleichung

$$(13) \qquad \Pi = \begin{vmatrix} f'_{11} & f'_{12} & f'_{13} & f'_{14} & f''_{11} & f''_{12} & f''_{13} & f''_{14} & c_1 \\ f'_{21} & f'_{22} & f'_{23} & f'_{24} & f''_{21} & f''_{22} & f''_{23} & f''_{24} & c_2 \\ f'_{31} & f'_{32} & f'_{33} & f'_{34} & f''_{31} & f''_{32} & f''_{33} & f''_{34} & c_3 \\ f'_{41} & f'_{42} & f'_{43} & f'_{44} & f''_{41} & f''_{42} & f''_{43} & f''_{44} & c_4 \\ f''_{11} & f''_{21} & f''_{31} & f''_{41} & f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & 0 \\ f''_{12} & f''_{22} & f''_{32} & f''_{42} & f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & 0 \\ f''_{13} & f''_{23} & f''_{33} & f''_{43} & f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & 0 \\ f''_{14} & f''_{24} & f''_{34} & f''_{44} & f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

reducirt. $\Pi = 0$ *ist daher die Bedingung für einen parabolischen Punkt der Fläche* Φ_y. Da man aus Π noch den Factor $\beta_y c_y$ absondern kann, so enthält dieselbe die Variabeln x im Grade

$$4(m-2) + 3m;$$

die y im Grade

$$3(n-2) + 4n - 2.$$

Und so ergiebt sich als *Classe der parabolischen Ebenen*

$$(14) \qquad c' = (7m-8)\, mF + (7n-8)(n-1)\,\Phi + [(7m-8)(n-1) + m(7n-8)]\,\mathsf{E},$$

während die *Ordnung der parabolischen Curve* durch die Formel

$$(15) \qquad \sigma' = (7n-8)\,\Phi + (7m-8)\,\mathsf{E},$$

gegeben ist.

Eine ähnliche Untersuchung lässt sich übrigens auch in Bezug auf die allgemeinen in § 1 betrachteten Formen anstellen. Man erhält dann für die soeben bezeichneten Charaktere die beiden Formeln:

$$(17)\quad (c')=4(\mathsf{M}-4)^2F+4(\mathsf{N}-1)(\mathsf{N}-2)\Phi+4\mathsf{E}(\mathsf{M}-4)(2\mathsf{N}-3)-2j,$$
$$(\sigma')=4(\mathsf{N}-2)\Phi+4\mathsf{E}(\mathsf{M}-4),$$

durch welche zugleich die in § 1 erhaltenen Resultate bestätigt werden.

Ich bestimme nun die *Anzahl der Spitzen der Rückkehrcurve von* Φ_y. Bezeichnet man die Differentialquotienten der Form R, welche die Rückkehrcurve charakterisirt, durch R_i, so muss nach den Auseinandersetzungen des § 2 für eine Spitze derselben die Determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & \alpha_1 & \beta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & \alpha_2 & \beta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & \alpha_3 & \beta_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & \alpha_4 & \beta_4 \\ R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

für willkürliche Werthe der α, β, γ verschwinden, falls die f_1, f_2, f_3, f_4, R Null sind. Man erhält nun

$$x_4^2\Delta=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \alpha_1 & \beta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \alpha_2 & \beta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \alpha_3 & \beta_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_x & \beta_x \end{vmatrix}\gamma_x.$$

Daher verschwindet Δ, sobald die Matrix

$$\left\|\begin{matrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} & R_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} & R_2 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & R_3 \end{matrix}\right\|$$

verschwindet. Es geschieht dies aber für die Werthe, für die

$$\begin{vmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

gleich Null ist, deren Zahl

$$\alpha=(5m-13)(3m-8)F+15n^2\Phi+[(5m-13)3n+(3m-8)5n]\mathsf{E},$$

ist, da das Verschwinden von R schon das aller ersten Unterdeterminanten der Functionaldeterminante

$$|f_{ik}|,$$

involvirt. Von diesen Lösungen aber sind zunächst die des Systems

$$x_4 = 0, \quad f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0, \quad R = 0,$$

zu entfernen, deren Anzahl

$$\varepsilon = (3m-8)F + 3n\mathsf{E},$$

ist. Ferner hat man noch diejenigen Lösungen auszuscheiden, für welche die Determinanten

$$u_1, \; u_2, \; u_3,$$

der Matrix

$$\begin{Vmatrix} f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{Vmatrix}$$

vermöge $R = 0$ verschwinden, falls x_4 *nicht* Null ist. Bringt man nun die geränderte Determinante Ω (12) in die Form

$$\frac{\alpha_x \beta_x}{x_4^2} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix},$$

so erkennt man, dass R verschwindet, wenn die Determinanten u_1, u_2, u_3 verschwinden, was für

$$\eta = 3(m-2)^2 F + 3n^2\Phi + 6(m-2)n\mathsf{E},$$

Punkte geschieht. Aber unter diesen sind wieder diejenigen auszuscheiden, bei denen $x_4 = 0$ ist.

Nun folgt aus den Gleichungen (1) für $x_4 = 0$

$$x_1 f_{21} + x_2 f_{22} + x_3 f_{23} = 0,$$
$$x_1 f_{31} + x_2 f_{32} + x_3 f_{33} = 0,$$

oder

$$x_1 u_2 - x_2 u_1 = 0,$$
$$x_1 u_3 - x_3 u_1 = 0,$$

so dass die Annahme $u_1 = 0$, $x_4 = 0$ auch das Verschwinden von u_2 und u_3 nach sich zieht, da die Gleichungen (1) mit $u_1 = 0$, $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ keine gemeinsamen Lösungen besitzen können.

Die Zahl der aus η auszuscheidenden Lösungen beträgt also noch

$$\delta = 2(m-2)F + 2n\mathsf{E}.$$

Demgemäss findet man β, wenn man das Aggregat

$$\alpha - \varepsilon - \eta + \delta$$

bildet; mithin als Zahl der Spitzen der Rückkehrcurve

$$(16) \quad \beta = (5m-14)(3m-8)F + 12n^2\Phi - (m-2)(3m-8)F$$
$$+ [(5m-14)3n + (3m-8)5n - 6(m-2)n + 2n]\mathsf{E}.$$

Nach den Formeln (5), (6), (7), (8), (9), (10), (14), (15), (16) hat man also, unter Anwendung der bekannten Bezeichnungen

$$a = (n-1)\Phi + m\mathsf{E},$$
$$c = 3n\Phi + (3m-8)\mathsf{E},$$
$$j = 0,$$
$$\chi = 0, \quad \omega = 0,$$
$$n' = m^2 F + (n-1)^2\Phi + 2m(n-1)\mathsf{E},$$
$$\sigma = m(3m-8)F + 3n(n-1)\Phi + (6mn-8n-3m+8)\mathsf{E},$$
$$c' = (7m^2-8m)F + (7n^2-15n+8)\Phi + (14mn-15m-8n+8)\mathsf{E},$$
$$\sigma' = (7n-8)\Phi + (7m-8)\mathsf{E},$$
$$n^* = \Phi,$$
$$\beta = (12m^2-68m+96)F + 12n^2\Phi + (24mn-68n)\mathsf{E},$$
$$r = (9m^2-36m+32)F + (9n^2-6n)\Phi + (18mn-6m-36n+16)\mathsf{E}.$$

Aus diesen Zahlen erhält man die weiteren Singularitätenanzahlen von Φ_y, so z. B.

$$\varkappa = 4m(m-2)F + 2(2n^2+3n+1)\Phi + 2\mathsf{E}(4mn-3m-4n+4),$$
$$2b = \Phi(\Phi-1) - \Phi 10(n-1) - \mathsf{E}(10m-24),$$

während die übrigen, wie z. B. ϱ, γ, t aus den Gleichungen

$$\varrho = a(\Phi-2) - \varkappa - 2\sigma,$$
$$\gamma = c(\Phi-2) - 2\sigma - 4\beta,$$
$$3t = (b-3c)(\Phi-2) - \varrho + 6\sigma + 10\beta, \quad \text{etc.}$$

bestimmt werden.

Für die Fläche F_x kann man dagegen die entsprechenden Zahlwerthe einfach aus § 1 entnehmen, und findet so

$$a_1 = (4m-5)F + 4(n-1)\mathsf{E},$$
$$j_1 = 6(m-1)^2F + (6n^2-16n+10)\Phi + 4(m-1)(3n-4)\mathsf{E},$$
$$n_1' = 16(n-1)^2\Phi + (4m-5)^2\mathsf{E} + 8(n-1)(4m-5)\mathsf{E} - j_1,$$
$$c_1' = 4(4m-5)(4m-6)F + 64(n-1)^2\Phi + 16(n-1)(8m-11)\mathsf{E} - 2j_1,$$
$$n_1^* = F.$$

Man kann die gefundenen Werthe in verschiedener Weise prüfen. Zunächst findet man für die erste Geschlechtszahl von Φ_y

$$p = n' - 2a + r - 2c + 3\Phi,$$

den Ausdruck

$$(10m^2-36m+32)F + (10n^2-16n+6)\Phi + [20mn-16m-36n+32]\mathsf{E},$$

und bestätigt, dass derselbe gleich dem entsprechenden Ausdrucke

$$n_1' - 2a_1 + 3F$$

für die Fläche F_x wird. In derselben Weise ergiebt sich für das Flächengeschlecht von Φ_y

$$24(P+1) = c' - 12a + 24\Phi + \beta + 3r - 15c + 2\sigma,$$

der Werth

$$(52m^2 - 200m + 192)F + (52n^2 - 96n + 44)\Phi + (104mn - 96m - 200n + 192)\mathsf{E},$$

welcher wieder gleich der Zahl

$$c_1' - 12a_1 + 24F$$

wird. Und man hätte natürlich die beiden durch die Gleichheit der beiden Geschlechtszahlen gegebenen Relationen zur Berechnung von r und β benutzen können; doch war es wegen der weiteren Anwendungen erforderlich, diese Zahlen direct zu bestimmen.

Eine weitere Bestätigung gewinnt man durch das *Geschlecht der Rückkehrcurve*, welche eindeutig auf die auf F_x liegende Curve

$$R = 0, \quad f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0,$$

bezogen ist. Nach den Formeln des § 2 findet man

$$L_x = (3m-8)F + 3n\mathsf{E},$$
$$\Lambda_y = 3n\Phi + (3m-8)\mathsf{E},$$

also

$$2p - 2 = (3m-8)(7m-16)F + 3n\Phi + [3n(7m-16) + (3m-8)(7n-4)]\mathsf{E},$$

was mit dem aus den Zahlen r, β, c folgenden Werthe von $2p-2$ übereinstimmt.

Endlich kann man bemerken, dass die Zahl i, vermöge der Formel

$$3r + c - \beta + 2i - 5\sigma = 0,$$

sich gleich Null ergiebt, wie übrigens vorherzusehen war, da zum Auftreten der mit i bezeichneten Singularität speciellere Bedingungen erforderlich sind.

Die entwickelten Formeln scheinen in zwei Fällen nicht mehr gültig zu sein. Wenn nämlich $n = 1$, so verliert die bei der Untersuchung der parabolischen Curve gebrauchte Covariante Π ihre Bedeutung.

Man hat dann

$$f_j = \sum y_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}, \quad f = \sum y_k \varphi_k,$$

so dass die Gleichung der Fläche F_x durch die gleich Null gesetzte Functionaldeterminante J der φ_k dargestellt wird, welche vom Grade $4(m-1)$ ist. Die Bedingung einer Haupttangentenrichtung auf Φ_y wird nun nach (11a)

$$\sum y_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k = 0,$$

also die Bedingung, für einen parabolischen Punkt dieser Fläche, wenn

$$\sum y_m \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x_i \partial x_k} = (ik),$$

gesetzt wird,

$$(18) \qquad \begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) & (14) & c_1 & \frac{\partial J}{\partial x_1} \\ (21) & (22) & (23) & (24) & c_2 & \frac{\partial J}{\partial x_2} \\ (31) & (32) & (33) & (34) & c_3 & \frac{\partial J}{\partial x_3} \\ (41) & (42) & (43) & (44) & c_3 & \frac{\partial J}{\partial x_4} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 \\ \frac{\partial J}{\partial x_1} & \frac{\partial J}{\partial x_2} & \frac{\partial J}{\partial x_3} & \frac{\partial J}{\partial x_4} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Bedingung lässt sich aber in folgender Weise umformen. Man erhält nämlich für die Differentialquotienten der Functionaldeterminante die folgende Relation

$$-\frac{\partial J}{\partial x_i} c_y = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_1} & (l1) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_2} & (l2) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_3} & (l3) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_4} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_4} & (l4) \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man nun die Coefficienten der letzten Verticalreihe in der Determinante auf der rechten Seite durch $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ so erhält man

$$-\frac{\partial J}{\partial x_i} c_y = \sum \eta_i (li).$$

Denkt man sich diese Werthe von $\frac{\partial J}{\partial x_i}$ in der Form (18) substituirt, so nimmt sie die Gestalt an

$$\frac{1}{(c_y)^2} \begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) & (14) & c_1 & 0 \\ (21) & (22) & (23) & (24) & c_2 & 0 \\ (31) & (32) & (33) & (34) & c_3 & 0 \\ (41) & (42) & (43) & (44) & c_4 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & (c_\eta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (c_\eta) & (c_y) \sum \eta_i \frac{\partial J}{\partial x_i} \end{vmatrix} = 0,$$

welche, da der von den (ik) gebildete Kern der Determinante wegen der Gleichungen $f_j = 0$ verschwindet, sich in

$$\frac{1}{(c_y)} \sum \eta_i \frac{\partial J}{\partial x_i} = \frac{1}{c_y} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_1} & \frac{\partial J}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_2} & \frac{\partial J}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_3} & \frac{\partial J}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_4} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_4} & \frac{\partial J}{\partial x_4} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{c_y} S = 0,$$

verwandelt, welche Gleichung in den x von der Ordnung $7m - 8$ ist. Nun liefert das die Ordnung der parabolischen Curve bestimmende System von Gleichungen

$$\alpha_y = 0, \quad f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0, \quad S = 0,$$

$6(m-1)^2 (7m-8)$ Lösungen, aus welchen aber noch die des Systems

$$c_y = 0, \quad \alpha_y = 0, \quad f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0,$$

mit $4(m-1)^3$ Lösungen auszuscheiden sind. Demnach ist die Ordnung der parabolischen Curve

$$\sigma' = 2(m-1)^2[3(7m-8) - 2(m-1)]$$

welche Zahl mit dem in (15) gegebenen Werthe für $n = 1$ übereinstimmt. Die entwickelten Formeln sind daher auch für $n = 1$ noch gültig.

Auch für $m = 2$ treten in den obigen Resultaten nur ganz unwesentliche Aenderungen ein. Man findet dann

$$\begin{aligned} \Phi &= 4n, \\ a &= 4n(4n-1), \\ c &= 0, \\ n' &= 16n^3 + 4n(n-1)^2 + 24n^2(n-1) \\ b &= 0. \end{aligned}$$

Die Classenzahl n' deutet auf $10n^3$ Doppelpunkte der Fläche Φ_y, in welche sich die Doppelcurve $(b = 0)$ zusammengezogen hat. In der That, da

$$f = \sum a_{ik} x_i x_k,$$

wo die $a_{ik} = a_{ki}$ beliebige Functionen n^{ten} Grades der y sind, so wird die Gleichung der Fläche Φ durch die gleich Null gesetzte symmetrische Determinante der a_{ik} ausgedrückt. Derselben kommen aber bekanntlich $10n^3$ Doppelpunkte zu; diesen entsprechen gerade Linien auf der Fläche F_x, längs denen die Tangentenebenen sich jedoch im allgemeinen nicht weiter ausgezeichnet verhalten.

Ich erwähne endlich die analogen Verhältnisse in der *Ebene*. Zwei ebene Curven C_x, Γ_y deren Plücker'sche Zahlen in der gewöhnlichen Weise, nur mit dem Index x, y versehen, je nachdem dieselben zu C_x oder Γ_y gehören sollen, bezeichnet werden, seien durch die biternären Gleichungen

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0,$$

eindeutig auf einander bezogen, welche in x, y bezüglich von den Graden m_i, n_i sind. Dann sind die Ordnungen

$$n_x = m_1 n_2 n_3 + m_2 n_1 n_3 + m_2 n_1 n_2,$$
$$n_y = n_1 m_2 m_3 + n_2 m_1 m_3 + n_2 m_1 m_3.$$

In Verbindung mit einer vierten Gleichung, welche die x, y im Grade m_4, n_4 enthält, erhält man nach § 2

$$m_4 n_x + n_4 n_y$$

Lösungen. Demnach ergiebt sich, falls

$$m_1 + m_2 + m_3 = \mathsf{M},$$
$$n_1 + n_2 + n_3 = \mathsf{N},$$

gesetzt wird, für die Classe der Curven

$$m_x = (\mathsf{M}-1)n_x + (\mathsf{N}-3)n_y,$$
$$m_y = (\mathsf{N}-1)n_y + (\mathsf{M}-3)n_x,$$

während die Zahl der Spitzen im allgemeinen Null ist, so dass das Geschlecht

$$2p - 2 = (\mathsf{N}-3)n_y + (\mathsf{M}-3)n_x.$$

wird. Verschwindet dagegen die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & c_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & c_2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix}$$

unabhängig von den a, c, so erhält die Curve Γ_y eine Spitze. Sind insbesondere die f_i partielle Differentialquotienten einer Function f vom Grade $m+1$, n in x, y so erhält man

$$n_x = 3n^2 m,$$
$$n_y = 3m^2 n,$$
$$\beta_y = 12n^2(m-1)m,$$
$$m_y = 3nm(2nm+n-m),$$

$$2p - 2 = 9nm[2nm - (m+n)],$$
$$d_y = 3mn[3m^3n - 14mn + 11n],$$
$$i_y = 3mn[10mn - 6m - n].$$

§ 4.

Zur Polarentheorie der algebraischen Gebilde.

Es soll im folgenden angenommen werden, dass die vier Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ zugleich in der Form $\frac{\partial \varphi}{\partial y_j} = 0$ geschrieben werden können. Alsdann sind die Betrachtungen des vorigen Paragraphen auch auf die Fläche F_x zur Anwendung zu bringen, und die betreffenden Singularitätenzahlen ergeben sich einfach durch entsprechende Vertauschung. Setzt man $m+1$ statt m, so dass nunmehr m und n die Grade sind, in welchen die Variablen x und y in den definirenden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}, \tag{1}$$

eingehen, so erhält man für Φ_y

$$a = 2nm^2(5nm - 2m + 3n),$$
$$c = 30n^2m^2(m-1),$$
$$n' = 20m^2n^2(mn + n - m) + 4mn(n^2 + m^2 - 3mn),$$
$$\sigma = 10mn(5n^2m^2 - 2n^2m - 2n^2),$$
$$\sigma' = 70n^2m^3 - 32nm^3 - 6n^2m^2,$$
$$c' = 160m^3n^3 + 60m^2n^3 - 150n^2m^3 + 32nm^3 - 4mn^3 - 42m^2n^2,$$
$$\beta = 40n^3m(6m^2 - 11m + 4),$$
$$r = 20mn^2[10m^2n - 10mn - 3m^2 + n + 3m];$$

und für die beiden Geschlechtszahlen

$$p = 40m^2n^2(5nm - 4(m+n)) + 24mn(n^2 + m^2 + 4mn),$$
$$24(P+1) = 40m^2n^2(26mn - 24(m+n)) + 16mn(11(n^2 + m^2) + 36mn),$$

deren Symmetrie in Bezug auf m, n wieder den Satz von der Erhaltung des Geschlechtes bei eindeutiger Transformation ausdrückt.

Ich behaupte nun, *dass diejenigen Formen, welche den Bedingungen* (1) *genügen, Polaren einer Form* Ψ *sind.*

Aus den Gleichungen (1) folgt nämlich für beliebige j, k

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial y_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_j \partial y_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial y_j}. \tag{2}$$

Genügt umgekehrt die Function f diesem Systeme von partiellen Differentialgleichungen, und zwar so, dass sie die x, y homogen in den Graden m, n enthält, so hat man

$$\sum_j \left(x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial y_k}\right) = m \frac{\partial f}{\partial y_k} = \sum_j \left(x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial y_j}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_j \left(x_j \frac{\partial f}{\partial y_j}\right) - \frac{\partial f}{\partial y_k},$$

also, falls $\frac{1}{m+1} \sum x_j \frac{\partial f}{\partial y_j} = \varphi$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}.$$

Die partiellen Differentialgleichungen (2) *charakterisiren daher die Formen f der verlangten Art vollständig.*

Ich betrachte nun zunächst eine in x lineare Function f, welche den Gleichungen (2) genügt. Alsdann findet man sofort:

Die einzige in x lineare Function f, welche den Gleichungen (2) *genügt, ist von der Form*

$$f = \sum x_i \frac{\partial \omega}{\partial y_i} = \Delta^1 \omega,$$

wo ω eine beliebige homogene Function der y ist, d. h. *sie ist die erste Polare einer Form ω in Bezug auf x.*

Denn setzt man

$$f = \sum (x_i \psi_i),$$

so ergiebt sich aus 2)

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y_i} = \frac{\partial \psi_i}{\partial y_i};$$

mithin sind die ψ_i partielle Differentialquotienten einer Form ω.

Ich nehme nun an, dass auch für alle Formen, welche x im $n-1^{\text{ten}}$ Grade enthalten, bereits bewiesen sei, dass sie $n-1^{\text{te}}$ Polaren einer willkürlichen in y homogenen Form ω sind. Alsdann ist es leicht zu zeigen, dass der Satz auch für Formen n^{ter} Ordnung gültig sein muss. Hierzu leitet die Bemerkung, dass aus 2) folgt:

$$\frac{\partial^2 \frac{\partial f}{\partial x_k}}{\partial x_j \partial y_k} = \frac{\partial^2 \frac{\partial f}{\partial x_k}}{\partial x_k \partial y_j},$$

so dass, wenn die Gleichungen 2) für ein gewisses f bestehen, sie auch für die Differentialquotienten beliebiger Ordnung gültig bleiben. Ist demnach f eine in den x homogene Form n^{ter} Ordnung, *so sind die* $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ $n-1^{\text{te}}$ *Polaren einer Form* ψ_k, zufolge der eben gemachten Voraussetzung. Setzt man also

$$\frac{\partial f}{\partial x_h} = \sum x_{p_1} x_{p_2} \cdots x_{p_{n-1}} \frac{\partial^{n-1} \psi_h}{\partial y_{p_1} \partial y_{p_2} \cdots \partial y_{p_{n-1}}},$$

so wird aus der Bedingung 2)

$$\sum x_{p_1} x_{p_2} \cdots x_{p_{n-1}} \left(\frac{\partial^n \psi_h}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_{n-1}} \partial y_k} - \frac{\partial^n \psi_k}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_{n-1}} \partial y_h} \right) = 0.$$

Da diese Gleichung für alle Werthe der x erfüllt sein muss, so folgt

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial y_{p_1} \partial y_{p_2} \cdots \partial y_{p_{n-1}}} \left\{ \frac{\partial \psi_h}{\partial y_k} - \frac{\partial \psi_k}{\partial y_h} \right\} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\partial \psi_h}{\partial y_k} - \frac{\partial \psi_k}{\partial y_h} = G_{hk},$$

wo die rechte Seite eine in den y homogene Function bedeutet, welche höchstens von der $n - 2^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Aber die ψ_h sind, ihrer Bedeutung zufolge, mindestens von der Ordnung n. Daher kann die Gleichung nur bestehen für $G_{hk} = 0$. Mithin wird

$$\psi_h = \frac{\partial \omega}{\partial y_h},$$

und somit erhält man

$$nf = \Delta^n \omega,$$

wie zu zeigen war.

Ich erwähne kurz die Folgerungen, welche nunmehr sich für die Theorie der Polaren aus den Betrachtungen des § 3 ergeben.

Wird f gleich der k^{ten} Polare von y in Bezug auf das allgemeine Gebilde

$$(a_x)^n = 0;$$

mithin

$$f = a_x^{n-k} a_y^k,$$

so wird

$$\varphi = a_x^{n-k-1} a_y^{k+1},$$

also die $n - k - 1^{\text{te}}$ Polare von x, wobei

$$\frac{1}{n-k} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{k+1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}.$$

Die obigen Zahlwerthe finden daher unmittelbar Anwendung auf die Polarentheorie, wenn statt $m + 1$, n bezüglich $n - k$, k gesetzt wird.

Die Curve C_y, gebildet von den Punkten y, deren k^{te} Polaren $f = 0$ in Bezug auf eine allgemeine Curve n^{ter} Ordnung einen Doppelpunkt haben, ist also eine Curve der Ordnung $3k(n-k-1)^2$, die

k^{te} Steiner'sche Curve S_k, während der Ort der Doppelpunkte selbst eine Curve der Ordnung $3k^2(n-k-1)$), ist, die k^{te} Hesse'sche Curve H_k. Beide Curven sind eindeutig auf einander bezogen, ihre Geschlechtszahl $2p-2$ ist ausgedrückt durch*

$$3(n-k-1)\,[(2k-1)(n-1)-2k^2].$$

Auf der k^{ten} Steiner'schen Curve liegen

$$12k^2(n-k-1)(n-k-2)$$

Spitzen und

$$\tfrac{3}{2}k(n-k-1)(n-k-2)\,[3(n-k-1)^2-9(n-k-1)-5]$$

Doppelpunkte, sowie

$$3k(n-k-1)\,[10k(n-k-1)-6(n-k-1)-k]$$

Wendungen.

Die Tangente von S_k ist im Punkte y gegeben durch

$$\sum z_k \frac{\partial f}{\partial y_k} = 0;$$

die von H_k im correspondirenden Punkte x durch

$$\sum z_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0.$$

Hat nun S_k eine Spitze, so ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \equiv \alpha_i \alpha_k$, also auch $\alpha_x = 0$. Dann ist zugleich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \alpha_y \alpha_k, \quad \sum z_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \alpha_y \alpha_z,$$

und man hat den Satz:

Hat die k^{te} Steiner'sche Curve eine Spitze im Punkte y, so hat auch die k^{te} Polare von y im zugehörigen Punkte x der k^{ten} Hesse'schen Curve eine Spitze, deren Tangente mit der Tangente der letzteren zusammenfällt.

Aehnliches gilt für die Singularitäten der k^{ten} Hesse'schen Curve. Insbesondere ergeben sich für $k=1$ die bekannten Anzahlen für die gewöhnliche (erste) Hesse'sche und Steiner'sche Curve**).

Und ebenso erhält man folgende Sätze für die Polaren einer allgemeinen Ordnungsfläche.

Der Ort des Punkte y, deren k^{te} Polarflächen $a_x^{n-k} a_y^k = 0$ einen Doppelpunkt haben, ist die k^{te} Steiner'sche Fläche S_k von der Ordnung $4k(n-k-1)^3$, der Ort der Doppelpunkte selbst die k^{te} Hesse'sche Fläche H_k von der Ordnung $4k^3(n-k-1)$. Auf S_k liegt eine Doppelcurve von der Ordnung b, die zu ihren Punkten gehörigen k^{ten} Polaren

*) Diese Bemerkung findet sich auch schon bei Salmon, Theorie der höheren ebenen Curven, S. 429.

*) Vgl. z. B. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen. S. 368 ff.

haben zwei Doppelpunkte, zu denen für die t dreifachen Punkte derselben noch ein weiterer hinzukommt. Den Punkten der Rückkehrcurve c von S_k entsprechen Polarflächen mit biplanarem Knoten B_3.

Da in diesem Falle

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \equiv \alpha_i \beta_k + \alpha_k \beta_i \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \partial x_k},$$

so wird das Product der Tangentenebenen des biplanaren Knotens der k^{ten} Polarfläche

$$\alpha_s \beta_s = 0.$$

Und da $\alpha_x \beta_k + \alpha_k \beta_x = 0$ ist, so wird $\alpha_x = 0$, $\beta_x = 0$; d. h. die Axe des biplanaren Knotens geht durch den zugehörigen Punkt x der k^{ten} Hesse'schen Fläche. Ferner ist die Tangentialebene der letzteren

$$\sum z_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0,$$

oder

$$\alpha_s \beta_y + \alpha_y \beta_s = 0.$$

Das heisst: *Hat die k^{te} Polare eines Punktes y von S_k einen biplanaren Knoten in dem zugeordneten Punkte x der Hesse'schen Fläche, so ist die Axe desselben zugleich Tangente der letzteren im Punkte x.*

Den Spitzen β der Rückkehrcurve entsprechen specielle biplanare Knoten, und zwar lässt sich leicht zeigen, dass diese Knoten von der Art B_4 sind.

Ich gebe im folgenden einen analytischen Beweis dieser Behauptung, die übrigens aus allgemeinen Ueberlegungen erkannt wird. Die Spitzen der Rückkehrcurve

$$R = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & c_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & c_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & c_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & c_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

für welche $f_{ik} = \alpha_i \beta_k + \alpha_k \beta_i$ wird, sind bekanntlich definirt durch das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & p_1 & q_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & p_2 & q_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & p_3 & q_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & p_4 & q_4 \\ R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

für beliebige Werthe der p, q, c, falls $\frac{\partial R}{\partial x_i} = R_i$ gesetzt ist. Aber diese Determinante ist, wie eine einfache Reduction zeigt, gleich dem Producte der beiden Determinanten

$$(p\,q\,\alpha\,\beta)\,(R\,c\,\alpha\,\beta).$$

Man findet andererseits ohne Schwierigkeit für R_i die folgende Darstellung

$$R_i = \begin{vmatrix} f_{11i} & f_{12i} & f_{13i} & f_{14i} & c_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ f_{21i} & f_{22i} & f_{23i} & f_{24i} & c_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ f_{31i} & f_{32i} & f_{33i} & f_{34i} & c_3 & \alpha_3 & \beta_3 \\ f_{41i} & f_{42i} & f_{43i} & f_{44i} & c_4 & \alpha_4 & \beta_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

oder, wenn man die in $(R\,c\,\alpha\,\beta)$ enthaltenen Unterdeterminanten $(c\,\alpha\,\beta)$ durch ξ bezeichnet,

$$R_i \equiv \sum f_{ikl}\,\xi_k\,\xi_l,$$

mithin wird die Bedingung für die Spitzen der Rückkehrcurve

$$\sum f_{ikl}\,\xi_k\,\xi_l\,\xi_i = 0.$$

Dies sagt aber aus, dass die Axe des biplanaren Knotens dreipunktige Tangente des letzteren ist, oder dass der B_3 der Polarfläche in einen B_4 übergeht.

Andererseits ist oben die Zahl γ der Punkte bestimmt, in denen sich die (stationären) Punkte der Doppelcurve mit der Rückkehrcurve begegnen; die Polarfläche erhält dann einen B_3 und einen weiteren C_2. Dagegen findet keine Begegnung zwischen der Doppel- und Rückkehrcurve in nicht singulären Punkten derselben statt, da $i = 0$ ist; in der That könnte diesem Verhalten auch im allgemeinen keine Singularität der k^{ten} Polarfläche entsprechen.

Die entsprechenden Eigenschaften finden für die Punkte der k^{ten} Hesse'schen Fläche statt.

§ 5.

Die Hesse'sche Fläche und ihre conjugirte Kernfläche.

Ein besonderes Interesse verdient die Betrachtung der (ersten) Hesse'schen Fläche H und ihrer conjugirten Kernfläche S. Ich gebe daher im folgenden eine analytische Theorie derselben, welche einer-

seits die früheren Resultate bestätigen, andererseits zu neuen führen wird.

Es sei f eine homogene Function n^{ter} Ordnung in den Variabeln x. Alsdann repräsentiren die Gleichungen

$$\sum (y_i f_{ik}) = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4; \tag{1}$$

die Beziehung eines Punktes x und seines conjugirten y auf den beiden Flächen H und S. Aus (1) folgt

$$y_i y_k = \mu \mathsf{H}_{ik}, \tag{2}$$

wenn man mit H_{ik} die entsprechende Unterdeterminante der Hesse'schen Form H bezeichnet. Aus den Gleichungen (1) folgt ferner

$$\sum f_{ik} dy_i + \sum f_{ikl} y_i dx_l = 0, \tag{3}$$

und durch Multiplication mit den x_k und Summation über k entsteht

$$\sum f_i dy_i = 0, \tag{4}$$

als *Gleichung der Tangentenebene von* S, und durch entsprechendes Verfahren mit y_k

$$\sum y_i y_k f_{ikl} dx_l = 0, \tag{5}$$

als *Gleichung der Tangentenebene von* H, wie denn überhaupt die allgemeine Gleichung

$$\mathsf{H}_l = \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_l} = \sum \mathsf{H}_{ik} f_{ikl},$$

vermöge (2) sich in der Form

$$\mathsf{H}_l \equiv \sum y_i y_k f_{ikl}, \quad l = 1, 2, 3, 4$$

schreiben lässt.

Nun entspricht dem Punkte x von H der conische Polarkegel K_x

$$\sum z_i z_k f_{ik} = 0,$$

mit der Spitze in y; dem Punkte y von S die Polarfläche $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\sum y_i f_i = 0,$$

welche in x einen Knoten hat, dessen osculirender Kegel K_h durch die Gleichung

$$\sum z_i z_k y_l f_{ikl} = 0$$

dargestellt ist. Die Tangentenebene T_x von S ist die Polare von x in Bezug auf K_x (oder auch die Polarebene in Bezug auf die Fläche $f = 0$); die Tangentenebene T_h von H die Polare von y in Bezug auf den Kegel K_h. Man kann daher K_h und K_x als *conjugirte Kegel* bezeichnen. Der Richtung dx auf H entspricht die Polarebene

$$\sum z_i f_{ikl} y_l dx_k = 0,$$

in Bezug auf K_λ; der correspondirenden Richtung dy auf S die Polarebene

$$\sum z_i f_{ik} dy_k = 0,$$

in Bezug auf K_ε. Zufolge der Gleichungen (1) sind diese beiden Ebenen identisch. Also folgt:

Zugehörige Fortschreitungsrichtungen auf H *und* S *in den correspondirenden Punkten* x *und* y *sind die Polaren der Ebenen des Ebenenbüschels mit der Axe* (xy) *in Bezug auf die conjugirten Kegel* K_λ *und* K_ε.

Als Bedingung der Haupttangentenrichtungen von S erhält man nach § 3, (11)

$$\sum f_{ik} dx_k dy_i = -\sum y_i f_{ikl} dx_k dx_l = 0. \tag{6}$$

Daraus folgt: *Die beiden von einem Punkte* x *auf* H *auslaufenden Richtungen* ξ_1, ξ_2, *welche den Haupttangenten des correspondirenden Punktes* y *auf* S *entsprechen, werden durch den Kegel* K_λ *aus der Tangentenebene* T_λ *der Hesse'schen Fläche ausgeschnitten.*

Die Tangentenebenen an K_λ längs der Geraden ξ_1, ξ_2 gehen aber, wie zuvor bemerkt, durch den Punkt y und ihre Polaren in Bezug auf K_ε sind die Haupttangenten von S im Punkte y. Um also die Haupttangenten in einem Punkte y von S zu erhalten, lege man durch y die beiden Ebenen, welche die Tangentenebene von H in x in den Geraden ξ_1, ξ_2 schneiden, die dem Kegel K_λ angehören. Diese Ebenen berühren K_λ und schneiden auf der Ebene T_ε zwei Gerade η_1, η_2 aus, und die gesuchten Richtungen sind die vierten harmonischen zu den beiden Durchschnittslinien von K_ε mit T_ε und je einer der beiden Geraden η.

Fallen die beiden Tangentenebenen von y an den Kegel K_λ zusammen, so ist dasselbe mit den Haupttangenten von S der Fall. Dies ist aber nur möglich, wenn die Tangentenebene der Hesse'schen Fläche den zugeordneten Punkt der Steiner'schen Fläche enthält.

Für einen *parabolischen Punkt von* S, der durch die ebengemachte Bemerkung schon vollständig charakterisirt ist, muss nach (6) die Determinante*)

*) In dieser Determinante sowie allen folgenden ähnlicher Art bedeutet stets der Index i vier horizontale, der Index k ebensoviele verticale Reihen, so dass also die im Texte erwähnte eine 6reihige ist. Summationszeichen beziehen sich immer auf alle doppelt auftretenden Indices.

$$\begin{vmatrix} \sum y_s f_{sik} & \mathsf{H}_i & c_i \\ \mathsf{H}_k & 0 & 0 \\ c_k & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

für beliebige Werthe der c verschwinden, welche man auf die Form

$$(4) \qquad -\frac{1}{\mu}\begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} \sum (\mathsf{H}_i y_i)$$

bringt, falls zur Abkürzung

$$(8) \qquad \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \sum y_s f_{sik} & c_i \\ c_k & 0 \end{vmatrix},$$

gesetzt wird. Die Determinante (8) bezieht sich aber auf die Rückkehrcurve von S. Und so hat man:

Die eigentliche parabolische Curve der Steiner'schen Fläche, d. h. diejenige, welche die Punkte hyperbolischer und elliptischer Krümmung von einander scheidet, ist durch die Bedingung

$$\sum (\mathsf{H}_i y_i) \equiv \sum y_i y_k y_l f_{ikl} = 0 \text{ *)}$$

ausgedrückt, d. h. durch den Umstand, *dass die dritte Polare eines Punktes x der Hesse'schen Fläche durch den zugeordneten Punkt y der Steiner'schen Fläche geht, oder dass die Tangentenebene der Hesse'schen Fläche durch den zugeordneten Punkt der Steiner'schen Fläche geht.* Umgekehrt muss also der Punkt x der Hesse'schen Fläche auf der $n-3^{\text{ten}}$ Polare von y liegen**). Ausserdem enthält, wie bekannt, S $10(n-2)^3$ gerade Linien mit constanter Tangentialebene, welche den $10(n-2)^3$ Knotenpunkten von H entsprechen, und eine doppeltzählende parabolische Curve bilden, längs deren die Krümmung von S nicht wechselt. Diese $10(n-2)^3$ singulären Ebenen von S sind pinch-plans von besonderem Charakter.

Der eigentlichen parabolischen Curve auf S, welche im folgenden durch P_s bezeichnet werden soll, entspricht eine Curve P_h auf H, welche als Berührungscurve der Fläche $11n-24^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\sum (\mathsf{H}_i y_i)^2 = \sum \mathsf{H}_i \mathsf{H}_k y_i y_k = \mu \sum \mathsf{H}_i \mathsf{H}_k \mathsf{H}_{ik} = 0,$$

oder

$$(9) \qquad \Phi = \begin{vmatrix} f_{ik} & \mathsf{H}_i \\ \mathsf{H}_k & 0 \end{vmatrix} = 0$$

mit H sich darstellen lässt. Daraus folgt:

*) Wie man sieht, gilt dieser Satz übrigens für eine Form f von beliebig viel Variabelen.

**) Bei den Flächen vierter Ordnung muss also jeder der beiden Punkte x und y auf der ersten Polare des anderen liegen.

Die Fläche, welche nach Salmon und Clebsch) die Fläche $f = 0$ in der Curve der vierpunktigen Berührung schneidet, berührt die Hesse'sche Fläche* H *längs derjenigen Curve* P_k *von der Ordnung* $2(n-2)(11n-24)$**), *welche der Curve* P_k *auf der Steiner'schen Fläche eindeutig entspricht.*

Da die Covariante Φ (9) in den Knotenpunkten von H dreifache Punkte besitzt, so folgt***):

Jede der $10(n-2)^3$ *Geraden auf* S *wird von der Curve* P_s *in drei Punkten getroffen* †).

Die Geraden (xy), welche zugeordnete Punkte der Curven P_k, P_k verbinden, sind Tangenten von H in den Punkten x. *Sie berühren aber die letztere Fläche nach derjenigen Richtung, welche der parabolischen Tangente von* S *entspricht.* Denn die Bedingung einer stationären Ebene von S ist nach (5)

$$\sum (f_{ik}\, dx_k) = \varrho f_i, \quad i = 1, 2, 3, 4; \tag{10}$$

setzt man nun

$$dx_k = \mu x_k + \nu y_k, \tag{11}$$

was wegen der Gleichungen

$$\sum \mathsf{H}_i x_i = 0, \quad \sum \mathsf{H}_i\, dx_i = 0, \quad \sum \mathsf{H}_i y_i = 0$$

gestattet ist, so werden die Gleichungen (10) erfüllt, sobald man

$$(n-1)\,\mu = \varrho$$

setzt; die parabolische Tangente dy von S aber ist vermöge der Gleichungen (3) und (11) durch

$$\sum f_{ik}\, dy_i + \nu \mathsf{H}_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4 \tag{12}$$

charakterisirt, also die Polare der Tangentenebene T_k von H in Bezug auf den Kegel K_x. Und aus dem früher bemerkten folgt noch, dass der Kegel K_k die Ebene T_k längs der Geraden (xy) berührt.

Umgekehrt enthält die Ebene T_s im Punkte y nur dann den zugehörigen Punkt x, wenn $f = 0$ ist. Dann ist sie aber zugleich Tangentenebene von f in jenem Punkte, was auf den bekannten Satz führt, dass die parabolischen Ebenen von f zugleich die Fläche S umhüllen.

Bei der Fläche dritter Ordnung $f = 0$ fallen, wie bekannt, S und H zusammen. Gleichzeitig aber sagt die Bedingung der parabolischen

*) Vgl. Salmon-Fiedler, Geom. d. Raumes. § 475.

**) Die Ordnung von P_k ist schon von Bäcklund angegeben, a. a. O. Nr. 108.

***) Ueber eine andere Singularität von Φ siehe den Schluss dieses Paragraphen.

†) Diese Punkte sind, wie das Beispiel der F_3 zeigt, einfache Punkte von P_s.

Curve P_s aus, dass der parabolische Punkt von S auf der Fläche $f = 0$ liegt. Und so hat man den von Herrn Bauer hervorgehobenen Satz:

*Die allgemeine Fläche dritter Ordnung und ihre Hesse'sche Fläche schneiden sich gegenseitig in den vollständigen eigentlichen parabolischen Curven**).

Ich erwähne noch die Folgerungen für die Curventheorie. Den parabolischen Punkten der Steiner'schen Fläche entsprechen hier die Inflexionspunkte der Steiner'schen Curve. *Diese Punkte y sind dadurch charakterisirt, dass die dritte Polare eines Punktes x der Hesse'schen Curve durch sie geht, und diese Punkte x sind zugleich die*

$$3(n-2)(4n-9)$$

Berührungspunkte der Curve $2(4n-9)^{ter}$ *Ordnung*

$$\begin{vmatrix} f_{ik} & H_i \\ H_k & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad i, k = 1, 2, 3$$

mit der Hesse'schen Curve; Tangenten der letzteren in diesen Punkten sind die Geraden (xy).

Die Ordnung der Curve P_s, welche freilich schon aus den allgemeinen Betrachtungen des § 3 entnommen werden kann, ist nun auch leicht direct als Anzahl der gemeinsamen Lösungen der 6 Gleichungen

$$\sum (y_i f_{ik}) = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4;$$

$$\sum (a_i y_i) = 0,$$

$$\sum y_i y_k y_l f_{ikl} \equiv \sum y_i H_{ik} f_{ikl} = 0$$

zu bestimmen, was auf die Untersuchung der Matrix

$$\left\| f_{1i}, f_{2i}, f_{3i}, f_{4i}, a_i, \sum H_{mn} f_{imn} \right\| = 0$$

mit vier Horizontalreihen führt, welche nach Salmon**)

$$6(4n-9)(n-2)^2 + 4(n-2)^3 - 10(n-2)^3 = 6(n-2)^2(3n-7)$$

Lösungen liefert.

---

*) G. Bauer: Von der Hesse'schen Determinante der Hesse'schen Fläche einer Fläche dritter Ordnung. Abh. d. bayer. Academie XIV. Uebrigens bemerkt auch schon Herr Sturm, dass die parabolischen Punkte der F_3 zugleich parabolische Punkte ihrer Hesse'schen Fläche sind; Synthetische Untersuchungen über die Fläche dritter Ordnung, S. 149. Das Theorem des Herrn Bauer gestattet indessen eine Verallgemeinerung für alle cubischen Formen, welche ich an einer anderen Stelle entwickeln werde.

**) Salmon-Fiedler, Geometrie d. Raumes, 3. Auflage, S. 587 ff.

Die *Rückkehrcurve* R_s auf S ist gegeben durch das Verschwinden der Form (7), also durch

$$\frac{\begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}}{c_x^2} = 0. \tag{13}$$

Da diese die y im dritten Grade enthält, so folgt:

Jede der $10(n-2)^3$ *Geraden auf* S *wird von der Rückkehrcurve* R_s *in drei Punkten getroffen.*

Aber in diesen Punkten *berührt* R_s die genannten Pinch-lines*). Denn einer beliebigen auf H gezogenen Curve C_h, welche der R_s auf H zugeordneten Curve R_h in m Punkten begegnet, entspricht auf S eine Curve C_s, welche R_s in den m entsprechenden Punkten berührt**). Geht nun C_h durch einen der Knotenpunkte von H, so sondert sich aus derselben die entsprechende pinch-line aus, welche aus diesem Grunde also dreifache Tangente von R_s bleiben muss. Damit ist zugleich der besondere Charakter der $10(n-2)^3$ pinch-plans von S ausgesprochen***). Jede der $10(n-2)^3$ Geraden wird daher von der Doppelcurve von S in $4(n-2)^3 - 10$ einfachen Punkten derselben getroffen.

Um die Ordnung von R_s zu erhalten, ersetze man in (13) die $y_i y_k$ durch H_{ik} Dann entsteht eine in den y lineare Form A_y, welche die x in der $(6n-17)^{\text{ten}}$ Dimension enthält. Da nun die Matrix

$$\| A_i, f_{1i}, f_{2i}, f_{3i}, f_{4i}, a_i \| = 0,$$

für

$$6(n-2)^2(6n-17) + 4(n-2)^3 - 10(n-2)^3 = 30(n-2)^2(n-3)$$

Werthe verschwindet, so ist die *Ordnung der Rückkehrcurve* R_s

$$c = 30(n-2)^2(n-3).$$

Ebenso erhält man als Zahl der Stellen, in denen ein Tangentenkegel von S, dessen Ordnung $a = 6(n-2)^2(n-1)$ ist, die Rückkehrcurve durchsetzt,

$$\sigma = 10(n-1)(n-2)(3n-8).$$

Wie man sieht, lassen sich diese Abzählungen sämmtlich so ausführen, dass man es stets mit einem *in den y linearen Systeme von Gleichungen* zu thun hat. Bequemer ist es indessen den folgenden Satz zu benutzen, mittels dessen man alle Fragen dieser Art erledigt

*) Dies bemerkt auch Herr Bäcklund, a. a. O. Nr. 106.

**) Vgl. die Auseinandersetzungen in Herrn Zeuthen's ausgezeichneter Arbeit: Sur deux surfaces, dont les points se correspondent un-à-un, diese Annalen IV, S. 22, 23.

***) Ueber die Natur des allgemeinen Pinch-plan siehe Zeuthen: Sur la theorie des surfaces réciproques, diese Annalen X, S. 478.

Hat man zwei Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$, *welche in Bezug auf die y homogen von der Ordnung* p, q, *in den x aber homogen in den Graden* s, t *sind, so ist die Anzahl der nicht in die Knotenpunkte von* H *fallenden, mit* $H = 0$ *gemeinsamen Lösungen*

$$4(n-2)\,st + 6(n-2)^2\,[pt + qs] + 4(n-2)^3\,pq;$$

ein Satz, dessen Beweis leicht zu führen ist.

Zur weiteren Controle bestimme ich noch die Zahl $r + \beta$. Der Curve R_s, verbunden mit einem ebenen Schnitte $a_y = 0$ von S, entspricht auf H eine Curve, welche durch die Fläche

$$\frac{\begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}}{c_x^2}\, a_y = 0$$

von der Ordnung $9n - 23$ ausgeschnitten wird, die in den Knoten von H selbst conische Punkte besitzt. Es ist daher die Ordnung der Curve R_h gleich $10(n-2)\,(3n-8)$, weil die Ordnung der ergänzenden, dem ebenen Schnitte entsprechenden Curve B gleich $6(n-1)^2$ ist*). Da nun das Geschlecht von $a_y = 0$, d. h. des ebenen Schnittes von S, dessen Singularitäten bereits bestimmt wurden, durch die Formel

$$\begin{aligned} 2p - 2 &= 6(n-1)\,(n-2)^2 + 30(n-2)^2\,(n-3) - 8(n-2)^3, \\ &= 4(n-2)^2\,(7n-20) \end{aligned}$$

bestimmt ist, so wird der Rang von B, welche als Berührungscurve der Fläche

*) Einer beliebigen Curve C_s von der Ordnung s auf S, welche den j' pinchlines in $m_1, m_2, \ldots, m_{j'}$ Punkten begegnet, entspreche eine Curve C_h von der Ordnung h auf H. Die Curve

$$a_y\, b_y \equiv \begin{vmatrix} f_{ik}\, a_i \\ b_k \end{vmatrix} = \psi = 0$$

begegnet der C_s in $2s$ Punkten. Da nun die Fläche $3(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $\psi = 0$ in den Knoten von H einfache Punkte hat, so schneidet ψ die Curve C_h in

$$2s + \sum_1^{j'} m_k$$

Punkten. Also hat man

$$3(n-2)\,h = 2s + \sum_1^{j'} m_k.$$

Für die Doppelcurve von der Ordnung $s = b$ lautet dagegen die Formel

$$3(n-2)\,h = 4b + 20(n-2)^3\,[2(n-2)^3 - 5],$$

so dass in diesem Falle

$$h = 4(n-2)\,[6n^4 - 48n^3 + 144n^2 - 217n + 160],$$

wie dies auch schon Herr Bäcklund angiebt.

$$\begin{vmatrix} f_{ik}\, a_i \\ a_k \end{vmatrix} = 0$$

mit $\mathsf{H} = 0$ ersichtlich keine Spitzen haben kann, gleich

$$2p - 2 + 12(n-2)^2 = 4(n-2)^2\,(7n - 17).$$

Nun ist aber der Gesammtrang der vollständigen Schnittcurve $(R_k B)$ mit $30(n-2)^2\,(n-3)$ nicht in die Knoten von H fallenden einfachen Schnittpunkten gleich

$$4(n-2)\,(qn - 23)\,(13n - 33) - 80(n-2)^3 - 60(n-2)^2\,(n-3),$$

so dass als Rang von R_k sich ergiebt

$$4(n-2)\,(75n^2 - 410n + 555).$$

Mithin ist das Geschlecht von R_k, welche Curve ebenfalls keine Spitzen haben kann, da die Spitzen β von R_s sich bei der Abbildung auf H auflösen,

$$2p - 2 = 4(n-2)\,[75n^2 - 425n + 595],$$

und hieraus ergiebt sich in Uebereinstimmung mit der Formel (16) § 3

$$r + \beta = 20(n-2)\,[18n^2 - 100n + 137].$$

Auf demselben Wege lässt sich auch der *Rang der parabolischen Curve* P_s, *und damit alle weiteren Charaktere derselben*, bestimmen. Denn auch die Curve P_k hat bei ihrer Abbildung auf H keine Spitzen, da P_s überhaupt die Rückkehrcurve R_s nur in gewöhnlichen Punkten derselben *berührt*, keineswegs aber durch die Spitzen derselben hindurchgeht. Es wird also der Rang der parabolischen Curve P_s gleich

$$20(n-2)\,(10n^2 - 48n + 57),$$

und man kann diese Zahl wieder durch eine directe Untersuchung des Gleichungssystemes, auf welches die Form

$$\sum y_i\, y_k\, y_l f_{ikl} = 0$$

führt, bestätigen. Und auf ähnlichem Wege erhält man als *Zahl der Punkte in denen* R_s *und* P_s *sich berühren*

$$20(n-2)\,(n-3)\,(6n - 13).$$

Ich ermittele weiter die *Ordnung* r' *der Developpabelen der stationären Tangentenebenen von* S, oder die Ordnung der von den parabolischen Tangenten derselben gebildeten Fläche. Die Elimination der dy aus den Gleichungen (12) und der Gleichung

$$(a_y)\,(b_{dy}) - (b_y)\,(a_{dy}) = 0,$$

welche ausdrückt, dass die parabolische Tangente von der Durchschnittslinie der Ebenen $(a_s) = 0$, $(b_s) = 0$, getroffen sind, liefert die Bedingung

$$\begin{vmatrix} a_k b_y - b_k a_y & 0 & 0 \\ f_{ik} & \mathsf{H}_i & c_i \\ c_k & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welche den Factor $(c_y)^2$ enthält. In Verbindung mit den Gleichungen $\mathsf{H} = 0$, $\sum \mathsf{H}_i y_i = 0$, erhält man

$$r' = 4(n-2)(n-3)(3n-7) + 6(n-2)^2(10n-24) + 12(n-1)^3$$
$$= 4(n-2)[21n^2 - 94n + 105].$$

Endlich kann man auch die *Zahl* β' leicht erhalten. Denn die Bedingungen einer vierpunktig berührenden Tangente von S lauten, wie man durch wiederholte Differentiation der Gleichungen (2), in denen

$$d^3 y_i \equiv d^2 y_i \equiv dy_i$$

zu setzen ist, findet:

$$\sum y_s f_{sik}\, dx_i\, dx_k = 0,$$
$$\sum [3 f_{ikl}\, dy_l + y_s f_{sikl}\, dx_l]\, dx_i\, dx_k = 0. \tag{14}$$

Soll nun eine parabolische Tangente von S zugleich vierpunktige Tangente sein, wie es der Zahl β' entspricht, so ist in der letzten Gleichung $dx_i = x_i + \nu y_i$ zu setzen, und man erhält dann durch Elimination der Differentiale dy die Bedingung

$$\begin{vmatrix} 3\mathsf{H}_k & \sum y_s y_k y_l y_m f_{sklm} & 0 \\ f_{ik} & \mathsf{H}_l & c_i \\ c_k & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welche

$$4(n-2)(n-3)(4n-10) + 6(n-2)^2[(4n-36] + 24(n-2)^3$$

Lösungen liefert, so dass

$$\beta' = 4(n-2)(31n^2 - 142n + 162)$$

wird. Bei der Fläche dritter Ordnung $f = 0$, geht indessen die Bedingung (14) in die einfachere

$$\sum \mathsf{H}_i\, dy_i = 0$$

über. Das heisst: *Jede Gerade, welche für die Hesse'sche Fläche der Fläche dritter Ordnung im Punkte y parabolische Undulationstangente ist, liegt in der Tangentenebene des zugehörigen Punktes x der Hesse'schen Fläche*, und die Anzahl dieser Geraden β' ist bestimmt durch die Gleichung

$$(15) \qquad \Psi = \begin{vmatrix} f_{ik} & \mathsf{H}_i & c_i \\ \mathsf{H}_k & 0 & 0 \\ c_k & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welche ausdrückt, dass die Ebene T_k den Kegel K_s berührt.

Es führt aber dies Verhalten von Ψ auf eine Singularität der Covariante Φ, welche bisher nicht bemerkt zu sein scheint. Wenn die Ebene T_k den Kegel K_s berührt, so bestehen für beliebige c_i die Gleichungen

$$(16) \qquad \begin{aligned} &\sum z_i f_{ik} = \mathsf{H}_k, \quad k = 1, 2, 3, 4; \\ &\sum z_i \mathsf{H}_i = 0, \\ &\sum z_i c_i = 0, \end{aligned}$$

aus denen, wegen $\mathsf{H} = 0$, auch

$$\sum z_i f_i = 0, \quad \sum \mathsf{H}_i y_i = 0$$

folgt. Bildet man nun $\frac{\partial \Phi}{\partial x_l}$, so erkennt man zunächst aus den Gleichungen (16), dass dieser Werth Null ist. Trotzdem aber besitzt die Curve P_k nicht etwa wirkliche Doppelpunkte in den durch (15) definirten Punkten, deren Zahl β' ist. Es ergiebt sich nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_l \partial x_m} = &- \mathsf{H}_l \sum z_i \mathsf{H}'_{im} - \mathsf{H}_m \sum z_i \mathsf{H}'_{il} \\ &- \sum (\mathsf{H}'_{sl} - z_i f_{sli}) \mathsf{H}'_{im} y_s y_t \\ &- \sum (\mathsf{H}'_{sm} - z_i f_{smi}) \mathsf{H}'_{lt} y_s y_t + S, \end{aligned}$$

falls man unter S den Ausdruck versteht, der aus der Summe der 12 Determinanten

$$\begin{vmatrix} f_{1kl} & \mathsf{H}'_{1l} - \sum z_i f_{1li} \\ f_{2km} & \mathsf{H}'_{2m} - \sum z_i f_{2mi} \\ f_{k3} & 0 \\ f_{k4} & 0 \\ \mathsf{H}_k & 0 \end{vmatrix}$$

hervorgeht, welche entstehen, wenn man in den ersten 4 Horizontalreihen überhaupt je zweimal die Indices m, l auftreten lässt; die H'_{il} bedeuten zweite Differentialquotienten von H. Durch einfache Umstellungen aber verwandelt man S in den Ausdruck

$$- \mathsf{H}_i\Big(\sum (\mathsf{H}'_{ms} z_s) - \sum (z_i z_k f_{ikm})\Big) - \mathsf{H}_m\Big(\sum (\mathsf{H}'_{is} z_s) - \sum (z_i z_k f_{ikm})\Big)$$
$$+ \sum (\mathsf{H}'_{tm} y_t)\,(z_k y_s f_{ski}) - \sum (z_i f_{itm} y_t)\,(z_k f_{ksl} y_s)$$
$$+ \sum (\mathsf{H}'_{tl} y_t)\,(z_k y_s f_{skm}) - \sum (z_i f_{itl} y_t)\,(z_k f_{ksm} y_s),$$

so dass für

$$\sum \xi_i \mathsf{H}_i = 0$$

$$\sum \xi_l \xi_m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_m \partial x_l} = -2\Big[\sum (\mathsf{H}'_{is} y_s \xi_i) - \sum (z_i f_{sik} y_s \xi_k)\Big]^2$$

wird. Das heisst also:

Die Covariante Φ *besitzt ausser den* $10(n-2)^3$ *dreifachen Punkten noch* β' *weitere Doppelpunkte, welche ebenfalls auf der Hesse'schen Fläche liegen. In diesen berührt aber der Knotenkegel von* Φ *diese letztere Fläche, so dass für die der parabolischen Curve* P_s *entsprechende Curve* P_h *keine Singularitäten entstehen.*

Aus den Formeln des § 3 sowie aus den Resultaten der gegenwärtigen Betrachtungen erhält man nunmehr folgende Tabelle der wichtigsten Charaktere von S*):

$$N = 4(n-2)^3,$$
$$a = 6(n-1)(n-2)^2,$$
$$n' = 4(n-1)^2(n-2),$$
$$c = 30(n-2)^2(n-3),$$
$$\sigma = 10(n-1)(n-2)(3n-8),$$
$$\sigma' = 6(n-2)^2(3n-7),$$
$$c' = 2(n-1)(n-2)(11n-24),$$
$$r = 20(n-2)(6n^2-30n+37),$$
$$\beta = 40(n-2)(6n^2-35n+50),$$
$$\varkappa = 4(n-1)(n-2)(7n-18),$$
$$\varrho = 4(n-1)(n-2)\big(6(n-2)^4-25n+64\big),$$
$$b = 2(n-2)^2(n-3)(4n^3-20n^2+36n-45),$$
$$r' = 4(n-2)(21n^2-94n+105),$$
$$\beta' = 4(n-2)(31n^2-142n+162),$$
$$i = 0,$$
$$f = 0,$$
$$\omega = 0,$$

*) Die Zahlen N, a, j' findet man auch bei Herrn Cremona, Theorie der Oberflächen, S. 141. Die Zahlen n', c, k, σ', c', b sind von Herrn Bäcklund zuerst gegeben worden, a. a. O. Nr. 99—112.

$$\begin{aligned}
\chi &= 0,\\
\omega' &= 0,\\
\chi' &= 0,\\
j &= 0,\\
j' &= 10(n-2)^3.
\end{aligned}$$

Aus ihnen lassen sich die weiteren δ, γ, t, ... vermittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned}
2\delta &= a(a-1) - n' - 3\varkappa,\\
\gamma &= c(N-2) - 2\sigma - 4\beta,\\
3t &= b(N-4) - \varrho - 2\beta - 3\gamma, \text{ etc. etc.}
\end{aligned}$$

berechnen. Endlich kann man die gegebenen Werthe auch mittels der beiden Geschlechtszahlen von H bestätigen. Denn für diese letztere Fläche hat man, falls die entsprechenden Charaktere, mit Ausnahme der Ordnung $4(n-2)$, durch grosse Buchstaben bezeichnet werden:

$$\begin{aligned}
\mathsf{A} &= 4(n-2)(4n-9),\\
\mathsf{N}' &= 4(n-2)(4n-9)^2 - 20(n-2)^3,\\
R' &= 8(n-2)(4n-10)(12n-28) - 60(n-2)^3,\\
C &= 0,\\
C' &= 16(n-2)(4n-9)(4n-10) - 60(n-2)^3,\\
\mathsf{B}' &= 8(n-2)(4n-10)(44n-112) - 240(n-2)^3,\\
\Sigma' &= 16(n-2)(4n-10).
\end{aligned}$$

Für die erste Geschlechtszahl von H hat man daher den doppelten Ausdruck

$$\begin{aligned}
\mathsf{N}' - 2\mathsf{A} + 12(n-2) + 20(n-2)^3 &= 4(n-2) - 2\mathsf{A} + 3\mathsf{N}' + R' - 2C'\\
&= 8(n-2)(8n^2 - 40n + 51);
\end{aligned}$$

und ebenso für die zweite

$$\begin{aligned}
&-12\mathsf{A} + 24\mathsf{N}' + \mathsf{B}' + 3R' - 15C' + 2\Sigma'\\
&= C' - 12\mathsf{A} + 96(n-2) + 60(n-2)^3\\
&= 16(n-2)(16n^2 - 88n + 123).
\end{aligned}$$

Indessen ist zu bemerken, dass die Zahlen β', r' wegen der speciellen Natur der pinch-plans von S nicht mehr den aus Herrn Zeuthen's Formeln (Diese Ann. IV, S. 42, X, 545) folgenden reciproken Formeln genügen.

München, im Januar 1886.

Ueber eine Eigenschaft unendlicher Reihen.

Von

Leo. Königsberger in Heidelberg.

Anknüpfend an einen Satz über Potenzreihen, den ich in meiner Abhandlung „Eigenschaften irreductibler Functionen“ im 95ten Bande des Journals für Mathematik bewiesen habe, will ich im Folgenden auf eine Verallgemeinerung und einige Anwendungen desselben näher eingehen und schicke zunächst den folgenden Hülfsatz voraus:

Wenn eine unendliche unbeschränkt convergirende Reihe

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \cdots, \tag{A}$$

in welcher $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... rationale Functionen von x bedeuten, deren Coefficienten rational aus ϱ beliebigen Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ zusammengesetzt sind, so beschaffen ist, dass, wie gross auch eine ganze positive Zahl ν gegeben sein mag, stets ein noch grösseres n angegeben werden kann so, dass für eine mit Adjungirung von $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ algebraische Zahl x, der Ausdruck

$$\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_1) + \cdots + \varphi_n(x_1)$$

eine mit Adjungirung derselben Grössen rationale Zahl wird, so werden alle Lösungen der die algebraische Zahl x_1 definirenden, mit Adjungirung von $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ irreductibeln Gleichung der unendlichen Reihe denselben Werth ertheilen.

Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, sei zunächst bemerkt, dass, wenn eine unendliche convergente Reihe für einen Werth der Variabeln einen bestimmten Werth A annimmt, dies nichts anderes bedeutet, als dass man stets ein n so gross angeben kann, dass der Werth der n ersten Glieder der Reihe für jene Variable sich von A um weniger als eine beliebig kleine vorgelegte Grösse unterscheidet, und dass für ein grösser werdendes n dieser Unterschied noch kleiner wird. Wenn nun für irgend ein n

$$\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_1) + \cdots + \varphi_n(x_1) = M_n \tag{1}$$

wird, worin M_n rational aus $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ zusammengesetzt ist, so

werden bekanntlich sämmtliche Lösungen der die Grösse x_1 definirenden irreductibeln Gleichung

$$x^m + P_1 x^{m-1} + \cdots + P_m = 0, \tag{2}$$

worin $P_1, P_2, \ldots, P_m$ rational aus $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ zusammengesetzt sind, auch Lösungen der Gleichung

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x) = M_n \tag{3}$$

sein, und dasselbe wird stattfinden, wie gross auch n in (3) genommen werden mag, so lange nur die durch (1) definirte Grösse M_n mit Adjungirung von $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ rational ist. Da aber der Voraussetzung gemäss in (1) n beliebig gross gewählt werden kann, und der vorgeschriebene Charakter von M_n erhalten bleibt, so wird sich die unendliche Reihe für alle Wurzeln der irreductibeln Gleichung (2) gleichzeitig derselben Grösse bis auf dieselben Unterschiede, die beliebig klein gemacht werden können, nähern, d. h. alle Lösungen von (2) geben der unendlichen Reihe denselben Werth.

Zur Gültigkeit dieses Satzes brauchte nicht die unbeschränkte Convergenz der Reihe (A) vorausgesetzt zu werden; denn wenn nur x_1 dem Convergenzbereiche angehört, so bleiben alle Schlüsse bestehen, und es werden also, wenn auch die anderen Lösungen der Gleichung (2) ausserhalb des Convergenzbereiches der unendlichen Reihe liegen, diese der unendlichen divergenten Reihe denselben Werth ertheilen, indem eine Reihe sehr wohl die Eigenschaft haben kann, dass sich, wie gross auch eine ganze Zahl ν gegeben sei, stets eine noch grössere ganze Zahl n angeben lässt, für welche sich $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x)$ von einem bestimmt gegebenen Werthe M um weniger als eine beliebig kleine gegebene Zahl δ unterscheidet, während ein anderes Fortschreiten ins Unendliche der für dieses x als divergent vorausgesetzten und in unserem Falle oscillirenden Reihe einen anderen endlichen oder unendlichen Werth ertheilen kann.

Aus dem eben bewiesenen Satze können wir aber schliessen,

dass, wenn alle Werthe von x, welche der Reihe (A) *denselben Werth ertheilen wie x_1, zu x_1, welches nicht rational in $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ ausdrückbar sein soll, in einer solchen Beziehung stehen, wie dies für Lösungen einer irreductibeln Gleichung nicht gestattet ist, die Reihe*

$$\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_1) + \cdots + \varphi_n(x_1) \tag{B}$$

von einem bestimmten n an für beliebig grösser werdende endliche n stets eine mit Adjungirung von $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ irrationale (algebraische, nicht rationale) Zahl sein wird,

da, wenn dies nicht der Fall wäre, alle Lösungen der zu x_1 gehörigen irreductibeln Gleichung, wie oben gezeigt worden, der Reihe denselben Werth ertheilen würden, was der Voraussetzung nach nicht geschehen

darf; dies wäre z. B. der Fall, wenn alle Werthe von x, welche der Reihe (A) denselben Werth ertheilen, sich in der Form $m_0 + m_1 x_1$ darstellen würden, worin m_0 und m_1 rationale Verbindungen von $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ bedeuten, von denen m_1 nicht die negative Einheit ist, da Lösungen einer irreductibeln Gleichung bekanntlich nicht in einer solchen Beziehung zu einander stehen dürfen.

Wollte man für diesen Satz die Bedingung der unbeschränkten Convergenz fallen lassen, so müsste man auch die Kenntniss der Werthe der unendlichen Reihe in Punkten, die ausserhalb des Convergenzbereiches liegen, voraussetzen, was offenbar nicht angeht, und ich erlaube mir, ein von Herrn Weierstrass mir mitgetheiltes Beispiel anzuführen, in welchem eine beschränkt convergirende Reihe in dem Convergenzbereiche überhaupt nicht für zwei algebraische Zahlen denselben Werth annehmen kann, und trotzdem sich beliebig grosse n angeben lassen, für welche die endliche Reihe für den betrachteten Werth der Variabeln einen rationalen Werth annimmt. „Sei $\chi(x)$ eine ganze Function von x mit lauter rationalen Zahlencoefficienten; die Gleichung $\chi(x) = 0$ sei irreductibel, eine ihrer Wurzeln x_1 dem absoluten Betrage nach kleiner als 1, die anderen aber grösser als 1. Man entwickle

$$\frac{e^x}{1-x}$$

nach steigenden Potenzen von x, bezeichne mit $E_n(x)$ die Summe der n ersten Glieder der Reihe und setze (für $n = 1, 2, \ldots, \infty$)

$$F_n(x) = \left(\chi(x) + \frac{1+(-1)^n}{n}\right) E_n(x),$$

$$\varphi_1(x) = F_1(x), \quad \varphi_\nu(x) = F_\nu(x) - F_{\nu-1}(x) \qquad (\nu > 0).$$

Dann ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x) = F_n(x),$$

und man hat für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag kleiner als 1 ist,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x) = \chi(x) \frac{e^x}{1-x},$$

während die Reihe

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots$$

für keinen Werth von x, dessen absoluter Betrag $\geqq 1$ ist, convergirt. Sind nun x', x'' irgend zwei algebraische Zahlen, deren absolute Beträge kleiner als 1 sind, so kann die Gleichung

$$\chi(x') \frac{e^{x'}}{1-x'} = \chi(x'') \frac{e^{x''}}{1-x''}$$

oder

$$\chi(x')\frac{e^{x'-x''}}{1-x'} = \chi(x'')\frac{1}{1-x''}$$

nicht bestehen, indem $e^{x'-x''}$ eine transcendente Zahl ist, die Gleichung also nur gelten könnte, wenn $\chi(x')$, $\chi(x'')$ beide gleich Null wären, was gegen die Annahme ist. Es ist also für die betrachtete Reihe die Bedingung des Satzes erfüllt; gleichwohl hat

$$\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(x_1)$$

für jedes ungerade n einen *rationalen* Werth, nämlich den Werth Null."

Der oben aufgestellte Satz lässt sich aber noch anders aussprechen; nehmen wir nämlich an, dass die Reihe (A) die Eigenschaft hat, dass alle Werthe der Variabeln, welche ihr denselben aber beliebigen Werth ertheilen, stets in einer Beziehung zu einander stehen, wie es zwischen Lösungen einer irreductibeln Gleichung nicht gestattet ist, so wird zunächst für solche x, welche rational durch $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ ausgedrückt sind, die Summe (B) von $n = 1$ an stets für beliebig grosse endliche n in eben diesen Grössen rational sein; ist x eine in $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ algebraische Zahl, so wird nach dem vorigen Satze die Reihe (B) von einem bestimmten n an nie rational sondern für beliebig grosse endliche n stets nur algebraisch in jenen Grössen sich ausdrücken lassen, und es ist aus der Zusammenstellung der den x-Werth definirenden algebraischen irreductibeln Gleichung

$$x^m + P_1 x^{m-1} + \cdots + P_m = 0$$

und des Ausdruckes

$$y_n = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x)$$

klar, dass y_n im Allgemeinen ebenfalls eine algebraische Zahl m^{ter} Ordnung sein wird; ist endlich der Werth der Variabeln eine transcendente Zahl, so wird (B) offenbar von $n = 1$ ab, so lange n endlich bleibt, eine transcendente Zahl sein, weil y_n als algebraische Zahl auch das zugehörige x als algebraische Zahl definiren würde, und wir erhalten somit den Satz:

Wenn die unbeschränkt convergente Reihe

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \cdots$$

die Eigenschaft hat, dass ihr stets nur solche x ein und denselben Werth ertheilen können, welche nicht zugleich Lösungen einer mit Adjungirung von $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ irreductibeln Gleichung sein können, so wird dieselbe von einer bestimmten Grenze an für in $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ rationale, algebraische und transcendente Werthe der Variabeln stets für beliebig grosse aber endliche n entsprechend selbst wieder rationale, algebraische und

transcendente Werthe annehmen, gleichgültig welcher Natur der Werth der unendlichen Reihe selbst für das gewählte x ist.

Untersuchen wir, um eine Anwendung dieses Satzes zu machen, die Exponentialfunction

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

so wird dieselbe nur für x-Werthe, welche in der Beziehung x_1 und $x_1 + 2k\pi i$ zu einander stehen, wenn k eine ganze Zahl bedeutet, denselben Werth annehmen. Nun können aber zwei solche Werthe nicht zugleich Lösungen einer irreductibeln Gleichung

$$x^m + P_1 x^{m-1} + \cdots + P_m = 0$$

mit rationalen Coefficienten sein; denn aus den beiden Gleichungen

$$x_1^m + P_1 x_1^{m-1} + \cdots + P_m = 0$$

und

$$(x_1 + 2k\pi i)^m + P_1 (x_1 + 2k\pi i)^{m-1} + \cdots + P_m = 0$$

würde durch Elimination von x_1 eine algebraische Gleichung für π mit rationalen Coefficienten sich ergeben, was dem transcendenten Charakter der Zahl π widerspricht. Nach dem oben bewiesenen Satze wird daher die Exponentialreihe von einer bestimmten Grenze an für rationale, algebraische und transcendente Werthe von x selbst entsprechend rational, algebraisch und transcendent sein, gleichgültig welcher Natur der Werth der unendlichen Reihe selbst für das gewählte x ist. Nun wird aber nach den bekannten Sätzen des Herrn Lindemann e^x für ein algebraisches von Null verschiedenes x stets transcendent, für ein trancendentes x dagegen algebraisch oder transcendent sein, und wir können daher den folgenden Satz aussprechen:

Die Exponentialreihe nähert sich für eine rationale Variable bei stetem Durchlaufen von rationalen Werthen einer transcendenten Zahl, für algebraisch irrationale Werthe der Variabeln von einer bestimmten Grenze an bei stetem Durchlaufen von algebraisch irrationalen Werthen einer transcendenten Zahl. und endlich für transcendente Variable bei stetem Durchlaufen von transcendenten Werthen einer algebraischen oder transcendenten Zahl — es bleibt somit von einer bestimmten Grenze an der Charakter der Werthe der endlichen Reihen stets derselbe und kann sich nur für $n = \infty$ ändern.

Dasselbe gilt offenbar für die Reihe

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots,$$

weil je zwei Werthe, welche ihr denselben Werth ertheilen, in der Beziehung x_1 und $x_1 + 2k\pi$ zu einander stehen, und da nun die Function $\sin x$ für jeden algebraischen Werth von x, Null ausgeschlossen, wieder transcendent sein muss, so wird der eben für die Exponential-

reihe ausgesprochene Satz auch für die sinus- und ebenso für die cosinus-Reihe gelten, und dasselbe bleibt, wie leicht zu sehen, für die inversen Functionen bestehen.

Es mag noch bemerkt werden, dass die Exponentialreihe nicht bloss, wie es die Voraussetzung des allgemeinen Satzes verlangt, nur für solche Werthe der Variabeln denselben Werth annimmt, die in einer Beziehung zu einander stehen, wie sie für Lösungen einer irreductibeln Gleichung nicht gestattet ist, sondern dass sie überhaupt nie für zwei algebraische Zahlen denselben Werth annehmen kann, da aus $e^{x'} = e^{x''}$ sich $e^{x'-x''} = 1$ ergiebt, und die Exponentialfunction für ein algebraisches von Null verschiedenes Argument transcendent ist also nicht den Werth 1 annehmen kann. Und man sieht unmittelbar, dass wir allgemein als speciellen Fall des oben aufgestellten Theorems den Satz aussprechen können:

Wenn die unbeschränkt convergente Reihe

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \cdots$$

die Eigenschaft hat, dass es keinen anderen mit Adjungirung von $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ *algebraischen Werth des Argumentes giebt, für welchen diese denselben Werth annimmt wie für* x_1, *so wird die endliche Reihe*

$$\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_1) + \cdots + \varphi_n(x_1)$$

von einem bestimmten n an für beliebig grösser werdende endliche n stets eine mit Adjungirung von $\delta_1, \ldots, \delta_\varrho$ *irrationale (algebraische, nicht rationale) Zahl sein,*

oder vermittelst einer ähnlichen Umgestaltung wie oben:

Wenn die unbeschränkt convergente Reihe

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \cdots$$

die Eigenschaft hat, dass sie nie für zwei mit Adjungirung von $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ *algebraische Werthe der Variabeln denselben Werth annimmt, so wird dieselbe von einer bestimmten Grenze an für in* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ *rationale, algebraische und transcendente Werthe der Variabeln stets für beliebig grosse aber endliche n entsprechend selbst wieder rationale, algebraische und transcendente Werthe annehmen, gleichgültig welcher Natur der Werth der Reihe selbst für das gewählte x ist.*

Heidelberg, im März 1886.

Ueber die Integration der vollständigen Differentiale.

Von

G. Morera in Pavia.

Mayer hat das für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung höchst wichtige Theorem gefunden, dass „die Integration eines unbeschränkt integrablen Systems von linearen totalen Differentialgleichungen auf die Integration eines Systems von ebenso viel gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden kann".*)

In dieser Abhandlung versuche ich den wahren Grund dieses Ergebnisses streng zu entwickeln, wodurch dasselbe in ein helleres Licht gestellt wird.

Dabei habe ich Methoden verwerthet, welche von Riemann herrühren und namentlich von Lipschitz weiter verfolgt worden sind.**)

Beweis einer fundamentalen Integralformel.

Es seien

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

n solche reellwerthige Functionen der unabhängigen reellen Veränderlichen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

welche in einem einfach zusammenhängenden n-dimensionalen Grössengebiete der x, welches der Kürze halber das *Monodromiegebiet* genannt werden möge, *überall eindeutig und stetig bleiben und erste Differentialquotienten besitzen.****)

Im Monodromiegebiete denken wir uns ein stetiges zweifach ausgedehntes Grössengebiet, oder in geometrischer Sprachweise ein stetiges Flächenstück Σ.

In Σ können die x immer als eindeutige und stetige Functionen von zwei unabhängigen Veränderlichen p, q aufgefasst werden, und

*) Math. Annalen, Bd. V, S. 448.

**) Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, Bd. II (Bonn 1880).

***) Für diese beiden Differentialquotienten wird nur die Integrirbarkeit vorausgesetzt.

man kann dabei annehmen, dass die Differentialquotienten $\frac{\partial x_i}{\partial p}$, $\frac{\partial x_i}{\partial q}$, $\frac{\partial^2 x_i}{\partial p \partial q}$ existiren.

Fasst man dann Σ als ein gewöhnliches Flächenstück auf, so sind die p, q bekanntlich die krummlinigen Coordinaten der Punkte der Oberfläche Σ, und man kann auf derselben ebenso von den Linien p und q ($q =$ const., $p =$ const.) sprechen, wie man in einer Ebene, deren Punkte auf ein Cartesisches Axensystem bezogen sind, von den Geraden x und y ($y =$ const., $x =$ const.) spricht. Wenn nun P und Q auf Σ eindeutige und stetige Functionen von p und q sind und daselbst *integrirbare* partielle Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial q}$, $\frac{\partial Q}{\partial p}$ besitzen, so hat man bekanntlich

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p} \right) dp\, dq = - \int (P\, dp + Q\, dq),$$

wo rechts die Integration auf den ganzen Rand von Σ zu erstrecken ist.

Man hat dabei diesen Rand in demselben Sinne zu durchlaufen, in welchem man den Rand eines unendlich kleinen Vierecks durchläuft, dessen aufeinanderfolgende Ecken sind:

$$(p, q),\ (p + dp, q),\ (p + dp, q + dq),\ (p, q + dq);$$

die Differentiale dp und dq werden als positiv vorausgesetzt.

Wir setzen nun

$$P = \sum_i X_i \frac{\partial x_i}{\partial p},$$

$$Q = \sum_i X_i \frac{\partial x_i}{\partial q}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so dass also wird

$$\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p} = \sum_i \sum_k \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial p} & \frac{\partial x_i}{\partial q} \\ \frac{\partial x_k}{\partial p} & \frac{\partial x_k}{\partial q} \end{vmatrix}.$$

Die oben angeführte Formel bleibt auch für die gemachte Annahme gültig, so dass wir erhalten:

$$\iint_{\Sigma} \sum_i \sum_k \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial p} & \frac{\partial x_i}{\partial q} \\ \frac{\partial x_k}{\partial p} & \frac{\partial x_k}{\partial q} \end{vmatrix} dp\, dq = - \int \sum_i X_i\, dx_i.$$

Für $n = 3$ stimmt diese allgemeine Formel mit einer wohlbekannten der mathematischen Physik überein.

Der Differentialausdruck unter dem doppelten Integralzeichen ist die sogenannte *bilineare Covariante* des Differentialausdrucks $\sum_i X_i dx_i$, welche in der Behandlung des *Pfaff'schen Problems* eine fundamentale Rolle spielt.

Die beschränkenden Bedingungen, unter welchen der vorige Integralsatz aufgestellt ist, können zum Theil aufgehoben werden, wenn man solche Unstetigkeiten im Monodromiegebiet zulässt, welche die Gültigkeit der zu Grunde gelegten Integralformel nicht beeinträchtigen*).

Aber auf solche Einzelheiten werde ich hier nicht weiter eingehen.

Theorie der vollständigen Differentiale.

Die oben bewiesene Formel bildet den wahren Kernpunkt einer ebenso strengen wie einfachen Theorie der totalen Differentiale**).

In der That, wenn die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

überall im Monodromiegebiete erfüllt sind, schliesst man bei geeigneter Wahl des Flächenstücks Σ:

Das Integral

$$\int \sum_i X_i dx_i$$

verschwindet jederzeit, wenn es längs einer in sich zurücklaufenden Linie des Monodromiegebietes erstreckt wird.

Nun nehmen wir im Monodromiegebiete zwei Werthsysteme

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)},$$
$$x_1^{(1)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)},$$

und denken uns auf irgend eine Weise innerhalb des Monodromiegebietes eine stetige Werthfolge zwischen den beiden Werthsystemen $x_i^{(0)}$, $x_i^{(1)}$ ausgewählt, *dann ist der Werth des längs dieser Werthfolge erstreckten Integrals*

$$\int_{x_i^{(0)}}^{x_i^{(1)}} \sum_i X_i dx_i$$

unabhängig von der getroffenen Auswahl, oder, in geometrischer Sprachweise ausgedrückt, *unabhängig vom Integrationswege.*

---

*) S. z. B. Riemann's Inauguraldissertation (Ges. math. Werke, S. 16).

**) Vgl. Lipschitz, Lehrbuch der Analysis. Bd. II, S. 567 und ff.)

Wenn wir daher die $x_i^{(0)}$ als fest betrachten und die $x_i^{(1)}$ als veränderlich, so erfordert die Integration des vollständigen Differentials $\sum_i X_i dx_i$ *nur die Integration von* $\sum_i X_i dx_i$ *längs eines im Monodromiegebiete willkürlich gewählten Weges*, der von $x_i^{(0)}$ ausgeht und in $x_i^{(1)}$ endet, d. h. *es ist nur nöthig nach einem einzigen veränderlichen Parameter zu integriren.*

Diesen ganz elementaren Sinn hat das erwähnte Theorem von Mayer für den in Rede stehenden Fall.

Nehmen wir z. B. an, dass die Werthfolge

$$(\alpha) \qquad x_i = x_i^{(0)} + (x_i^{(1)} - x_i^{(0)})\, t$$

für alle Werthe von t zwischen 0 und 1 im Monodromiegebiete liegt. Das gesuchte Integral hat dann den Werth

$$\int_0^1 \sum_i |X_i| (x_i^{(1)} - x_i^{(0)})\, dt,$$

wobei mit $|X_i|$ derjenige Ausdruck bezeichnet ist, welcher aus X_i durch die Substitutionen (α) hervorgeht.

Man kann ohne Schwierigkeit diesen Satz auch direct nachweisen, falls die X_i als analytische Functionen der x_i gedacht werden.

Wir setzen

$$v = v(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) = \int_0^1 \sum_i |X_i| (x_i^{(1)} - x_i^{(0)})\, dt.$$

Durch Differentiation erhalten wir:

$$\frac{\partial v}{\partial x_k^{(1)}} = \int_0^1 \left\{ \sum_i \left| \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right| (x_i^{(1)} - x_i^{(0)})\, t + |X_k| \right\} dt.$$

Nun aber ist

$$\left| \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right| = \left| \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right|$$

und ausserdem

$$\frac{\partial |X_k|}{\partial t} = \sum_i \left| \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right| (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}).$$

In Folge dessen kommt:

$$\frac{\partial v}{\partial x_k^{(1)}} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (t\, |X_k|)\, dt = |X_k|_{t=1}$$

d. h.

$$= X_k(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Ist das Gebiet, innerhalb dessen die X_i eindeutig und stetig bleiben, mehrfach zusammenhängend, so kann man nach Riemanns Vorgang durch Legung von Querschnitten ein Monodromiegebiet herstellen. In diesem Falle besitzt das Integral Periodicitätsmoduln. Aber bei diesen hauptsächlich in der mathematischen Physik (für $n = 3$) üblichen Betrachtungen kann ich mich hier nicht aufhalten.

Die unbeschränkt integrablen Systeme von totalen Differentialgleichungen.

Es sei ein System von totalen Differentialgleichungen zur Integration vorgelegt

$$(\beta) \qquad \begin{cases} dy_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i^{(1)}\, dx_i, \\ dy_2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^{(2)}\, dx_i, \\ \cdots\cdots\cdots \\ dy_m = \sum_{i=1}^{n} X_i^{(m)}\, dx_i, \end{cases}$$

wo die X_i solche reellwerthige Functionen der reellen x und y sind, welche den Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j^{(k)}}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial y_l} X_j^{(l)} - \frac{\partial X_j^{(k)}}{\partial y_l} X_i^{(l)}\right) = 0$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, m)$$

Genüge leisten.

Ausserdem seien noch gewisse Anfangsbedingungen vorgeschrieben, nämlich dass für

$$x_1 = x_1^{(0)},\ x_2 = x_2^{(0)}, \ldots, x_n = x_n^{(0)}$$

werden soll:

$$y_1 = y_1^{(0)},\ y_2 = y_2^{(0)}, \ldots, y_m = y_m^{(0)}.$$

Nach der vorangeschickten Auseinandersetzung über die Integration der *explicite* gegebenen vollständigen Differentiale kann das Problem aufgefasst werden, als eine gleichzeitige Ausführung von m gewöhnlichen Integrationen

$$\int_{x_i^{(0)}}^{} \sum_i X_i^{(k)}\, dx_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

indem man von den Anfangswerthen ausgeht und die unter den Integralzeichen vorkommenden Unbekannten y nach und nach zugleich mit dem Fortschreiten der Integrationen bestimmt.

Diese Vorstellungsweise ist heutzutage bei der Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung sehr üblich, und auf ihr beruhen die Beweise für die Existenz der Integrale bei reellen Veränderlichen*).

Wäre ein n-dimensionales Werthgebiet der Veränderlichen x bekannt, wo alle durch die Integration bestimmten y durchweg eindeutig und stetig bleiben, ein Gebiet, welches ich als das *Monodromiegebiet* bezeichnen will, so würde man in demselben die y dadurch berechnen können, dass man die *implicite* gegebenenen vollständigen Differentiale *längs eines beliebigen Weges integrirt.* Nach dieser Ueberlegung ist es einleuchtend, dass man die Integration der vorgelegten totalen Differentialgleichungen in unendlich vielen Weisen auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen im Monodromiegebiete zurückführen kann.

Diese Bemerkung giebt das angeführte *Mayer'sche Theorem* in seinem vollen Umfange.

Die Hauptfrage ist nun die nach der Bestimmung des Monodromiegebietes; in Betreff desselben werde ich den folgenden allgemeinen Satz beweisen.

Sind die Functionen $X_i^{(k)}$ *durchweg eindeutig und stetig in einem* $(n+m)$*-dimensionalen Werthgebiete der Veränderlichen* x_i, y_k, *wo die partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial y_l}$$

überall endlich bleiben, und in welchem ausserdem das Anfangssystem $(x_i^{(0)}, y_k^{(0)})$ *sich befindet, so definiren die totalen Differentialgleichungen* (β) *innerhalb eines gewissen einfach zusammenhängenden Werthgebietes* m *stetige und eindeutige Functionen* y_k.

Eine definitive Abgrenzung des Monodromiegebietes kann desshalb nicht a priori angegeben werden, weil die Mannigfaltigkeiten, welche die Integrale darstellen, die Grenzen des genannten $(m+n)$*-dimensionalen Gebiets nicht überschreiten dürfen.*

Denken wir uns irgend einen Weg, welcher im Gebiete der x vom Anfangspunkt $(x_i^{(0)})$ ausgeht, und leiten wir die Integration auf demselben hin. Dann sind die x_i als Functionen eines einzigen Para-

*) Lipschitz l. c. und „Erörterung der Möglichkeit ein gegebenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen vollständig zu integriren", Bonn 1868. Eine italienische Uebersetzung davon befindet sich in „Annali di matematica", serie 2ª, t. 2, p. 288.

meters aufzufassen und die totalen Differentialgleichungen (β) gehen daher in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen über. Aber bei unseren Voraussetzungen sind nach einem bekannten Satze diese Differentialgleichungen nur auf eine einzige Weise integrirbar, so lange die x und y die angegebenen Grenzen nicht überschreiten*).

Es bleibt also nur der Beweis durchzuführen, dass das Resultat der Integration in einem einfach zusammenhängenden Gebiete vom Integrationswege unabhängig ist.

Im Gebiete, wo die x_i die von unserem Satze vorgeschriebenen Grenzen nicht überschreiten, betrachten wir ein einfach zusammenhängendes Flächenstück Σ, welches den Anfangspunkt $x_i^{(0)}$ enthält.

Um die Punkte in Σ durch die Werthe von zwei unabhängigen Veränderlichen p, q eindeutig darzustellen, nehmen wir ein System von krummlinigen Coordinaten, welche den Charakter der gewöhnlichen Polarcoordinaten besitzen, und zwar so, dass die Linien $p(q = \text{const.})$ alle vom Anfangspunkte ausgehen und die Linien $q(p = \text{const.})$ um denselben herum in sich zurücklaufen**).

Dabei können wir annehmen, dass der Pol dem Werthe Null des Parameters p entspricht; dann ist

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial q}\right)_{p=0} = 0.$$

Wird nun die Integration längs solcher Integrationswege ausgeführt, welche in Σ liegen, so erfordert die Bestimmung der Functionen $y_1 \ldots y_m$ die Integration der folgenden totalen Differentialgleichungen:

$$(\beta') \qquad dy_k = P_k\,dp + Q_k\,dq, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

wo

$$P_k = \sum_{i=1}^{n} X_i^{(k)} \frac{\partial x_i}{\partial p},$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} X_i^{(k)} \frac{\partial x_i}{\partial q}$$

gesetzt ist.

Ausserdem erkennt man leicht, dass die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial P_k}{\partial q} - \frac{\partial Q_k}{\partial p} + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial P_k}{\partial y_i} Q_i - \frac{\partial Q_k}{\partial y_i} P_i\right) = 0$$

*) S. die schon angeführte Arbeit von Herrn Lipschitz „Erörterung der Möglichkeiten", oder auch die Abh. von Herrn Volterra „Sui principii del calcolo integrale." Giornale di matematiche, Vol. XIX.

**) S. Riemann — Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung — Ges. math. Werke, S. 283.

wegen der früheren befriedigt sind. Denken wir uns die Integration längs der Linien p ausgeführt, so werden in einem gewissen einfach zusammenhängenden Theil von Σ m endliche und eindeutige Functionen $y_1 \ldots y_m$ bestimmt, welche den Gleichungen

$$\frac{\partial y_k}{\partial p} = P_k$$

genügen. Nun kann leicht gezeigt werden, dass diese Functionen wirklich den Differentialgleichungen (β') Genüge leisten und ausserdem, dass es sonst *keine anderen* Functionen giebt, welche dies thun.

Um dies zu beweisen setzen wir in den P und Q statt der y die eben gefundenen Functionen ein, was wir durch Einklammerung andeuten wollen. Aus den Integrabilitätsbedingungen ergiebt sich dann:

$$\frac{\partial |P_k|}{\partial q} - \frac{\partial |Q_k|}{\partial p} = \sum_i \left| \frac{\partial P_k}{\partial y_i} \right| \left(\frac{\partial y_i}{\partial q} - |Q_i| \right)$$

und ausserdem aus der Definition der y:

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial y_k}{\partial q} = \frac{\partial |P_k|}{\partial q},$$

daher folgt

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial y_k}{\partial q} - |Q_k| \right) = \sum_i \left| \frac{\partial P_k}{\partial y_i} \right| \left(\frac{\partial y_i}{\partial q} - |Q_i| \right).$$

Also befriedigen die Functionen $\left(\frac{\partial y_k}{\partial q} - |Q_k| \right)$ m lineare Differentialgleichungen, welche ihrerseits, nach einem schon benutzten Satze, sobald die Anfangswerthe gegeben sind, diese Functionen auf eine unzweideutige Weise bestimmen. Nun ist im Pole

$$\left(\frac{\partial y_k}{\partial q} \right)_{p=0} = 0, \qquad |Q_k|_{p=0} = 0,$$

folglich muss immer

$$\frac{\partial y_k}{\partial q} = |Q_k|$$

sein, d. h.

$$dy_k = |P_k|\, dp + |Q_k|\, dq = \sum_i |X_i^{(k)}|\, dx_i.$$

Wenn die Integration in Σ auf einem beliebigen Wege ausgeführt wird, so sind die Functionen y nach den gemachten Voraussetzungen vollständig definirt, also können sie keine anderen sein als die schon gefundenen. Durch geeignete Wahl der Fläche Σ ergiebt sich also, *dass man längs eines willkürlichen Weges integriren kann.* w. z. b. w.

Um mit etwas Fertigem zu schliessen, werde ich noch den folgenden Satz aussprechen, welcher aus den obigen Betrachtungen ohne

Weiteres folgt, und welcher eine einfache und dabei symmetrische Integrationsmethode angiebt:

„Das System der totalen Differentialgleichungen (β) sei unbeschränkt integrabel. In einem $(n+m)$-fach ausgedehnten Gebiet der x und y, innerhalb dessen das Anfangswerthsystem

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)},\quad y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_m^{(0)}$$

liegt, seien ausserdem die Functionen

$$X_i^{(k)} \qquad (i=1,2,\ldots,n,\ k=1,2,\ldots,m)$$

durchweg eindeutig und stetig und zugleich ihre Ableitungen nach den y überall endlich.

Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich die Functionen $y_1 \ldots y_m$ in einer gewissen Umgebung des Anfangswerthsystems durch Integration eines Systems von m gewöhnlichen Differentialgleichungen, welches folgendermassen zu bilden ist:

Setzt man

$$(\gamma) \qquad x_i = x_i^{(0)} + \alpha_i t \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

wo die α_i willkürliche Constanten bedeuten, und bezeichnet man mit $|X_i^{(k)}|$ das Resultat der Substitutionen (γ) in $X_i^{(k)}$, so hat man die Differentialgleichungen zu bilden:

$$\frac{\partial y_k}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,|X_i^{(k)}| \qquad (k=1,2,\ldots,m).$$

Man integrirt dieselben unter Zugrundelegung der Anfangswerthe:

$$t=0,\quad y_1 = y_1^{(0)},\ y_2 = y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_m = y_m^{(0)},$$

was immer auf eine einzige Weise geschehen kann, solange t zwischen gewissen Grenzen bleibt.

Die so erhaltenen Integrale geben dann die Werthe der gesuchten Functionen y_k für die durch (γ) dargestellten Werthe der x_i."

Dieser Satz entspricht dem Falle, wo die Integrationswege die vom Anfangspunkte ausgehenden *Radii vectores* sind.

Pavia, im Februar 1886.

Eine katoptrische Eigenschaft des Ellipsoides.

Von

Otto Staude in Breslau.

Die gewöhnliche Focaleigenschaft der Ellipse lässt bekanntlich eine physikalische Deutung zu, welche in den drei Sätzen zum Ausdruck gebracht werden kann:

1. Alle von einem Brennpunkte der Ellipse in die Ebene derselben ausgehenden Lichtstrahlen werden nach Reflexion an der inneren Seite der Curve in dem anderen Brennpunkte vereinigt.

2. Die Längen der Wege aller dieser Lichtstrahlen von dem ersteren Punkte zum letzteren sind unter einander gleich.

3. Ihre gemeinsame Länge ist kleiner als die Länge irgend eines anderen Weges, der von dem einen Brennpunkte zum anderen führt mit der Bedingung der Ellipse selbst zu begegnen.

Diese drei Momente der katoptrischen Eigenschaft der Ellipse finden sich nun wieder bei einer entsprechenden Eigenschaft des Ellipsoides, welche sich auf meine Theorie der gebrochenen Focaldistanzen der Flächen 2. Grades*) gründet und im Folgenden entwickelt werden soll. Es sind zuvörderst in § 1 und § 2 einige Folgerungen aus der ebengenannten Theorie als Hülfssätze der ferneren Entwicklung abgeleitet, alsdann in § 3 die zu benutzenden Gesetze der einfachen und conischen Lichtreflexion aufgeführt, und ist endlich in § 4 und § 5 die angezeigte Eigenschaft des Ellipsoides dargelegt.

§ 1.

Erster Hülfssatz.

Von einem beliebigen Punkte H des einen (ersten) Zweiges der Focalhyperbel eines Ellipsoides E ziehe man eine Gerade HG nach einem beliebigen Punkte G der Focalellipse; an dieselbe schliesse man

*) Ueber neue Focaleigenschaften der Flächen 2. Grades, Math. Annalen, Bd. XXVII, S. 253. Diese Abhandlung ist im Text unter „F." citirt.

eine zweite Gerade GH' an, die von G nach einem beliebigen innerhalb des Ellipsoides E gelegenen Punkte H' des zweiten Zweiges der Focalhyperbel führt. Im Punkte H' setze man eine dritte Gerade $H'P$ an, die auf dem Gegenkegel des von H' aus über der Focalellipse zu errichtenden Kegelmantels liegt und in ihrem Endpunkte P das Ellipsoid E erreicht; die begrenzte Gerade $H'P$ gehört hiernach einer gemeinsamen Transversale der beiden Focalkegelschnitte des Ellipsoides an, ohne selbst der Focalellipse zu begegnen.

Die jetzt entstandene zweimal gebrochene Linie $PH'GH$ ist nach ihrer Construction eine Gleichgewichtsdistanz der Punkte P und H über die Focalhyperbel und die Focalellipse (vgl. F. § 8, S. 266). Ihre Länge drückt sich durch die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν und λ_0, β, β der Punkte P und H (nach F. § 8, I) also aus:

$$(1) \qquad HGH'P = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} + \varepsilon\sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \lambda_0},$$

wo alle Wurzeln positiv gelten und $\varepsilon = +1$ oder -1 ist, jenachdem P und H gleichseitig oder ungleichseitig in Bezug auf die Ebene der imaginären Focalellipse gelegen sind.

Da PH' einen Focalstrahl (vgl. F. § 1, S. 254) des Punktes P bezeichnet, der, von P aus auf die Focalellipse zulaufend, vor der Focalellipse bereits der Focalhyperbel, in H', begegnet, so ist (nach F. § 5, III) der betreffende Focalstrahl der in F. § 4 als F_3 oder der als F_4 benannte Focalstrahl, und zwar (nach F. § 5, IV) F_3 oder F_4, jenachdem P mit H' ungleichseitig oder gleichseitig d. i. P mit H gleichseitig oder ungleichseitig liegt.

Zieht man daher von P aus denjenigen Strahl, welcher mit PH' und der inneren Normale des Ellipsoides E in einer Ebene liegt und mit dieser Normale denselben Winkel bildet, wie PH', so ist dies (nach F. § 5, VI) beziehungsweise der Focalstrahl F_1 oder F_2 nach der in F. § 4 eingeführten Bezeichnung. Derselbe läuft somit von P aus (nach F. § 5, III) direct gegen die Focalellipse hin, die er in einem bezüglich G_1 oder G_2 zu nennenden Punkte treffen mag. Die Längen PG_1 oder PG_2 sind (nach F. § 4, 12)

$$(2) \qquad \begin{aligned} PG_1 &= \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \nu} + \omega\eta_1\sqrt{\alpha - \nu_1}, \\ PG_2 &= \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} + \sqrt{\alpha - \nu} - \omega\eta_2\sqrt{\alpha - \nu_2}, \end{aligned}$$

wo γ, γ, ν_1 und γ, γ, ν_2 die elliptischen Coordinaten von G_1 und G_2 bedeuten und $\omega\eta_1$ (resp. $\omega\eta_2$) $= +1$ oder -1 ist, jenachdem P und G_1 (resp. G_2) gleichseitig oder ungleichseitig sind. Da die Auswahl zwischen der ersten und zweiten dieser Formeln der Auswahl des Werthes $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ in der Formel (1) entspricht, so folgt:

$$\begin{aligned} HGH'PG_1 &= 2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \lambda_0} + \omega\eta_1\sqrt{\alpha - \nu_1}, \\ HGH'PG_2 &= 2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \lambda_0} - \omega\eta_2\sqrt{\alpha - \nu_2}, \end{aligned}$$

wo wieder die erste oder zweite Formel gilt, jenachdem P und H gleichseitige oder ungleichseitige Lage haben. In der ersten ist daher $\omega\eta_1 = +1$ oder -1, jenachdem G_1 mit H gleichseitig oder ungleichseitig liegt, in der zweiten $-\omega\eta_2 = +1$ oder -1, jenachdem G_2 mit H gleichseitig oder ungleichseitig liegt. Es ist daher, wenn $G_0 = \gamma, \gamma, \nu_0$ als Collectivbezeichnung für G_1 und G_2 gebraucht wird, immer:

$$HGH'PG_0 = 2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \lambda_0} + \varepsilon\sqrt{\alpha - \nu_0}$$

und dabei $\varepsilon = +1$ oder -1, jenachdem H und G_0 gleichseitig oder ungleichseitig. Das Resultat dieser Entwicklung mag in folgender Weise formulirt werden:

I. *Man ziehe von einem beliebigen innerhalb des Ellipsoides $E = \lambda$ gelegenen Punkte $H = \lambda_0, \beta, \beta$ des einen (ersten) Zweiges der Focalhyperbel einen Strahl nach einem beliebigen Punkte G_a der Focalellipse, führe ihn von hier nach einem beliebigen innerhalb des Ellipsoides gelegenen Punkte $H_{a,b}$ des zweiten Zweiges der Focalhyperbel fort und lasse ihn von hier auf dem Gegenkegel des von $H_{a,b}$ über der Focalellipse zu errichtenden Halbkegels geradlinig nach einem auf jenem Gegenkegel gelegenen Punkte $P_{a,b,c}$ des Ellipsoides hinlaufen. Setzt man jetzt an die Strecke $H_{a,b}P_{a,b,c}$ des Strahles eine weitere Strecke derart an, dass beide Strecken die innere Normale des Ellipsoides in ihre Ebene aufnehmen und mit ihr gleiche Winkel bilden, so fällt die neue Fortsetzung des Strahles von $P_{a,b,c}$ aus direct auf einen Punkt $G_{a,b,c} = \gamma, \gamma, \nu_0$ der Focalellipse. Die Gesammtlänge des dreimal gebrochenen Strahles beträgt alsdann:*

$$(3)\quad HG_aH_{a,b}P_{a,b,c}G_{a,b,c} = 2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \lambda_0} + \varepsilon\sqrt{\alpha - \nu_0},$$

wo $\varepsilon = +1$ oder $= -1$, jenachdem Anfangs- und Endpunkt gleichseitig oder ungleichseitig (gegen die Ebene der imaginären Focalellipse des Ellipsoides) liegen.

§ 2.

Zweiter Hülfssatz.

Von dem Anfangspunkte H der Construction des § 1 ziehe man wiederum eine Gerade HG nach einem beliebigen Punkte G der Focalellipse; dieselbe gehört dem einen Mantel des von G über der Focalhyperbel errichteten Kegels an. Man setze sie nun längs einer Erzeugenden des anderen Mantels dieses Kegels, welche im Inneren des Ellipsoides der Focalhyperbel nicht mehr begegnet, bis zum Durchschnitt P mit dem Ellipsoide fort. Da die Strecke PG dem bezeichneten Kegel angehört, liegt sie auf einem Focalstrahl des Punktes P, und zwar, da sie von P aus gegen die Focalellipse hin und bis zum Punkte G derselben verfolgt, der Focalhyperbel, wie angenommen,

nicht begegnet, auf dem Focalstrahl F_1 oder F_2 des Punktes P nach der Bezeichnung von F. § 4.

Führt man jetzt den gebrochenen Strahl HGP über P derart weiter, dass die geradlinige Fortsetzung mit der Normale des Ellipsoides in P und der Geraden PG in einer Ebene liegt und mit der Normale denselben Winkel einschliesst, wie PG, so liegt diese Fortsetzung beziehungsweise auf dem Focalstrahl F_3 oder F_4 des Punktes P in der Benennung von F. § 4. Diese Fortsetzung trifft daher von P aus direct auf die Focalhyperbel, etwa im Punkte H', von welchem aus man die Strecke PH' nach einem beliebigen Punkte G_0 der Focalellipse weiterführe.

Es ist nun die gebrochene Linie PGH die Gleichgewichtsdistanz der Punkte P und H über die Focalellipse allein (nach F. § 8, S. 267) und somit ihre Länge (nach F. § 8, II):

$$HGP = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} - \varepsilon\sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \lambda_0},$$

wo $\varepsilon = +1$ oder $= -1$, je nachdem P und H gleichseitig oder ungleichseitig liegen oder, was dasselbe heisst (F. § 8), jenachdem die Strecke PG dem Focalstrahl F_1 oder F_2 des Punktes P angehört. Diesen beiden Möglichkeiten entsprechend, gehört aber PH' bezüglich dem Focalstrahl F_3 und F_4 an, sodass H und H' nothwendig auf verschiedenen Zweigen der Focalhyperbel liegen (vgl. F. § 5, IV) und überdies (nach F. § 4, 12) mit der schon benutzten Bedeutung von ε:

$$PH' = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} + \varepsilon\sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \lambda'}$$

wird; es sind dabei λ', β, β die elliptischen Coordinaten von H'. Hiernach folgt:

$$HGPH' = 2\sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \lambda'} + \sqrt{\alpha - \lambda_0}. \tag{1}$$

Es ist ferner (nach F. § 3, I):

$$H'G_0 = \sqrt{\alpha - \lambda'} + \varepsilon\sqrt{\alpha - \nu_0}, \tag{2}$$

wo $\varepsilon = +1$ oder -1, jenachdem G_0 und H' ungleichseitig oder gleichseitig, also jenachdem G_0 und H gleichseitig oder ungleichseitig liegen. Somit hat man in der letzteren Bedeutung von ε:

$$HGPH'G_0 = 2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \lambda_0} + \varepsilon\sqrt{\alpha - \nu_0}.$$

Das gewonnene Resultat lässt sich also zusammenfassen:

II. *Man ziehe von einem beliebigen innerhalb des Ellipsoides $E = \lambda$ gelegenen Punkte $H = \lambda_0, \beta, \beta$ des einen (ersten) Zweiges der Focalhyperbel einen Strahl nach einem beliebigen Punkte G_a der Focalellipse, führe ihn von hier bis zu einem übrigens beliebigen Punkte $P_{a,b}$ des Ellipsoides derart geradlinig fort, dass die Strecken $G_a H$ und $G_a P_{a,b}$ verschiedenen Mänteln des von G_a über der Focalhyperbel zu errichten-*

den Kegels angehören und die letztere Strecke der Focalhyperbel nicht begegnet. Setzt man jetzt an die Strecke $G_a P_{a,b}$ des Strahles eine weitere Strecke an, so dass beide Strecken die innere Normale des Ellipsoides in ihre Ebene aufnehmen und mit ihr gleiche Winkel bilden, so fällt die neue Fortsetzung des Strahles von $P_{a,b}$ aus direct auf einen Punkt $H_{a,b}$ des zweiten Zweiges der Focalhyperbel, von wo aus man ihn bis zu einem beliebigen Punkte $G_{a,b,c} = \gamma, \gamma, \nu_0$ der Focalellipse weiterführe. Die Gesammtlänge des dreimal gebrochenen Strahles beträgt alsdann:

$$(3) \quad H G_a P_{a,b} H_{a,b} G_{a,b,c} = 2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \lambda_0} + \varepsilon\sqrt{\alpha - \nu_0},$$

wo $\varepsilon = +1$ oder -1 ist, jenachdem Anfangs- und Endpunkt gleichseitig oder ungleichseitig liegen.

§ 3.

Gesetze der Lichtspiegelung an Flächen und Curven.

Zur ferneren Verwerthung der Sätze I und II nehme man die innere Seite eines Ellipsoides als spiegelnde Fläche und zugleich die Focalellipse und den in das Innere des Ellipsoides fallenden Theil der Focalhyperbel als spiegelnde Curven (etwa sehr dünne Drähte mit spiegelnder Oberfläche) an und benutze die beiden Reflexionsgesetze:

A. *Wenn ein Lichtstrahl auf eine spiegelnde Fläche trifft, so wird er als einfacher Strahl reflectirt, so dass reflectirter und einfallender Strahl die Normale der Fläche im Einfallspunkte in ihre Ebene aufnehmen und mit ihr gleiche Winkel einschliessen.*

B. *Wenn ein Lichtstrahl auf eine spiegelnde Curve trifft, so wird er als Strahlenkegel (conisch) reflectirt, so dass je ein reflectirter und der einfallende Strahl je eine der Normalen der Curve im Einfallspunkte in ihre Ebene aufnehmen und mit ihr gleiche Winkel einschliessen.*

Die reflectirten Strahlen bilden, mit anderen Worten ausgedrückt, einen Rotationskegel, dessen Spitze der Einfallspunkt, dessen Rotationsaxe die Tangente der Curve im Einfallspunkt und von dessen Gegenkegel der einfallende Strahl als einziger Bestandtheil vorhanden ist.

§ 4.

Verlauf der Lichtstrahlen im Innern eines Ellipsoides.

Von einem beliebigen innerhalb des Ellipsoides λ gelegenen Punkte $H = \lambda_0, \beta, \beta$ des einen (ersten) Zweiges der Focalhyperbel, lasse man Lichtstrahlen S_a gegen alle Punkte G_a der Focalellipse hinlaufen. (Man kann dies beiläufig in folgender Weise bewirken: man lässt

durch eine kleine Oeffnung der Ellipsoidfläche einen Strahl in das Innere derselben eintreten und auf den Punkt H der Focalhyperbel unter solchem Winkel auftreffen, dass der Strahl dem Gegenkegel des von H über der Focalellipse errichteten Kegels angehört. Dann wird der Strahl nach § 3, B durch conische Reflexion an der Focalhyperbel in unendlich viele Strahlen aufgelöst, die alle ihren Weg nach der Focalellipse hin nehmen). Jeder der Strahlen S_a wird nun in G_a an der Focalellipse conisch reflectirt und in unendlich viele Strahlen $S_{a,b}$ aufgelöst. Ein Strahl $S_{a,b}$ aber trifft in seinem weiteren Verlaufe entweder auf den zweiten Zweig der Focalhyperbel, etwa im Punkte $H_{a,b}$, oder auf die Fläche des Ellipsoides, etwa im Punkte $P_{a,b}$.

Im ersteren Falle wird der Strahl $S_{a,b}$ in $H_{a,b}$ an der Focalhyperbel conisch reflectirt und in unendlich viele Strahlen $S_{a,b,c}$ aufgelöst; ein Strahl $S_{a,b,c}$ fällt hierauf direct auf die Innenfläche des Ellipsoides, etwa im Punkte $P_{a,b,c}$, und nimmt von hier, einfach reflectirt, seinen Weg direct nach der Focalellipse, die er etwa in einem Punkte $G_{a,b,c} = \gamma, \gamma, \nu_0$ trifft. Der Weg eines jeden solchergestalt entstehenden, dreimal gebrochenen Strahles $HG_a H_{a,b} P_{a,b,c} G_{a,b,c}$ entspricht genau der nach § 1, I ausgeführten Construction, daher auch seine Länge durch die Formel § 1, 3 gegeben ist.

Im zweiten Falle wird der Strahl $S_{a,b}$ in $P_{a,b}$ an der Fläche des Ellipsoides einfach reflectirt und trifft darnach direct auf den zweiten Zweig der Focalhyperbel, etwa im Punkte $H_{a,b}$. Hier wird er conisch reflectirt und in unendlich viele Strahlen $S_{a,b,c}$ aufgelöst; jeder Strahl $S_{a,b,c}$ wendet sich nach der Focalellipse hin, die er etwa in einem Punkte $G_{a,b,c} = \gamma, \gamma, \nu_0$ trifft. Der Weg eines jeden solchergestalt entstehenden, dreimal gebrochenen Strahles $HG_a P_{a,b} H_{a,b} G_{a,b,c}$ entspricht genau der nach § 2, II ausgeführten Construction, daher auch seine Länge durch die Formel § 2, 3 gegeben ist.

§ 5.

Die katoptrische Eigenschaft des Ellipsoides.

Aus der in § 4 ausgeführten Beschreibung des Verlaufes der vom Punkte H kommenden Lichtstrahlen, geht nun durch einfache Zusammenfassung der Satz hervor:

1. *Die von einem beliebigen im Inneren des Ellipsoides gelegenen Punkte H eines ersten Zweiges der Focalhyperbel gegen die Focalellipse hinlaufenden einfach unendlich vielen Lichtstrahlen lösen sich, indem sie in ihrem Verlaufe zuerst an der Focalellipse und dann an dem zweiten Zweige der Focalhyperbel conisch reflectirt werden, in dreifach unendlich viele Strahlen auf; werden aber nach den zwei erwähnten conischen Reflexionen an den Focalkegelschnitten und einer dritten gewöhnlichen*

Reflexion an dem Ellipsoide in den einfach unendlich vielen Punkten der Focalellipse vereinigt.

Ferner zeigen die Formeln § 1, 3 und § 2, 3 unmittelbar, dass die Länge eines jeden der dreifach unendlich vielen Strahlen allein abhängt von dem Parameter des spiegelnden Ellipsoides, den elliptischen Coordinaten des Anfangs- und Endpunktes und der Lagebeziehung dieser beiden Punkte gegen die Ebene der imaginären Focalellipse. Es folgt somit:

2. *Alle die zweifach unendlich vielen Strahlen aus der dreifachen Mannigfaltigkeit der geschilderten Strahlen, welche in einem und demselben Punkte G der Focalellipse endigen, haben von ihrem gemeinsamen Ausgangspunkte H bis zu ihrem gemeinsamen Endpunkte G die nämliche Länge.*

Ein Rückblick auf die in F. § 9 gegebene Charakteristik der endlichen Gleichgewichtsdistanzen zwischen einem beliebigen Punkte des Raumes und einem Focalpunkte über den ungleichnamigen Focalkegelschnitt führt endlich unmittelbar noch zu dem folgenden Ergebniss:

3. *Die gemeinsame Länge der Wege aller in demselben Punkte G der Focalellipse endigenden Strahlen ist kleiner als die Länge irgend eines anderen Weges, der den gemeinsamen Anfangspunkt dieser Strahlen mit ihrem gemeinsamen Endpunkte G verbindet und dabei die Bedingungen erfüllt, sowohl dem Ellipsoid, als auch der Focalellipse und dem zweiten Zweige der Focalhyperbel zu begegnen.*

In diesen Resultaten*) erkennt man die Analoga der drei Sätze, in welche oben in der Einleitung die katoptrische Eigenschaft der Ellipse eingekleidet worden war.

Breslau, im Februar 1886.

---

*) Man vergleiche die wesentlich verschiedene katoptrische Eigenschaft des Ellipsoides bei Plücker, System der Geometrie des Raumes (Düsseldorf, 1846), § 14, Art. 274. Eine Vermittelung zwischen den Sätzen des § 1 und des § 5 des vorliegenden Textes könnte man in einer leicht herzustellenden katoptrischen Deutung der Dupin'schen Focaleigenschaft der Ellipse (vgl. F. § 3) erblicken.

Ueber Fourier'sche Entwickelungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen*).

Von

MARTIN KRAUSE in Rostock.

Im Folgenden soll das Problem behandelt werden, die Potenzen und Producte der Thetafunctionen zweier Veränderlichen in Fourier'sche Reihen zu entwickeln. Es hat dasselbe eine weittragende Bedeutung, da es richtig gestellt das Transformationsproblem in sich schliesst. In der That das letztere kann in folgender Weise formulirt werden:

Es sollen die Potenzen und Producte. n^{ter} Ordnung der ursprünglichen Thetafunctionen als lineare Functionen der Grössen:

$$e^{\frac{\pi i}{n}[g(2nv_1+g\tau_{11}+g'\tau_{12})+g'(2nv_1'+g\tau_{12}+g'\tau_{22})]}\,\vartheta_\alpha(nv_1+g\tau_{11}+g'\tau_{12},\ nv_1'+g\tau_{12}+g'\tau_{22},\ n\tau_{11},\ n\tau_{12},\ n\tau_{22})$$

dargestellt werden, so zwar, dass die Coefficienten sich aus denselben Grössen für die Nullwerthe der Argumente darstellen lassen.

Da nun die Fourier'schen Entwickelungen der eingeführten transformirten Grössen als bekannt angesehen werden können, so gelangen wir in der That zu dem ursprünglichen Probleme, nachdem es in bestimmter Weise begrenzt ist.

Im folgenden soll nun ein Verfahren angegeben werden, welches das zuletzt gestellte Problem löst, wenn die Annahme fallen gelassen wird, dass die in den Coefficienten auftretenden transformirten Grössen zu demselben Transformationsgrad gehören.

§ 1.

Definition der in der Folge gebrauchten Functionen. Haupteigenschaften derselben.

Als grundlegende Functionen dienen diejenigen, deren Charakteristiken sich aus gebrochenen Zahlen zusammensetzen. Wir definiren

*) Vergl. eine Note *Zur Transformation der elliptischen Functionen* in den Berichten der math. phys. Classe d. k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Sitzung vom 8. Februar 1886.

wie es in einer früheren Arbeit geschehen ist, zunächst für beliebige Werthe von g und h in folgender Weise:

$$(1)\quad \vartheta_\alpha \begin{bmatrix} g & g' \\ h & h' \end{bmatrix} (v_1, v_1', \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \vartheta_\alpha \begin{bmatrix} g & g' \\ h & h' \end{bmatrix} ((v_1, \tau))$$

$$= \vartheta_\alpha \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (v_1, v_1', \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \vartheta_\alpha \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} ((v_1, \tau))$$

$$= e^{\frac{\pi i \omega}{n}} \vartheta_\alpha \left(v_1 + \frac{g\tau_{11} + g'\tau_{12} + h}{n}, v_1' + \frac{g\tau_{12} + g'\tau_{22} + h'}{n}, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22} \right),$$

$$\omega = g\left(2v_1 + \frac{2h}{n} + \frac{g\tau_{11}}{n} + \frac{g'\tau_{12}}{n}\right) + g'\left(2v_1' + 2\frac{h'}{n} + \frac{g\tau_{12}}{n} + \frac{g'\tau_{22}}{n}\right).$$

Hierbei kann α den Index einer beliebigen Thetafunction bedeuten. Es empfiehlt sich, alle diese Grössen unter einem Gesichtspunkt zu betrachten, weil dieselben, wenn die Grössen g und h ganze Zahlen oder die Hälften von ganzen Zahlen sind, sämmtlich zu Thetafunctionen n^{ter} Ordnung führen und ferner Anlass zu einer grösseren Mannigfaltigkeit von Beziehungen geben, als es die Function, welche $\alpha = 5$ entspricht, allein thun würde. Zum einfachsten Falle einer Thetafunction erster Ordnung gehört nicht allein die fundamentale Thetafunction, sondern noch fünfzehn andere, deren Charakteristiken sich aus halben ganzen Zahlen zusammensetzen und es pflegen ja auch in diesem Falle die 16 Thetafunctionen zusammen betrachtet zu werden.

Wir denken uns nun in der Folge immer $h = h' = 0$ gesetzt, wir denken uns ferner an Stelle der Grössen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} die Grössen $n\tau_{11}$, $n\tau_{12}$, $n\tau_{22}$ eingeführt. Dann mögen die auf diese Weise entstehenden Functionen bezeichnet werden durch

$$(2)\quad \vartheta_\alpha[g\,g'](v_1, v_1', n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}) = \vartheta_\alpha[g](v_1, v_1', n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

$$= \vartheta_\alpha[g\,g']((v_1, n\tau)) = \vartheta_\alpha[g]((v_1, n\tau))$$

$$= e^{\frac{\pi i \omega'}{n}} \vartheta_\alpha(v_1 + g\tau_{11} + g'\tau_{12}, v_1' + g\tau_{12} + g'\tau_{22}, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}),$$

$$\omega' = g(2v_1 + g\tau_{11} + g'\tau_{12}) + g'(2v_1' + g\tau_{12} + g'\tau_{22}).$$

Die fundamentalen Eigenschaften dieser Functionen folgen dann unmittelbar. Für den Fall $\alpha = 5$ lauten sie (3):

$$\vartheta_5[g](v_1 + 1, v_1', n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}) = e^{\frac{2g\pi i}{n}} \cdot \vartheta_5[g]((v_1, n\tau)),$$

$$\vartheta_5[g](v_1, v_1' + 1, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}) = e^{\frac{2g'\pi i}{n}} \cdot \vartheta_5[g]((v_1, n\tau)),$$

$$\vartheta_5[g](v_1 + \tau_{11}, v_1' + \tau_{12}, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}) = e^{-\pi i(2v_1 + n\tau_{11})} \cdot \vartheta_5[g]((v_1, n\tau)),$$

$$\vartheta_5[g](v_1 + \tau_{12}, v_1' + \tau_{22}, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}) = e^{-\pi i(2v_1' + n\tau_{22})} \cdot \vartheta_5[g]((v_1, n\tau)),$$

$$\vartheta_5[g](v_1+g_1\tau_{11}+g_1'\tau_{12},\ v_1'+g_1\tau_{12}+g_1'\tau_{22},\ n\tau_{11},\ n\tau_{12},\ n\tau_{22})$$
$$e^{-\frac{\pi i}{n}(2g_1v_1+2g_1'v_1'+g_1^2\tau_{11}+2g_1g_1'\tau_{12}+g_1'^2\tau_{22})}\cdot\vartheta_5[g+g_1]((v_1,n\tau)),$$
$$\vartheta_5[g+n,g']((v_1,n\tau))=\vartheta_5[g,g'+n]((v_1,n\tau)=\vartheta_5[g]((v_1,n\tau)).$$

Für die übrigen Thetafunctionen sind die fundamentalen Beziehungen ebenso einfach zu entwickeln. Es sollen nun in der Folge lediglich die Fälle ins Auge gefasst werden, dass die Zahlen g, g' ganze Zahlen oder die Hälfte ganzer Zahlen sind. Setzen wir unter dieser Voraussetzung in der Definitionsgleichung an Stelle von $v_1, v_2 : nv_1, nv_2$ so erhalten wir diejenigen Thetafunctionen, welche als Träger der Transformation der Thetafunctionen zweier Veränderlichen angesehen werden können.

§ 2.

Ableitung eines allgemeinen Additionstheorems zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln.

Es soll jetzt der Versuch gemacht werden, Additionstheoreme zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln aufzustellen. Wir legen dazu das Product zu Grunde:

$$(1)\qquad P=\prod_1^n\vartheta_5(v_x, v_x', \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}).$$

Dann ist P als Function von v_x, v_x' aufgefasst eine Thetafunction erster Ordnung mit der Charakteristik Null, welche überdies den Differentialgleichungen Genüge leistet:

$$(2)\qquad \sum_1^n\frac{\partial^2P}{\partial v_x^2}=4\pi i\cdot\frac{\partial P}{\partial\tau_{11}},$$
$$\sum_1^n\frac{\partial^2P}{\partial v_x\partial v_x'}=2\pi i\cdot\frac{\partial P}{\partial\tau_{12}},$$
$$\sum_1^n\frac{\partial^2P}{\partial v_x'^2}=4\pi i\cdot\frac{\partial P}{\partial\tau_{22}}.$$

Eine jede Function, die dieselben Eigenschaften besitzt, kann sich von P nur um eine numerische Constante unterscheiden. Es soll versucht werden, derartige neue Functionen mit Hülfe der von uns definirten Grössen wirklich herzustellen.

Wir setzen dazu:

$$(3)\qquad w_x=a_{x1}\cdot v_1+a_{x2}\cdot v_2+\cdots+a_{xn}\cdot v_n,$$
$$w_x'=a_{x1}\cdot v_1'+a_{x2}\cdot v_2'+\cdots+a_{xn}\cdot v_n',$$

wobei die Grössen $a_{\varkappa r}$ einstweilen völlig willkürliche ganze Zahlen bedeuten sollen und bilden für weitere beliebig gewählte ganze Zahlen $g_\varkappa$, $g'_\varkappa$, $n_\varkappa$ das Product:

$$\prod_1^n \vartheta_5[g_\varkappa g'_\varkappa]((w_\varkappa, n_\varkappa\tau)).$$

Es fragt sich dann zunächst, welche Bedingungen müssen die eingeführten Grössen erfüllen, damit dieses Product bei der Vermehrung der Grössen $v_\varkappa$, $v'_\varkappa$ um Vielfache der Moduln in ein analog gebildetes Product übergeht, multiplicirt mit der Exponentialgrösse, welche bei dem ursprünglich zu Grunde gelegten Producte auftritt. Man überzeugt sich leicht, dass die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen hierfür lauten:

$$(4)\quad \begin{aligned} &\frac{a_{1\varkappa}^2}{n_1} + \frac{a_{2\varkappa}^2}{n_2} + \cdots + \frac{a_{n\varkappa}^2}{n_n} = 1, \qquad \varkappa: 1, 2, \ldots, n, \\ &\frac{a_{1i}\cdot a_{1\varkappa}}{n_1} + \frac{a_{2i}\cdot a_{2\varkappa}}{n_2} + \cdots + \frac{a_{ni}\cdot a_{n\varkappa}}{n_n} = 0, \quad i \gtrless \varkappa. \end{aligned}$$

Diese Bedingungen können auch geschrieben werden:

$$(5)\quad \begin{aligned} a_{\varkappa 1}^2 + a_{\varkappa 2}^2 + \cdots + a_{\varkappa n}^2 &= n_\varkappa, \\ a_{i1}\cdot a_{\varkappa 1} + a_{i2}\cdot a_{\varkappa 2} + \cdots + a_{in}\cdot a_{\varkappa n} &= 0. \end{aligned}$$

Legen wir nun dasjenige Product zu Grunde, bei welchem sämmtliche Grössen $g_\varkappa$, $g'_\varkappa$ der Null gleich sind, so folgt leicht, dass der Ausdruck:

$$\sum_{g_\varkappa, g'_\varkappa} \prod_1^n \vartheta_5[g_\varkappa, g'_\varkappa]((w_\varkappa, n_\varkappa\tau))$$

bei Vermehrung der Grössen $v_\varkappa$, $v'_\varkappa$ um Vielfache der Moduln den Bedingungsgleichungen der Thetafunctionen erster Ordnung mit der Charakteristik Null Genüge leistet, wenn die Summe erstreckt wird, über alle $g_\varkappa$, $g'_\varkappa$ die den Congruenzen Genüge leisten:

$$(6)\quad \begin{cases} g_1 \equiv a_{11}\cdot s_1 + a_{12}\cdot s_2 + \cdots + a_{1n}\cdot s_n \bmod. n_1, \\ g_2 \equiv a_{21}\cdot s_1 + a_{22}\cdot s_2 + \cdots + a_{2n}\cdot s_n \bmod. n_2, \\ \cdots\cdots\cdots\

Aus diesen Congruenzen folgt dann, dass die Grössen:

$$\frac{g_1 \cdot a_{1x}}{n_1} + \frac{g_2 \cdot a_{2x}}{n_2} + \cdots + \frac{g_n \cdot a_{nx}}{n_x},$$

$$\frac{g_1' \cdot a_{1x}}{n_1} + \frac{g_2' \cdot a_{2x}}{n_2} + \cdots + \frac{g_n' \cdot a_{nx}}{n_x}$$

sämmtlich ganze Zahlen sind. Hieraus wiederum folgt, dass die vorhin definirte Summe sich nicht ändert, wenn man die Veränderlichen v_x, v_x' um ganze Zahlen vermehrt. Jedenfalls also ist die Summe als Function von v_x, v_x' aufgefasst eine Thetafunction erster Ordnung mit der Charakteristik Null.

Bezeichnen wir sie durch S, so ist aber überdies:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial v^2} = \sum_r \frac{\partial^2 S}{\partial w_r^2} \cdot a_{rx}^2 + 2 \sum_{r,s} \frac{\partial^2 S}{\partial w_r \partial w_s} \cdot a_{rx} \cdot a_{sx}.$$

Hieraus folgt:

$$\sum_1^n \frac{\partial^2 S}{\partial v_x^2} = \sum_1^n \frac{\partial^2 S}{\partial w_x^2} \cdot n_x.$$

Hieraus schliessen wir, dass die Summe S denselben Differentialgleichungen Genüge leistet, wie das ursprüngliche Product, sich also von demselben nur um eine numerische Constante unterscheiden kann. Der Werth derselben ergiebt sich aber, wie die Einsetzung der Reihenentwickelungen zeigt, gleich 1, mit andern Worten wir finden das Additionstheorem:

$$(7) \quad \prod_1^n \vartheta_5 (v_x, v_x', \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \sum \prod_1^n \vartheta_5 [g_x, g_x'] ((w_x, n_x \tau)),$$

wobei die Summe auf der rechten Seite über alle diejenigen Werthe von g_x, g_x' auszudehnen ist, welche den Congruenzen Genüge leisten:

$$g_x \equiv a_{x1} \cdot s_1 + a_{x2} \cdot s_2 + \cdots + a_{xn} \cdot s_n \text{ mod. } n_x,$$
$$g_x' \equiv a_{x1} \cdot s_1' + a_{x2} \cdot s_2' + \cdots + a_{xn} \cdot s_n' \text{ mod. } n_x.$$

Das soeben entwickelte Additionstheorem kann als specieller Fall eines allgemeineren angesehen werden, dessen Ableitung im Principe dieselbe ist:

Seien $m_1 \ldots m_n$ n beliebig vorgelegte ganze Zahlen, mögen ferner zwischen den Veränderlichen v und den Veränderlichen w die Relationen bestehen:

$$(8) \quad w_x = a_{x1} \cdot v_1 + a_{x2} \cdot v_2 + \cdots + a_{xn} \cdot v_n,$$
$$w_x' = a_{x1} \cdot v_1' + a_{x2} \cdot v_2' + \cdots + a_{xn} \cdot v_n'.$$

Genügen dann die ganzen Zahlen a_{xr} den Gleichungen:

$$(9)\quad \begin{cases} m_\varkappa \left(\frac{a_{1\varkappa}^2}{n_1} + \frac{a_{2\varkappa}^2}{n_2} + \cdots + \frac{a_{n\varkappa}^2}{n_n} \right) = 1, \quad \varkappa : 1, 2, \ldots, n, \\ \frac{a_{1i} \cdot a_{1\varkappa}}{n_1} + \frac{a_{2i} \cdot a_{2\varkappa}}{n_2} + \cdots + \frac{a_{ni} \cdot a_{n\varkappa}}{n_n} = 0, \end{cases}$$

oder was dasselbe sagt, den Gleichungen:

$$(10)\quad \begin{cases} m_1 . a_{\varkappa 1}^2 + m_2 . a_{\varkappa 2}^2 + \cdots + m_n . a_{\varkappa n}^2 = n_\varkappa, \\ m_1 . a_{i1} . a_{\varkappa 1} + m_2 . a_{i2} . a_{\varkappa 2} + \cdots + m_n . a_{in} . a_{\varkappa n} = 0, \end{cases}$$

so gilt das allgemeine Additionstheorem:

$$(11)\quad \prod_1^n{}_\varkappa \vartheta_5 (v_\varkappa, v_\varkappa', m_\varkappa \tau_{11}, m_\varkappa \tau_{12}, m_\varkappa \tau_{22})$$

$$= \sum_{g_\varkappa, g_\varkappa'} \prod_1^n{}_\varkappa \vartheta_5 [g_\varkappa, g_\varkappa'] ((w_\varkappa, n_\varkappa \tau)),$$

wobei die Congruenzen bestehen:

$$(12)\quad \begin{aligned} g_\varkappa &\equiv a_{\varkappa 1} \cdot m_1 \cdot s_1 + a_{\varkappa 2} \cdot m_2 \cdot s_2 + \cdots + a_{\varkappa n} \cdot m_n \cdot s_n \text{ mod. } n_\varkappa, \\ g_\varkappa' &\equiv a_{\varkappa 1} \cdot m_1 \cdot s_1' + a_{\varkappa 2} \cdot m_2 \cdot s_2' + \cdots + a_{\varkappa n} \cdot m_n \cdot s_n' \text{ mod. } n_\varkappa. \end{aligned}$$

§ 3.

Herleitung eines zweiten Additionstheorems zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln.

Bei den Betrachtungen, die im vorigen Paragraphen angestellt worden sind, war die Annahme gemacht worden, dass die Zahlen $a_{\varkappa\nu}$ *ganze* Zahlen seien. Wir wollen diese Annahme jetzt fallen lassen und die allgemeinere Festsetzung treffen, dass sie die *Hälften* ganzer Zahlen sind. Wir wollen dazu setzen:

$$(1)\quad \begin{aligned} 2w_\varkappa &= a_{\varkappa 1} \cdot v_1 + a_{\varkappa 2} \cdot v_2 + \cdots + a_{\varkappa n} \cdot v_n, \\ 2w_\varkappa' &= a_{\varkappa 1} \cdot v_1' + a_{\varkappa 2} \cdot v_2' + \cdots + a_{\varkappa n} \cdot v_n', \end{aligned}$$

wobei die neuen Grössen $a_{\varkappa\nu}$ jetzt wieder ganze Zahlen sind.

Wenn dann die Zahlen $a_{\varkappa\nu}$ den Bedingungsgleichungen Genüge leisten:

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{a_{1\varkappa}^2}{n_1} + \frac{a_{2\varkappa}^2}{n_2} + \cdots + \frac{a_{n\varkappa}^2}{n_n} = 4, \\ \frac{a_{1i} \cdot a_{1\varkappa}}{n_1} + \frac{a_{2i} \cdot a_{2\varkappa}}{n_2} + \cdots + \frac{a_{ni} \cdot a_{n\varkappa}}{n_n} = 0, \end{cases}$$

oder was dasselbe sagt den Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} a_{\varkappa 1}^2 + a_{\varkappa 2}^2 + \cdots + a_{\varkappa n}^2 = 4n_\varkappa, \\ a_{i1} \cdot a_{\varkappa 1} + \cdots + a_{in} \cdot a_{\varkappa n} = 0, \end{cases}$$

so gilt das Additionstheorem:

$$(4)\qquad 2^{2n} \prod_1^n \vartheta_5((v_\varkappa, \tau)) =$$

$$\sum \prod_1^n \vartheta_5\left[\frac{g_\varkappa}{2}\right]\left(\left(\frac{a_{\varkappa 1}\cdot(v_1+\varepsilon_1)}{2} + \frac{a_{\varkappa 2}\cdot(v_2+\varepsilon_2)}{2} + \cdots + \frac{a_{\varkappa n}\cdot(v_n+\varepsilon_n)}{2}, n_\varkappa \tau\right)\right).$$

Dabei ist die Summe erstens über alle $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n,\ \varepsilon_1'\, \varepsilon_2' \ldots \varepsilon_n'$ ausgedehnt, welche den Werth 0 oder 1 besitzen, und zweitens über alle $g_\varkappa, g_\varkappa'$, die den Congruenzen Genüge leisten:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{g_\varkappa}{2} &\equiv \frac{a_{\varkappa 1}\cdot s_1}{2} + \frac{a_{\varkappa 2}\cdot s_2}{2} + \cdots + \frac{a_{\varkappa n}\cdot s_n}{2} \text{ mod. } n_\varkappa, \\ \frac{g_\varkappa'}{2} &\equiv \frac{a_{\varkappa 1}\cdot s_1'}{2} + \frac{a_{\varkappa 2}\cdot s_2'}{2} + \cdots + \frac{a_{\varkappa n}\cdot s_n'}{2} \text{ mod. } n_\varkappa. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass auch hier ein allgemeines Additionstheorem aufgestellt werden kann, welches das obige als speciellen Fall in sich enthält, indessen sehen wir von seiner Aufstellung ab.

§ 4.

Die Fourier'schen Entwickelungen der Potenzen und Producte n^{ter} Ordnung der gewöhnlichen Thetafunctionen auf Grund des ersten Additionstheorems.

Gehen wir zu dem ersten Additionstheorem zurück, so wollen wir die ganzen Zahlen $a_{i\varkappa}$ jetzt der weiteren Bedingung unterwerfen, dass sie die Gleichungen erfüllen:

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} = n, \\ a_{\varkappa 1} + a_{\varkappa 2} + \cdots + a_{\varkappa n} = 0, \quad \varkappa > 1. \end{cases}$$

Dann ist klar, dass, falls die Bestimmung möglich ist, sich für den speciellen Fall:

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_n, \quad v_1' = v_2' = \cdots = v_n'$$

die Formel ergiebt:

$$(2)\quad \vartheta_5((v,\tau))^n = \sum \vartheta_5[g_1]((nv, n\tau)).\vartheta_5[g_2]((0, n_2\tau))\ldots\vartheta_5[g_n]((0, n_n\tau)),$$

wobei die Summe in der vorhin angegebenen Weise zu nehmen ist. Damit ist aber das Problem gelöst. Zu gleicher Zeit folgt das analoge für sämmtliche n^{te} Potenzen von Thetafunctionen, ferner für alle Producte zu je n, da diese Grössen aus dem Producte

$$\prod \vartheta_5((v_\varkappa, \tau))$$

durch Substitution halber Perioden abzuleiten sind, wenn nach stattgefundener Substitution

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_n, \quad v_1' = v_2' = \cdots = v_n'$$

gesetzt wird. Ehe wir nun den allgemeinen Fall behandeln, nehmen wir einige specielle Fälle.

1. $n = 2$.

In Bezug auf diesen möge auf eine Arbeit von Herrn Königsberger und eine solche von Herrn Caspary aufmerksam gemacht, werden, die sich resp. im 64ten und 94ten Bande des Crelle'schen Journals befinden. Die Zahlen $a_{\varkappa n}$ ergeben sich unmittelbar und zwar wird:

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 1,$$
$$a_{21} = 1, \quad a_{22} = -1.$$

Wir erhalten demgemäss das Additionstheorem:

$$\begin{aligned}(3)\ \vartheta_5((v_1,\tau)) \cdot \vartheta_5((v_2,\tau)) &= \vartheta_5((v_1+v_2, 2\tau)) \cdot \vartheta_5((v_1-v_2, 2\tau)) \\ &+ \vartheta_5[10]((v_1+v_2, 2\tau)) \cdot \vartheta_5[10]((v_1-v_2, 2\tau)) \\ &+ \vartheta_5[01]((v_1+v_2, 2\tau)) \cdot \vartheta_5[01]((v_1-v_2, 2\tau)) \\ &+ \vartheta_5[11]((v_1+v_2, 2\tau)) \cdot \vartheta_5[11]((v_1-v_2, 2\tau)).\end{aligned}$$

Setzen wir jetzt $v_1 = v_2$, so erhalten wir die bekannte Formel:

$$\begin{aligned}(4)\ \vartheta_5((v,\tau))^2 &= \vartheta_5((2v, 2\tau)) \cdot \vartheta_5((0, 2\tau)) + \vartheta_4((2v, 2\tau)) \cdot \vartheta_4((0, 2\tau)) \\ &+ \vartheta_{01}((2v, 2\tau)) \cdot \vartheta_{01}((0, 2\tau)) + \vartheta_{23}((2v, 2\tau) \cdot \vartheta_{23}((0, 2\tau)).\end{aligned}$$

Ganz analog erhalten wir die Formeln (5):

$$\begin{aligned}\vartheta_{34}((v,\tau))^2 &= \vartheta_5((2v, 2\tau)) \cdot \vartheta_5((0, 2\tau)) - \vartheta_4((2v, 2\tau)) \cdot \vartheta_4((0, 2\tau)) \\ &+ \vartheta_{01}((2v, 2\tau)) \cdot \vartheta_{01}((0, 2\tau)) - \vartheta_{23}((2v, 2\tau)) \cdot \vartheta_{23}((0, 2\tau)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_{12}((v,\tau))^2 &= \vartheta_5((2v, 2\tau)) \cdot \vartheta_5((0, 2\tau)) + \vartheta_4((2v, 2\tau)) \cdot \vartheta_4((0, 2\tau)) \\ &- \vartheta_{01}((2v, 2\tau)) \cdot \vartheta_{01}((0, 2\tau)) - \vartheta_{23}((2v, 2\tau)) \cdot \vartheta_{23}((0, 2\tau)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_0((v,\tau))^2 &= \vartheta_5((2v, 2\tau)) \cdot \vartheta_5((0, 2\tau)) - \vartheta_4((2v, 2\tau)) \cdot \vartheta_4((0, 2\tau)) \\ &- \vartheta_{01}((2v, 2\tau)) \cdot \vartheta_{01}((0, 2\tau)) + \vartheta_{23}((2v, 2\tau)) \cdot \vartheta_{23}((0, 2\tau)).\end{aligned}$$

Ganz analog können die sämmtlichen Quadrate und ferner die sämmtlichen Producte zu je zwei der ursprünglichen Thetafunctionen bestimmt werden. Es ergeben sich dann die bekannten Resultate. Jedenfalls ist klar, dass wir, indem wir das specielle Problem der Fourier'schen Entwickelungen gelöst haben, *zugleich die allgemeine Transformation zweiter Ordnung völlig zu Ende geführt haben.* Die Ausdrücke, die sich hierbei ergeben haben und ferner die Ausdrücke, die sich hieraus für die transformirten Functionen herstellen lassen, sind so einfacher

Natur, dass wir für höhere Transformationsgrade das Problem als völlig gelöst werden ansehen können, wenn die Moduln $2\tau_{ix}$, $2n\tau_{ix}$ neben den Moduln τ_{ix}, $n\tau_{ix}$ in den fertigen Formeln vorkommen sollten. Es ist hiermit eine wesentliche Erleichterung für die späteren verbunden.

II. $n = 3$.

Indiesem Falle haben wir zu setzen:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, \; a_{12} = \;\; 1, \; a_{13} = \;\; 1, \; n_1 = 3, \\ a_{21} &= 0, \; a_{22} = \;\; 1, \; a_{23} = -1, \; n_2 = 2, \\ a_{31} &= 2, \; a_{32} = -1, \; a_{33} = -1, \; n_3 = 6. \end{aligned}$$

Mithin erhalten wir das Additionstheorem:

$$(6) \qquad \vartheta_5((v_1,\tau)) \cdot \vartheta_5((v_2,\tau)) \cdot \vartheta_5((v_3,\tau))$$
$$= \sum \vartheta_5[g_1]((v_1+v_2+v_3, 3\tau)) \cdot \vartheta_5[g_2]((2v_1-v_2-v_3, 6\tau)) \cdot \vartheta_5[g_3]((v_2-v_3, 2\tau))$$

wobei die Summation über alle Werthe von g, g' zu nehmen ist, die den Congruenzen Genüge leisten:

$$g_1 + g_3 \equiv 0 \bmod. 3, \quad g_1' + g_3' \equiv 0 \bmod. 3,$$
$$g_2 + g_3 \equiv 0 \bmod. 2, \quad g_2' + g_3' \equiv 0 \bmod. 2.$$

Setzen wir der Einfachheit halber:

$$A_{gg'} = \vartheta_5[gg']((3v, 3\tau)) + \vartheta_5[gg']((-3v, 3\tau)),$$

so erhalten wir, wenn wir $v_1 = v_2 = v_3$ setzen, die folgende Fourier'sche Entwickelung der dritten Potenz von $\vartheta_5((v_1, v_2))$:

$$(7) \qquad \vartheta_5((v,\tau))^3$$
$$= A_{00}(\vartheta_5((0,2\tau)) \cdot \vartheta_5((0,6\tau)) + \vartheta_5[10]((0,2\tau)) \cdot \vartheta_5[30]((0,6\tau)))$$
$$+ A_{10}(\vartheta_5((0,2\tau)) \cdot \vartheta_5[40]((0,6\tau)) + \vartheta_5[10]((0,2\tau)) \cdot \vartheta_5[10]((0,6\tau)))$$
$$+ A_{01}(\vartheta_5((0,2\tau)) \cdot \vartheta_5[04]((0,6\tau)) + \vartheta_5[01]((0,2\tau)) \cdot \vartheta_5[01]((0,6\tau))),$$
$$+ A_{11}(\vartheta_5((0,2\tau)) \cdot \vartheta_5[44]((0,6\tau)) + \vartheta_5[11]((0,2\tau)) \cdot \vartheta_5[11]((0,6\tau)))$$
$$+ A_{21}(\vartheta_5[01]((0,2\tau)) \cdot \vartheta_5[21]((0,6\tau)) + \vartheta_5[10]((0,2\tau)) \cdot \vartheta[54]((0,6\tau))).$$

Diese Entwickelung kann auch geschrieben werden:

$$(8) \qquad \vartheta_5((v,\tau))^3$$
$$= A_{00}(\vartheta_5((0,2\tau)), \vartheta_5((0,6\tau)) + \vartheta_{01}((0,2\tau)) \cdot \vartheta_{01}((0,6\tau)))$$
$$+ A_{10}(\vartheta_5((0,2\tau)) \cdot \vartheta_5[40]((0,6\tau)) + \vartheta_{01}((0,2\tau)) \cdot \vartheta_{01}[40]((0,6\tau)))$$
$$+ A_{01}(\vartheta_5((0,2\tau)) \cdot \vartheta_5[04]((0,6\tau)) + \vartheta_4((0,2\tau)) \cdot \vartheta_4[04]((0,6\tau)))$$
$$+ A_{11}(\vartheta_5((0,2\tau)) \cdot \vartheta_5[44]((0,6\tau)) + \vartheta_{23}((0,2\tau)) \cdot \vartheta_{23}[44]((0,6\tau)))$$
$$+ A_{21}(\vartheta_{01}((0,2\tau)) \cdot \vartheta_{01}[4,2]((0,6\tau)) + \vartheta_4((0,2\tau)) \cdot \vartheta_4[42]((0,6\tau))).$$

Durch Substitution halber Perioden können aus dem Additionstheorem die Fourier'schen Entwickelungen eines jeden Productes:

$$\vartheta_\alpha((v,\tau)) \cdot \vartheta_\beta((v,\tau)) \cdot \vartheta_\gamma((v,\tau))$$

in ähnlicher Weise dargestellt werden. Damit ist das Problem der Fourier'schen Entwickelung völlig gelöst, *mit ihm aber auch das Problem der Transformation 3ter Ordnung*, denn vermöge der vorhin gemachten Bemerkungen lassen sich die Thetafunctionen mit den Moduln $2\tau_{ix}$ und $6\tau_{ix}$ unmittelbar durch die Thetafunctionen mit den Moduln τ_{ix} und $3\tau_{ix}$ ausdrücken.

Setzen wir $v_1 = v_2 = 0$ so erhalten wir eine Fülle einfacher und eleganter Beziehungen zwischen den Wurzeln der Modular- und Multiplicatorgleichungen. Der Verfasser glaubt von ihrer Aufstellung absehen zu dürfen, da die Methoden völlig gegeben sind und bei ihrer Anwendung keinerlei Schwierigkeiten eintreten.

III. $n = 4$.

In diesem Falle ist zu setzen:

$$\begin{array}{llllll} a_{11}=1, & a_{12}=1, & a_{13}=1, & a_{14}=1, & n_1=4, \\ a_{21}=1, & a_{22}=1, & a_{23}=-1, & a_{24}=-1, & n_2=4, \\ a_{31}=0, & a_{32}=0, & a_{33}=1, & a_{34}=-1, & n_3=2, \\ a_{41}=1, & a_{42}=-1, & a_{43}=0, & a_{44}=0, & n_4=2. \end{array}$$

Wir erhalten demgemäss das Additionstheorem:

$$\prod_1^4{}_x \vartheta_5((v_x,\tau)) = \sum \prod_1^4{}_x \vartheta_5[g]((w_x, n_x\tau)). \tag{9}$$

Hierbei ist:

$$\begin{array}{lll} w_1 = v_1+v_2+v_3+v_4, & n_1=4, \\ w_2 = v_1+v_2-v_3-v_4, & n_2=4, \\ w_3 = v_3-v_4, & n_3=2, \\ w_4 = v_1-v_2, & n_4=2; \end{array} \tag{10}$$

ferner ist die Summation auszudehnen über alle Werthe von g, g' die den Congruenzen Genüge leisten:

$$\begin{array}{llll} g_1 \equiv s_1+s_2+s_3+s_4 \bmod 4, & g_1' \equiv s_1'+s_2'+s_3'+s_4' \bmod 4, \\ g_2 \equiv s_1+s_2-s_3-s_4 \bmod 4, & g_2' \equiv s_1'+s_2'-s_3'-s_4' \bmod 4, \\ g_3 \equiv s_3-s_4 \bmod 2, & g_3' \equiv s_3'-s_4' \bmod 2, \\ g_4 \equiv s_1-s_2 \bmod 2, & g_4' \equiv s_1'-s_2' \bmod 2. \end{array} \tag{11}$$

Jedenfalls ist klar, dass hiermit auch für den Fall $n = 4$ das Problem der Fourier'schen Entwickelung völlig gelöst ist, es ist aber ferner klar, dass damit auch die *Transformation vierter Ordnung ihre völlige*

Erledigung gefunden hat, da ausser den Moduln τ_{ix} und $4\tau_{ix}$ nur noch die Moduln $2\tau_{ix}$ in den fertigen Formeln enthalten sind.

Für die beiden folgenden Fälle beschränken wir uns darauf, die Werthe der Zahlen a_{rs} und n_x anzugeben.

IV. $n = 5$.

$$\begin{array}{lllllll}
a_{11} = 1, & a_{12} = 1, & a_{13} = 1, & a_{14} = 1, & a_{15} = 1, & n_1 = 5, \\
a_{21} = 4, & a_{22} = -1, & a_{23} = -1, & a_{24} = -1, & a_{25} = -1, & n_2 = 20, \\
a_{31} = 0, & a_{32} = 1, & a_{33} = 1, & a_{34} = -1, & a_{35} = -1, & n_3 = 4, \\
a_{41} = 0, & a_{42} = 0, & a_{43} = 0, & a_{44} = 1, & a_{45} = -1, & n_4 = 2, \\
a_{51} = 0, & a_{52} = 1, & a_{53} = -1, & a_{54} = 0, & a_{55} = 0, & n_5 = 2,
\end{array}$$

V. $n = 6$.

$$\begin{array}{llllllll}
a_{11}=1, & a_{12}=1, & a_{13}=1, & a_{14}=1, & a_{15}=1, & a_{16}=1, & n_1=6, \\
a_{21}=1, & a_{22}=1, & a_{23}=1, & a_{24}=-1, & a_{25}=-1, & a_{26}=-1, & n_2=6, \\
a_{31}=0, & a_{32}=0, & a_{33}=0, & a_{34}=2, & a_{35}=-1, & a_{36}=-1, & n_3=6, \\
a_{41}=0, & a_{42}=0, & a_{43}=0, & a_{44}=0, & a_{45}=1, & a_{46}=-1, & n_4=2, \\
a_{51}=2, & a_{52}=-1, & a_{53}=-1, & a_{54}=0, & a_{55}=0, & a_{56}=0, & n_5=6 \\
a_{61}=0, & a_{62}=1, & a_{63}=-1, & a_{64}=0, & a_{65}=0, & a_{66}=0, & n_6=2.
\end{array}$$

Jedenfalls ist auch in diesen Fällen die Fourier'sche Entwickelung thatsächlich gefunden, *ferner die Transformation* 6^{ter} *Ordnung völlig zu Ende geführt.* Die Transformation 5^{ter} Ordnung freilich kann nicht als völlig erledigt angesehen werden, da in den hierauf bezüglichen Formeln noch die Moduln $4\tau_{ix}$ und $20\tau_{ix}$ enthalten sind.

In diesen speciellen Formeln tritt aber das Gesetz, mit dessen Hülfe im allgemeinen Falle die Constantenbestimmung gegeben werden kann, klar hervor.

In der That, nehmen wir an, dass n eine ungerade Zahl sei, so setzen wir:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{1n} = 1, \\
&a_{21} = n - 1 \ldots a_{22} = a_{23} = \cdots = a_{2n} = -1, \\
&a_{31} = a_{41} = \cdots = a_{n1} = 0.
\end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Bedingungsgleichungen, mit deren Hülfe die übrigen Grössen zu bestimmen sind, dieselben sind wie für den Fall $n - 1$, so dass die Bestimmung damit auf den Fall einer geraden Zahl zurückgeführt ist, welche kleiner ist als die ursprünglich vorgelegte.

Ist dagegen n eine gerade Zahl gleich $2r$, so setzen wir:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{1n} = 1, \\
&a_{21} = a_{22} \cdots a_{2r} = 1, \; a_{2r+1} = a_{2r+2} = \cdots = a_{2n} = -1
\end{aligned}$$

Ueberdies nehmen wir an, dass in den folgenden $r-1$ Horizontalreihen die r ersten Glieder der Null gleich sind, während die r andern Glieder mit Hülfe der Bedingungsgleichungen bestimmt sind, die für den Fall r bestehen, dass endlich in den letzten $r-1$ Horizontalreihen die r letzten Glieder der Null gleich sind, während die übrigen zu dem Falle $n = r$ gehörig angesehen werden können.

Damit ist aber das Problem völlig gelöst und die Fourier'schen Entwickelungen sind für ein beliebig vorgelegtes n thatsächlich in der verlangten Form aufzustellen.

§ 5.

Die Fourier'schen Entwickelungen der Potenzen und Producte n^{ter} Ordnung der gewöhnlichen Thetafunctionen auf Grund des zweiten Additionstheorems.

Das im 3ten Paragraphen aufgestellte Additionstheorem wird zu der Lösung derselben Aufgabe führen, wenn wir die Zahlen $a_{\nu\varkappa}$ derart bestimmen, dass

$$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} = 2n$$

und

$$a_{\varkappa 1} + a_{\varkappa 2} + \cdots + a_{\varkappa n} = 0 \quad \text{ist für } \varkappa > 1.$$

Dass diese Bestimmung immer möglich ist, braucht nicht näher auseinandergesetzt zu werden. Der Vorzug dieser zweiten Art der Darstellung vor der ersten besteht darin, dass in einer Reihe von Fällen die Mannigfaltigkeit der Moduln eine geringere ist als bei der ersten Art der Darstellung. Nehmen wir z. B. den Fall $n = 5$, so erhalten wir die Werthe:

$$\begin{array}{lllllll}
a_{11}=2, & a_{12}=2, & a_{13}=2, & a_{14}=2, & a_{15}=2, & n_1=5,\\
a_{21}=4, & a_{22}=-1, & a_{23}=-1, & a_{24}=-1, & a_{25}=-1, & n_2=5,\\
a_{31}=0, & a_{32}=1, & a_{33}=1, & a_{34}=-1, & a_{35}=-1, & n_3=1,\\
a_{41}=0, & a_{42}=0, & a_{43}=0, & a_{44}=2, & a_{45}=-2, & n_4=2,\\
a_{51}=0, & a_{52}=2, & a_{53}=-2, & a_{54}=0, & a_{55}=0, & n_5=2.
\end{array}$$

Es treten also in den fertigen Formeln ausser den Moduln $\tau_{i\varkappa}$ und $5\tau_{i\varkappa}$ nur noch die Moduln $2\tau_{i\varkappa}$ auf. Das heisst aber vermöge der früheren Bemerkungen nichts anderes *als dass vermöge unserer Methode auch die Transformation fünfter Ordnung ihre völlige Erledigung gefunden hat.*

Rostock, den 15. Februar 1886.

Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen.

Von

Felix Klein in Göttingen.

§ 1.

Begriff der σ-Functionen.

Wenn man versuchen will, die neueren Fortschritte der Theorie der elliptischen Functionen auf die Theorie der hyperelliptischen Functionen (zunächst zweier Variabler) zu übertragen, so scheint es in erster Linie nöthig, statt der 16 Thetafunctionen der gewöhnlichen Theorie

$$\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

solche 16 Functionen einzuführen, die sich bei linearer Transformation der Perioden ohne Zutritt irgendwelcher Factoren einfach permutiren.

Man nähert sich diesem Ziele in einer für viele Zwecke ausreichenden Weise, wenn man mit Weierstrass die geraden Thetafunctionen durch ihre Nullwerthe, die ungeraden durch die Nullwerthe gewisser (hernach noch genauer zu definirender) Differentialquotienten dividirt*). Die so entstehenden Functionen permutiren sich nämlich bei linearer Transformation der Perioden bis auf einen bei allen gemeinsam auftretenden, von den Coefficienten der Transformation abhängenden Exponentialfactor:

$$(1) \qquad e^{c_{11}v_1^2 + 2c_{12}v_1v_2 + c_{22}v_2^2},$$

so dass also irgendwelche für die Functionen aufgestellte *homogene* Relationen sich so umsetzen, als hätte eine reine Permutation der Functionen stattgefunden. Dies Verhalten wird der Art nach nicht geändert, wenn man die in Rede stehenden Functionen von vorne-

*) Man vergl. insbesondere die Ausführungen bei Staude im 24ten Bande der mathematischen Annalen.

herein noch mit einem gemeinsamen, beliebig anzunehmenden Exponentialfactor:

$$e^{A_{11}v_1^2+2A_{12}v_1v_2+A_{22}v_2^2} \tag{2}$$

multiplicirt, so dass also alle auf solche Weise entstehenden Functionen zunächst gleichberechtigt erscheinen. Ich werde die so definirten Functionen vorübergehend mit

$$\Theta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

bezeichnen.

Wenn es sich jetzt darum handeln soll, statt der ϑ-Functionen solche einzuführen, die sich bei linearer Transformation der Perioden glatt permutiren, so kann es von vorneherein keinem Zweifel unterliegen, dass derartige Functionen unter den Θ mitenthalten sind. Unser Problem kann also dahin specialisirt werden, *dass wir verlangen, den zunächst willkürlichen Factor* (2) *so festzulegen, dass die bei linearer Transformation der Perioden im Allgemeinen auftretenden Factoren* (1) *überhaupt in Wegfall kommen.* Ich werde im folgenden Paragraphen zeigen, dass es in der That in einfacher Weise gelingt, dieser Forderung zu entsprechen. Indem ich fortwährend die Analogie mit Weierstrass' Theorie der elliptischen Functionen festhalte, bezeichne ich die neuen, so entstehenden Functionen als *σ-Functionen* (während Hr. Weierstrass selbst im Falle der hyperelliptischen und Abel'schen Functionen vorzuziehen scheint, den Factor (2) überhaupt unbestimmt zu lassen und sämmtliche Functionen, die wir gerade Θ nannten, als σ-Functionen zu bezeichnen*)).

Ich will hier gleich einer anderen Ausdrucksweise gedenken, die ich gelegentlich gebrauche. Es handelt sich um eine gemeinsame Benennung aller derjenigen Functionen, welche aus Thetafunctionen ν^{ter} Ordnung durch Zufügung irgendwelcher Factoren der folgenden Form

$$K \cdot e^{a_{11}v_1^2+2a_{12}v_1v_2+a_{22}v_2^2}$$

(wo die K, a_{11}, a_{12}, a_{22} ganz beliebige Constante sind) entstehen. Ich werde dieselben, wie dies auch anderweitig schon geschehen ist, als *Jacobische Functionen der ν. Ordnung* bezeichnen. — Meine sonstige Terminologie ist die allgemein übliche. Unter *Charakteristik* einer ϑ-Function verstehe ich ausschliesslich einen gewissen Complex von halben ganzen Zahlen, so dass also die Verallgemeinerung, die in der Einführung beliebig gebrochener Charakteristiken liegt, hier einstweilen ausgeschlossen bleibt.

*) Man vergl. Sitzungsberichte der Berliner Akademie von 1882 oder auch die einleitenden Paragraphen bei Schottky: Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von 3 Variabelen (Teubner 1880).

§ 2.

Aufstellung der zehn geraden σ-Functionen.

Wir beschränken uns jetzt zunächst auf gerade Functionen. Indem wir den Nullwerth eines geraden $\vartheta(v_1, v_2)$ kurz mit ϑ bezeichnen und der Einfachheit halber jede Charakteristikenbezeichnung bei Seite lassen, setzen wir dem eben Gesagten zufolge:

$$\Theta(v_1, v_2) = e^{A_{11}v_1^2+2A_{12}v_1v_2+A_{22}v_2^2} \cdot \frac{\vartheta(v_1, v_2)}{\vartheta}. \tag{3}$$

Um hier die A_{ik} in solcher Weise zu bestimmen, dass σ-Functionen resultiren, betrachten wir das Product sämmtlicher gerader Θ:

$$\prod_1^{10}\Theta(v_1, v_2) = e^{10(A_{11}v_1^2+2A_{12}v_1v_1+A_{22}v_2^2)} \cdot \prod_1^{10} \frac{\vartheta(v_1, v_2)}{\vartheta}. \tag{4}$$

Wenn sich bei linearer Transformation der Perioden unsere Θ bis auf einen bei allen gemeinsam zutretenden Factor (1):

$$e^{c_{11}v_1^2+2c_{12}v_1v_2+c_{22}v_2^2}$$

vertauschen, so wird dies Product bis auf den Factor:

$$e^{10(c_{11}v_1^2+2c_{12}v_1v_2+c_{22}v_2^2)}$$

ungeändert bleiben: sollen also die Θ speciell in σ übergehen, so muss das Product überhaupt invariant sein. Aber auch der Rückschluss lässt sich machen: Ist unser Product invariant, so folgt

$$c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0.$$

Wir werden uns also zunächst ausschliesslich mit dem Producte (4) beschäftigen.

Wir wollen unser Product insbesondere in eine nach Potenzen von v_1, v_2 fortschreitende Reihe entwickeln. Indem wir die Terme gleicher Ordnung in leicht verständlicher Weise zusammenfassen, haben wir (da es sich um eine gerade Function handelt):

$$\Pi = 1 + [v_1, v_2]_2 + [v_1, v_2]_4 + \cdots; \tag{5}$$

wir haben gleichzeitig:

$$\begin{aligned} e^{10(c_{11}v_1^2+2c_{12}v_1v_2+c_{22}v_2^2)} = 1 &+ 10(c_{11}v_1^2 + 2c_{12}v_1v_2 + c_{22}v_2^2) \\ &+ 50(c_{11}v_1^2 + 2c_{12}v_1v_2 + c_{22}v_2^2)^2 \\ &+ \cdots. \end{aligned}$$

Wir können also $(c_{11}v_1^2 + 2c_{12}v_1v_2 + c_{22}v_2^2)$ *definiren als den zehnten Theil derjenigen Aenderung, welche die Terme zweiter Ordnung* $[v_1, v_2]_2$ *der Reihenentwickelung* (5) *bei linearer Transformation der Perioden*

*erfahren**). Wollen wir jetzt statt der Θ speciell σ-Functionen haben, so genügt es, besagte Terme zweiter Ordnung gegenüber linearer Transformation der Perioden invariant zu machen; die Invarianz der höheren Terme und also unseres Productes folgt dann von selbst.

Hiermit nun haben wir eine bestimmte, aber noch unendlich vieler Lösungen fähige Aufgabe. Da wir nämlich die A_{ik} in (3), (4) ganz beliebig annehmen dürfen, so können wir $[v_1, v_2]_2$ in (5) jeder beliebigen quadratischen Form von v_1, v_2 gleich machen, und es giebt also so viele verschiedenartige σ-Functionen, als es quadratische Formen von v_1, v_2 giebt, die bei linearer Transformation der Perioden ungeändert bleiben. Auf die hiermit berührte Frage nach der allgemeinsten Bestimmung von σ-Functionen werde ich erst späterhin zurückkommen. An gegenwärtiger Stelle kommt es nur darauf an, der aufgestellten Forderung in irgend einer (möglichst einfachen) Weise zu genügen. Das evidente Princip, dessen wir uns zu dem Zwecke bedienen, ist dies, dass $[v_1, v_2]_2$ bei linearer Transformation jedenfalls ungeändert bleibt, wenn es von vorneherein identisch verschwindet. *Wir wollen also in der Folge Functionen* (3) *dann und nur dann als σ-Functionen bezeichnen, wenn in der Reihenentwickelung* (5) *die Terme zweiter Ordnung einfach wegfallen.* Der Erfolg wird zeigen, dass die specielle Festsetzung, die wir hiermit getroffen haben, in der That zu den *einfachsten* Functionen hinführt, die unserer anfänglichen Forderung genügen.

Die Bestimmung der A_{ik} in (3) geschieht jetzt folgendermassen. Ich will die Nullwerthe der zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 \vartheta(v_1, v_2)}{\partial v_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta(v_1, v_2)}{\partial v_1 \partial v_2}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta(v_1, v_2)}{\partial v_2^2}$$

der Kürze halber mit $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \vartheta_{22}$ bezeichnen. Dann ist für ein beliebiges gerades ϑ dem Taylor'schen Lehrsatze zufolge:

$$\frac{\vartheta(v_1, v_2)}{\vartheta} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_{11}}{\vartheta} \cdot v_1^2 + 2\,\frac{\vartheta_{12}}{\vartheta} \cdot v_1 v_2 + \frac{\vartheta_{22}}{\vartheta} \cdot v_2^2\right) + \cdots$$

Dies in (5) eingesetzt, erhalten wir sofort vermöge unserer Forderung:

$$A_{11} = -\frac{1}{20}\sum_1^{10} \frac{\vartheta_{11}}{\vartheta}, \quad A_{12} = -\frac{1}{20}\sum_1^{10} \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta},$$

$$A_{22} = -\frac{1}{20}\sum_1^{10} \frac{\vartheta_{22}}{\vartheta},$$

*) Man vergesse hier nicht, was ich der Kürze halber im Texte nicht weiter hervorhebe, dass bei linearer Transformation der Perioden die v_1, v_2 selbst lineare Umsetzungen erleiden. Dagegen bleiben die später einzuführenden u_1, u_2 bei linearer Transformation der Perioden ungeändert.

(wo die Summation über alle geraden ϑ zu erstrecken ist). *Wir finden also für die geraden σ folgende Definition, die fernerhin zu Grunde zu legen ist:*

$$(6) \qquad \sigma(v_1, v_2) = e^{-\frac{1}{20}\left(\sum_1^{10} \frac{\vartheta_{11}}{\vartheta} \cdot v_1^2 + 2\sum_1^{10} \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta} \cdot v_1 v_2 + \sum_1^{10} \frac{\vartheta_{22}}{\vartheta} \cdot v_2^2\right)} \cdot \frac{\vartheta(v_1, v_2)}{\vartheta}.$$

§ 3.

Bezeichnungen.

Ehe wir weiter schreiten, wird es zweckmässig sein, gewisse Bezeichnungen zu verabreden, bez. die in ihnen liegende, für unsere weiteren Entwickelungen fundamentale Bedeutung hervorzuheben.

Zunächst: für die Auffassung, die ich zu entwickeln habe, ist es der wesentlichste Punkt, dass die ganze Function sechsten Grades, welche bei den hyperelliptischen Integralen unter dem Quadratwurzelzeichen vorkommt, in keinerlei kanonischer Form vorausgesetzt wird, während gleichzeitig möglichst übersichtlich sein soll, welchen Erfolg jeweils irgend eine lineare Substitution hat, der die Integrationsvariable unterworfen wird. Dementsprechend bedienen wir uns durchweg *homogener* Variabler $z_1 : z_2$ etc., so dass die genannte ganze Function in eine *binäre Form sechsten Grades* übergeht:

$$(7) \qquad f(z_1, z_2), \quad \text{oder} \quad f(x_1, x_2) \text{ etc. } \ldots,$$

(was wir dann freilich der Kürze halber meist wieder mit $f(z), f(x), \ldots$ bezeichnen), während die einfachsten beiden zugehörigen überall endlichen Integrale die folgende Form gewinnen:

$$(8) \qquad u_1 = \int_y^x \frac{z_1(z\,dz)}{\sqrt{f(z_1, z_2)}}, \quad u_2 = \int_y^x \frac{z_2(z\,dz)}{\sqrt{f(z_1, z_2)}}.$$

Hier steht $(z\,dz)$ abkürzend für $(z_1\,dz_2 - z_2\,dz_1)$, x und y in den Grenzen für $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{y_1}{y_2}$, oder, was genauer ist, für ϱx_1, ϱx_2, $\varrho^3\sqrt{f(x)}$ und ϱy_1, ϱy_2, $\varrho^3\sqrt{f(y)}$, unter ϱ einen Proportionalitätsfactor verstanden, dessen Werth völlig gleichgültig ist und der nur der Symmetrie wegen eingefügt wurde. Als Function der x_1, x_2, wie der y_1, y_2, sind u_1, u_2 von der nullten Dimension, indem die unter den Integralzeichen stehenden Ausdrücke, wie selbstverständlich, nur von dem Quotienten $z_1 : z_2$ abhängen. Als Functionen der Coefficienten von f sind sie aus dem entsprechenden Grunde von der $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\text{ten}}$ Dimension.

Wir fixiren jetzt auf der zur Irrationalität $\sqrt{f}$ gehörigen Riemann'schen Fläche ein System kanonischer Querschnitte A_1, A_2, B_1, B_2,

bei deren Ueberschreitung u_1, u_2 beziehungsweise die folgenden Perioden darbieten mögen:

(9)

	A_1	A_2	B_1	B_2
u_1	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
u_2	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	ω_{24}

Die eigentlich wichtigen Grössen der weiteren Theorie sind dann die *Unterdeterminanten:*

$$u_1\omega_{2k} - u_2\omega_{1k}, \quad \omega_{1i}\omega_{2k} - \omega_{2i}\omega_{1k}, \tag{10}$$

von denen ich die letzteren mit p_{ik} bezeichne:

$$p_{ik} = \omega_{1i}\omega_{2k} - \omega_{2i}\omega_{1k} = -p_{ki}. \tag{10b}$$

Zwischen ihnen bestehen wohlbekannte Relationen, von denen ich hier nur diejenigen hinschreibe, die sich auf die p_{ik} beziehen, nämlich erstens die Gleichung:

$$\Pi = p_{13} + p_{24} = 0, \tag{11}$$

ferner die Identität:

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0. \tag{12}$$

Unsere eigentliche Tendenz muss sein, unter den Grössen (10) diejenigen, welche gleichberechtigt sind, auch formal in gleichförmiger Weise zu benutzen. Da wir aber bei unseren Entwickelungen an die Theorie der ϑ-Functionen anknüpfen, so haben wir hier zunächst in unsymmetrischer Weise vorzugehen. *Die Grössen* $v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$, *welche als Argumente der* ϑ*-Functionen fungiren, sind einfach fünf von einander unabhängige Quotienten der Unterdeterminanten* (10). Man hat:

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{u_1\omega_{22} - u_2\omega_{12}}{p_{12}}, \\ v_2 = \dfrac{u_1\omega_{21} - u_2\omega_{11}}{p_{21}} \end{cases} \tag{13}$$

und hierzu das Periodenschema:

(14)

	A_1	A_2	B_1	B_2
v_1	1	0	$\tau_{11} = \dfrac{p_{23}}{p_{12}}$	$\tau_{12} = \dfrac{p_{24}}{p_{12}}$
v_2	0	1	$\tau_{21} = \dfrac{p_{13}}{p_{12}}$	$\tau_{22} = \dfrac{p_{14}}{p_{12}}$

wo nun, in Folge von (11), $\tau_{12} = \tau_{21}$ ist.

Wir gedenken jetzt gleich derjenigen Eigenschaft der Unterdeterminanten (10), die in der Folge zumeist in Betracht kommt und die sich auf ihr Verhalten gegenüber linearer Substitution der Integrations-

variabelen $z_1 : z_2$ bezieht. Um schon hier diejenige Ausdrucksweise zu benutzen, die wir fernerhin immer gebrauchen, wollen wir sagen, *dass unsere Unterdeterminanten transcendente Covarianten, bez. transcendente Invarianten der Form f sind.* Unterwerfen wir nämlich die homogenen Variabelen z_1, z_2 und ebenso die x_1, x_2 bez. y_1, y_2, welche in den Grenzen der Integrale auftreten, einer und derselben übrigens beliebigen linearen Substitution:

$$(15)\qquad \begin{aligned} z_1 &= \alpha z_1' + \beta z_2', \quad & x_1 &= \alpha x_1' + \beta x_2', \\ z_2 &= \gamma z_1' + \delta z_2'; \quad & x_2 &= \gamma x_1' + \delta x_2'; \text{ etc.,} \end{aligned}$$

setzen ferner:

$$u_1' = \int_{y'}^{x'} \frac{z_1'(z'\,dz')}{\sqrt{f(z_1', z_2')}}, \quad u_2' = \int_{y'}^{x'} \frac{z_2'(z'\,dz')}{\sqrt{f(z_1', z_2')}},$$

so kommt:

$$(16)\qquad \begin{cases} u_1 = r(\alpha u_1' + \beta u_2'), \\ u_2 = r(\gamma u_1' + \delta u_2'), \end{cases}$$

wo r die Determinante der Substitution (15) bezeichnet:

$$(17)\qquad r = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

und ebenso für die zu irgend einem Querschnitte der Riemann'schen Fläche gehörigen Perioden:

$$(18)\qquad \begin{cases} \omega_{1k} = r(\alpha\omega_{1k}' + \beta\omega_{2k}'), \\ \omega_{2k} = r(\gamma\omega_{1k}' + \delta\omega_{2k}'). \end{cases}$$

Daher kommt für die p_{ik}:

$$(19)\qquad p_{ik} = r^3 \cdot p_{ik}',$$

und ebenso für die anderen Unterdeterminanten, was eben die Invarianteneigenschaft ist. Wenn wir speciell die p_{ik} als Invarianten, die anderen Unterdeterminanten als Covarianten bezeichneten, so sollte dies ausdrücken, dass erstere nur von den Coefficienten von f abhängen, letztere ausserdem Variable, nämlich die u_1, u_2, enthalten. Die Quotienten v_1, v_2, τ_{11}, τ_{12}, τ_{22}, die bei (15) durchaus ungeändert bleiben, würde man *absolute* Covarianten, bez. Invarianten von f nennen können.

Bemerken wir noch, dass die Unterdeterminanten (10) in den Coefficienten von f von der Dimension (-1) sind.

Wir gedenken jetzt der zweierlei Zerlegungen von f, die wir fernerhin gebrauchen. Es handelt sich erstens (den 10 geraden Thetafunctionen oder Sigmafunctionen entsprechend) um die auf zehn Weisen mögliche Zerlegung von f in zwei cubische Formen:

$$(20)\qquad f = \varphi \cdot \psi,$$

dann aber (den 6 ungeraden Functionen entsprechend) um die auf

sechs Weisen mögliche Zerlegung von f in eine Linearform p und eine Form fünften Grades χ:

$$f = p \cdot \chi. \tag{21}$$

Die Coefficienten von f sind bilineare ganze Functionen der Coefficienten von φ und ψ, beziehungsweise von p und χ, ausserdem hängen sie von φ und ψ symmetrisch ab. Wir schliessen rückwärts, dass eine homogene Function der Coefficienten von φ und ψ (oder von p und χ), die in jeder der beiden Coefficientenreihen vom ν^{ten} Grade ist und die überdies im ersteren Falle von φ und ψ symmetrisch abhängt, in eine homogene Function ν^{ten} Grades der Coefficienten von f umgesetzt werden kann.

§ 4.

Die Definition der sechs ungeraden σ.
Die Covarianteneigenschaft der σ-Functionen.

Um zunächst die Definition der ungeraden σ nachzutragen, benutzen wir den von anderer Seite bekannten Satz, dass bei der Reihenentwickelung einer ungeraden ϑ-Function nach Potenzen von u_1, u_2 die Terme erster Ordnung folgendermassen lauten:

$$C(p_1 u_1 + p_2 u_2),$$

wo $p_1 z_1 + p_2 z_2 = p$ die Linearform ist, die in der zum ungeraden ϑ gehörigen Zerlegung (21) auftritt, und wir für C die Doppelformel anschreiben können:

$$C = \frac{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u_1}\right)_{u_1=0,\,u_2=0}}{p_1} = \frac{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u_2}\right)_{u_1=0,\,u_2=0}}{p_2}. \tag{22}$$

Nach dem Verfahren, welches wir in § 1 andeuteten, haben wir jetzt, um zur entsprechenden σ-Function zu gelangen, nur folgendes zu thun: wir haben erstens durch C zu dividiren und dann mit dem in § 2 bestimmten Exponentialfactor zu multipliciren. *Wir setzen also im Falle einer ungeraden Charakteristik:*

$$\sigma(v_1, v_2) = e^{-\frac{1}{20}\left(\sum_1^{10} \frac{\vartheta_{11}}{\vartheta} \cdot v_1^2 + 2\sum_1^{10} \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta} \cdot v_1 v_2 + \sum_1^{10} \frac{\vartheta_{22}}{\vartheta} \cdot v_2^2\right)} \cdot \frac{\vartheta(v_1, v_2)}{C}, \tag{23}$$

wo die Summen im Exponenten nach wie vor über die geraden Charakteristiken zu nehmen sind.

Es wird nützlich sein, an die nunmehr gewonnenen Definitionen der geraden und ungeraden σ noch eine Bemerkung zu schliessen. Die geraden σ sind vermöge (6) unmittelbar Functionen der v_1, v_2, τ_{11}, τ_{12}, τ_{22}, während sich die ungeraden nach (23) erst in solche verwandeln, wenn man sie mit $p_1 u_1 + p_2 u_2$ dividirt. Nun sahen wir

aber, dass sich bei der linearen Substitution (15) die v_1, v_2, τ_{ik} gar nicht ändern, während gleichzeitig, nach Formel (16), $p_1u_1 + p_2u_2$ in $r(p_1'u_1' + p_2'u_2')$ übergehen wird. Dementsprechend haben wir für das Verhalten unserer σ-Functionen der Substitution (15) gegenüber, wenn wir uns noch gestatten, die u_1, u_2 als Argumente der σ-Functionen zu betrachten, die Formeln:

$$(24)\quad \begin{cases} \text{bei gerader Charakteristik: } \sigma(u_1, u_2) = \sigma(u_1', u_2'), \\ \text{bei ungerader Charakteristik: } \sigma(u_1, u_2) = r \cdot \sigma(u_1', u_2'). \end{cases}$$

Wir können die σ also wieder als *Covarianten* bezeichnen: *die geraden σ sind absolute Covarianten, die ungeraden haben den Index* 1. Ausserdem hängen die geraden σ in einer fernerhin noch genauer anzugebenden Weise zehnwerthig von den Coefficienten von f allein ab, die ungeraden σ aber von den Coefficienten von f und p, — wobei zwar das Verhältniss $p_1 : p_2$ aus der Gleichung $f = 0$ sechswerthig bestimmt werden kann, aber die absolute Fixirung der p_1, p_2 selbst der Willkür überlassen bleibt. *Die geraden σ sind Covarianten von f allein, die ungeraden σ simultane Covarianten von f und p.*

§ 5.

Umgestaltung des in § 2 eingeführten Exponentialfactors.

Der in § 2 eingeführte Exponentialfactor kann noch wesentlich vereinfacht werden, wie jetzt geschehen soll. Vermöge der partiellen Differentialgleichung der ϑ-Functionen haben wir für die Nullwerthe der geraden ϑ:

$$\vartheta_{11} = 4i\pi \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{11}}, \quad \vartheta_{12} = 2i\pi \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{12}}, \quad \vartheta_{22} = 4i\pi \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{22}}.$$

Daher können wir den in Rede stehenden Exponentialfactor jedenfalls folgendermassen schreiben:

$$(25)\quad e^{-\frac{i\pi}{5}\left(\sum_1^{10} \frac{\partial \log \vartheta}{\partial \tau_{11}} \cdot v_1^2 + \sum_1^{10} \frac{\partial \log \vartheta}{\partial \tau_{12}} \cdot v_1 v_2 + \sum_1^{10} \frac{\partial \log \vartheta}{\partial \tau_{22}} \cdot v_2^2\right)}$$

Hier nun tragen wir für das einzelne ϑ seinen von anderer Seite bekannten Werth ein. Ist $f = \varphi \cdot \psi$ diejenige Zerlegung, welche dem in Betracht genommenen ϑ im Sinne von (20) entspricht, und bezeichnen wir die Discriminanten von φ und ψ mit $\Delta\varphi$, bez. $\Delta\psi$, so hat man die Formel*):

*) Vergl. Thomae im 71ten Bande von Borchardt's Journal. Für die Constante C (Formel (22) des Textes) entnehmen wir derselben Abhandlung den Werth:

$$C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_{12}}{(2i\pi)^3}} \cdot \sqrt[8]{\Delta\chi},$$

wo $\Delta\chi$ die Discriminante der Form fünften Grades ist, die in der Zerlegung $f = p \cdot \chi$ (Formel (21)) vorkommt.

$$\vartheta = \sqrt{\frac{p_{12}}{(2i\pi)^2}} \cdot \sqrt{\Delta\varphi \cdot \Delta\psi}.$$

Ziehen wir zusammen, so erhalten wir schliesslich statt (25), unter D die Discriminante von f selbst verstanden:

$$e^{-\frac{i\pi}{10}\left(\frac{\partial \log D}{\partial \tau_{11}} \cdot v_1^2 + \frac{\partial \log D}{\partial \tau_{12}} \cdot v_1 v_2 + \frac{\partial \log D}{\partial \tau_{22}} \cdot v_2^2\right)},$$

oder auch, wenn wir die τ durch ihre Werthe in den p_{ik} ersetzen:

$$e^{-\frac{i\pi p_{12}}{10}\left(\frac{\partial \log D}{\partial p_{32}} \cdot v_1^2 + \frac{\partial \log D}{\partial p_{42}} \cdot v_1 v_2 + \frac{\partial \log D}{\partial p_{14}} \cdot v_2^2\right)}. \tag{26}$$

Die hiermit gefundene Formel bedarf noch einer gewissen Erläuterung. Die Discriminante D ist, wie jede rationale Invariante von f, eine homogene Function der Unterdeterminanten p_{ik} (hyperelliptische Modulfunction) und zwar, wie ich beiläufig bemerke, vom $(-10)^{\text{ten}}$ Grade (da ja das einzelne p_{ik} in den Coefficienten von f von der Dimension -1 ist). Nun kann aber jede solche Function vermöge der unter (11), (12) mitgetheilten Relationen:

$$\Pi = 0, \quad P = 0$$

in sehr verschiedene Gestalten gesetzt werden. In Formel (26) ist, der Entstehung dieser Formel entsprechend, D in der Weise aufzufassen, dass $(p_{12})^{10} \cdot D$ nur von $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ abhängt, D erscheint also als Function allein von $p_{12}, p_{32}, p_{42}, p_{14}$. Dies ist eine unsymmetrische Einführung der p_{ik}, welche man, allgemein zu reden, durch Vermehrung von D um irgend welche Multipla der Ausdrücke Π und P zu corrigiren bestrebt sein wird. Ich will dem hiermit angeregten Gedanken an vorliegender Stelle nur so weit Rechnung tragen, dass ich für D den gleichwerthigen Ausdruck

$$\Delta = D + \frac{\Pi}{2} \cdot \frac{\partial D}{\partial p_{42}} \tag{27}$$

einführe. Es ist dann

$$\frac{\partial \Delta}{\partial p_{13}} = \frac{\partial \Delta}{\partial p_{42}} = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial p_{42}} \tag{28}$$

und unser Exponentialfactor nimmt folgende Gestalt an, in welcher die Differentiation nach p_{42} ohne Weiteres durch eine Differentiation nach p_{13} ersetzt werden kann:

$$e^{\frac{-i\pi p_{12}}{10}\left(\frac{\partial \log \Delta}{\partial p_{32}} \cdot v_1^2 + 2\frac{\partial \log \Delta}{\partial p_{42}} \cdot v_1 v_2 + \frac{\partial \log \Delta}{\partial p_{14}} \cdot v_2^2\right)}. \tag{29}$$

§ 6.

Verhalten der σ bei Vermehrung der Argumente um Perioden.

Wir suchen nunmehr die Functionalgleichungen, denen unsere σ bei Vermehrung der u_1, u_2, oder der v_1, v_2, um Perioden unterliegen. Indem wir für's Erste nur die Charakteristik $\left|\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right|$ in Betracht ziehen und diese der Einfachheit halber nicht weiter zusetzen, beginnen wir mit der Formel

$$\vartheta(v_1 + 1,\ v_2) = \vartheta(v_1, v_2).$$

Aus ihr ergiebt sich durch directe Umrechnung vermöge (29):

$$\sigma(u_1 + \omega_{11},\ u_2 + \omega_{21}) = E \cdot \sigma(u_1, u_2),$$

wo E den folgenden Exponentialfactor bedeutet:

$$E = e^{\frac{-i\pi}{5}\left(\left(\omega_{22}\frac{\partial \log \Delta}{\partial p_{23}} - \omega_{21}\frac{\partial \log \Delta}{\partial p_{13}}\right)\left(u_1 + \frac{\omega_{11}}{2}\right) + \left(\omega_{12}\frac{\partial \log \Delta}{\partial p_{23}} - \omega_{11}\frac{\partial \log \Delta}{\partial p_{31}}\right)\left(u_2 + \frac{\omega_{21}}{2}\right)\right)}.$$

Jetzt ist, da Δ, zufolge (27), das p_{34} gar nicht enthält:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_{13}} = -\frac{\partial \Delta}{\partial p_{13}} \cdot \omega_{21} + \frac{\partial \Delta}{\partial p_{32}} \cdot \omega_{22},$$
$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_{23}} = -\frac{\partial \Delta}{\partial p_{31}} \cdot \omega_{11} + \frac{\partial \Delta}{\partial p_{23}} \cdot \omega_{12}.$$

Daher wird unsere Formel:

$$(30)\quad \sigma(u_1 + \omega_{11},\ u_2 + \omega_{21}) = e^{-\frac{i\pi}{5}\left(\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_{13}}\left(u_1 + \frac{\omega_{11}}{2}\right) + \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_{23}}\left(u_2 + \frac{\omega_{21}}{2}\right)\right)} \cdot \sigma(u_1, u_2),$$

wo wir hinterher Δ durch irgend eine Combination

$$(31)\qquad \Delta + M \cdot P$$

ersetzen können, indem der Ausdruck P (Formel (12)) nicht nur selbst identisch verschwindet, sondern auch nach irgend einer Periode (ω_{13}, ω_{23} etc.) differentiirt identisch verschwindende Differentialquotienten liefert.

Die Rechnung für die zweite Periode verläuft selbstverständlich ganz entsprechend; *wir finden:*

$$(32)\quad \sigma(u_1 + \omega_{12},\ u_2 + \omega_{22}) = e^{-\frac{i\pi}{5}\left(\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_{14}}\left(u_1 + \frac{\omega_{12}}{2}\right) + \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_{24}}\left(u_2 + \frac{\omega_{22}}{2}\right)\right)} \cdot \sigma(u_1, u_2).$$

Aber auch für die dritte und vierte Periode können die Formeln gleich hingeschrieben werden. Vertauschen wir nämlich, für $i = 1, 2$:

$$\omega_{i1},\ \omega_{i2},\ \omega_{i3},\ \omega_{i4}$$

mit

$$\omega_{i3},\ \omega_{i4},\ -\omega_{i1},\ -\omega_{i2},$$

so ist dies eine lineare Transformation der Perioden, bei welcher die Charakteristik $\left|\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right|$ und also unsere σ-Function ungeändert bleibt und Δ nur insoweit modificirt wird, als es in einen Ausdruck von der Form (31) verwandelt wird, — in der That kann Δ nicht noch um ein Multiplum von Π geändert werden, indem die Bedingung, durch welche wir Δ ursprünglich einführten (Formel (28)):

$$\frac{\partial\Delta}{\partial p_{13}} = \frac{\partial\Delta}{\partial p_{42}}$$

bei der vorgelegten Vertauschung ungeändert erhalten bleibt. Die hiernach allein mögliche Modification von Δ ist aber, wie wir eben sahen, für unsere Formeln ohne Belang. *Wir schliessen, dass wir die Functionalgleichungen für die dritte und die vierte Periode erhalten, indem wir in den Formeln* (30), (32) *einfach die vorgenannte Periodenvertauschung ausführen.*

Ich will, um den Vergleich mit den elliptischen σ-Functionen auch äusserlich nahe zu legen, die folgenden Bezeichnungen einführen:

$$(33)\quad \begin{aligned} \eta_{11} &= \frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_{13}}, & \eta_{12} &= \frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_{14}}, & \eta_{13} &= -\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_{11}}, & \eta_{14} &= -\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_{12}},\\ \eta_{21} &= \frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_{23}}, & \eta_{22} &= \frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_{24}}, & \eta_{23} &= -\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_{21}}, & \eta_{24} &= -\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_{22}}, \end{aligned}$$

wo Δ durch irgend eine der Functionen (31) ersetzt werden kann. *Dann lauten die Functionalgleichungen für Zutreten eines beliebigen Periodenpaares:*

$$(34)\quad \sigma(u_1+\omega_{1k}, u_2+\omega_{2k}) = e^{\eta_{1k}\left(u_1+\frac{\omega_{1k}}{2}\right)+\eta_{2k}\left(u_2+\frac{\omega_{2k}}{2}\right)}\cdot\sigma(u_1, u_2).$$

Soll hier noch statt der bisher festgehaltenen Charakteristik $\left|\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right|$ eine beliebige $\left|\begin{matrix}g_1&g_2\\h_1&h_2\end{matrix}\right|$ eingeführt werden, so ist rechter Hand für $k = 1, 2, 3, 4$ beziehungsweise

$$(-1)^{g_1},\quad (-1)^{g_2},\quad (-1)^{h_1},\quad (-1)^{h_2}$$

als Factor zuzusetzen. —

Die Grössen η_{1k}, η_{2k} nennen wir, der Weierstrass'schen Bezeichnung folgend, die *Perioden zweiter Gattung* der σ-Functionen. Zwischen ihnen und den ω_{1k}, ω_{2k} bestehen die bekannten bilinearen Relationen, auf welche ich hier nicht weiter einzugehen brauche. Das Wichtige an den Entwickelungen, die ich hier beabsichtigte, ist nicht die *Form* der Gleichung (34) (die ja bei allen Θ-Functionen mutatis mutandis wiederkehrt), sondern die unter (33) gegebene Werthbestimmung der η_{1k}, η_{2k}, die sich genau entsprechend in der Theorie der elliptischen σ-Functionen wiederfindet.

§ 7.

Zur Theorie der Integrale dritter Gattung.

Unser ferneres Ziel soll sein, die hyperelliptischen σ-Functionen unabhängig von der Theorie der Thetafunctionen durch Integrale dritter Gattung zu definiren, woraus dann weiterhin das Gesetz für ihre Entwickelungen nach Potenzen von u_1, u_2 abgeleitet werden wird. Zu dem Zwecke schicke ich hier einige Bemerkungen über Integrale dritter Gattung voraus, die ihrem allgemeinen Inhalte nach sich selbstverständlich unter die Sätze subsumiren, die in dieser Hinsicht anderweitig gewonnen worden sind*), die aber vermöge ihrer besonderen Form und der durch sie vermittelten Beziehung zur Invariantentheorie neu sein dürften. Ich benutze dabei dieselbe Abkürzung wie früher bei den Integralen erster Gattung, indem ich nämlich die beiden Grenzen des Integrals wie seine Parameter, je durch einen Buchstaben (x, y, bez. x', y') bezeichne. Ausserdem bediene ich mich derjenigen Schreibweise der Integrale dritter Gattung, bei welcher die Gleichberechtigung der Grenzen und der Parameter am klarsten hervortritt, nämlich der Darstellung durch Doppelintegrale.

Wir haben oben (Formel (7)) die binäre Form sechster Ordnung $f(z_1, z_2)$ in ganz allgemeiner Gestalt vorausgesetzt. Mein Ausgangspunkt ist jetzt der, dass wir ein zugehöriges Integral dritter Gattung mit den Grenzen y und x und den Parametern y' und x', welches überdies directe Vertauschung der Parameter und Argumente gestattet, unmittelbar anschreiben können, ohne irgendwelche Irrationalität zu Hülfe zu nehmen. Mit $F(z, z')$ bezeichne ich die durch 120 dividirte dritte Polare:

$$F(z, z') = \frac{1}{120}\left(\frac{\partial^3 f(z_1, z_2)}{\partial z_1^3} \cdot z_1'^3 + \cdots\right) \tag{35}$$

(wo der Zahlenfactor so gewählt ist, dass vermöge des Euler'schen Theorems $F(z, z) = f(z)$ wird). *Dann ist das fragliche Integral dritter Gattung durch folgende einfache Formel gegeben:*

$$Q_{x,y}^{x',y} = Q_{x',y'}^{x,y} = \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} \cdot \frac{(z'\,dz')}{\sqrt{f(z')}} \cdot \frac{\sqrt{f(z)}\,\sqrt{f(z')} + F(z, z')}{2(zz')^2}, \tag{36}$$

wo $(z\,dz)$, $(z'\,dz')$, (zz') *wieder Abkürzungen zweigliedriger Determinanten sind.*

*) Man vergleiche, was allgemeine Abel'sche Integrale angeht, insbesondere Nöther: Ueber die algebraischen Differentialausdrücke, zweite und dritte Note (in den Berichten der Erlanger physic. medicin. Gesellschaft von 1884). Ueber Weierstrass' Behandlung der hierher gehörigen Fragen speciell für hyperelliptische Integrale werde ich sogleich noch Genaueres zufügen.

Dass Q wirklich ein Integral dritter Gattung mit den angegebenen Eigenschaften ist, ist theils unmittelbar evident, theils in der üblichen Weise durch Reihenentwickelungen zu beweisen*). Für das allgemeinste Integral dritter Gattung P, mit den Argumenten x, y und den Parametern x', y', welches unmittelbare Vertauschung der Argumente und Parameter gestattet, ergiebt sich dann ferner der Ausdruck:

$$(37)\quad P^{x,y}_{x',y'} = P^{x',y'}_{x,y} = Q^{x,y}_{x',y'} + \alpha u_1 u_1' + \beta(u_1 u_2' + u_2 u_1') + \gamma u_2 u_2'.$$

Hier bedeuten u_1', u_2' die zwischen den Grenzen y' und x' hinerstreckten Integrale erster Gattung und α, β, γ sind irgendwie anzunehmende Constante. Als specieller Fall subsumirt sich das von Clebsch und Gordan in ihrer Theorie der Abel'schen Functionen gewählte Normalintegral:

$$(38)\qquad \Pi^{x,y}_{x',y'};$$

dasselbe ist dadurch ausgezeichnet, dass die Periodicitätsmoduln, die es an den Querschnitten A_1, A_2 besitzt, verschwinden, mögen wir nun z oder z' auf der Riemann'schen Fläche als variabel betrachten.

---

*) In einer Vorlesung *über hyperelliptische Functionen* vom Winter 1881/82 (von der ich eine Ausarbeitung besitze) hat Herr Weierstrass Betrachtungen gegeben, die auf die Formeln (35), (36) des Textes unmittelbar Anwendung finden. Seine weitere Durchführung wird dann freilich von der unsrigen verschieden, indem er von vorneherein eine Wurzel von $f = 0$ nach $z = \infty$ verlegt und bei seinen Rechnungen immer an der hierdurch gegebenen speciellen Voraussetzung festhält. Schreiben wir der letzteren Annahme entsprechend, indem wir zugleich z für z_1 und 1 für z_2 substituiren:

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + A_5 z^5,$$

so wird unser $F(z, z')$ gleich:

$$\begin{aligned} F(z,z') = A_0 &+ \frac{A_1}{2}(z+z') + \frac{A_2}{5}(z^2 + 3zz' + z'^2) \\ &+ \frac{A_3}{20}(z^3 + 9z^2z' + 9zz'^2 + z'^3) \\ &+ \frac{A_4}{5}(z^3z' + 3z^2z'^2 + zz'^3) + \frac{A_5}{2}(z^3z'^2 + z^2z'^3), \end{aligned}$$

während der von Herrn Weierstrass benutzte Ausdruck folgendermassen lautet:

$$\begin{aligned} R(z,z') = A_0 &+ A_2 zz' + A_4(zz')^2 \\ &+ \frac{A_1}{2}(z+z') + \frac{A_3}{2}(z+z')zz' + \frac{A_5}{2}(z+z')(zz')^2, \end{aligned}$$

und also mit unserem $F(z, z')$ durch die Formel zusammenhängt:

$$R(z,z') = F(z,z') - (z-z')^2\left(\frac{A_2}{5} + \frac{A_3}{20}(z+z') + \frac{A_4}{5}zz'\right),$$

die ihrerseits mit Formel (37), (39) des Textes stimmt.

Wir bemerken jetzt — und dies wird für unsere Theorie der Hauptpunkt —, dass unter allen Integralen P (38) das Integral Q durch eine besondere Eigenschaft ausgezeichnet ist. Um dieselbe bequem zu bezeichnen, will ich P in die Form setzen:

$$P = \int\int \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} \cdot \frac{(z'\,dz')}{\sqrt{f(z')}}$$
$$\cdot \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')} + F(z,z') + 2(z\,z')^2\,\{\alpha z_1 z_1' + \beta(z_1 z_2' + z_2 z_1') + \gamma z_2 z_2'\}}{2(z\,z')^2}$$

und den Ausdruck:

(39) $$\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')} + F(z,z') + 2(z\,z')^2\{\alpha z_1 z_1' + \beta(z_1 z_2' + z_2 z_1') + \gamma z_2 z_2'\}$$

als *Zähler* von P bezeichnen. Der Zähler von Q ist offenbar eine *Covariante* der Grundform f und zwar eine solche, die wir als *rational* und *ganz* bezeichnen dürfen, insofern es im Gebiete der hyperelliptischen Functionen naturgemäss ist, die Quadratwurzeln $\sqrt{f(z)}$, $\sqrt{f(z')}$ zu den rational bekannten Grössen zu rechnen. Auch den Zähler von P können wir als Covariante von f einführen: wir haben nur dafür zu sorgen, dass die quadratische Form

(40) $$\alpha z_1^2 + 2\beta z_1 z_2 + \gamma z_2^2$$

(deren erste Potenz in dem Zähler von P auftritt) eine Covariante von f ist, deren Dimension in den Coefficienten von f der Homogeneität wegen gleich $+1$ zu nehmen sein wird. Nun ist es in der That leicht, eine *rationale* quadratische Covariante von f aufzustellen, die diesen Grad in den Coefficienten von f besitzt. Ich komme an dieser Stelle zum ersten Male dazu, was in der Folge immer wieder geschehen muss, auf die *vollen Formensysteme* zu verweisen, welche Clebsch in seiner Theorie der binären Formen auf Grund der Untersuchungen von Gordan mittheilt. Das volle Formensystem speciell der Form sechsten Grades f, um welches es sich hier zunächst handelt, ist auf p. 296 daselbst abgedruckt. Um eine Covariante der in (40) postulirten Art zu finden, genügt es, von den dort mitgetheilten rationalen und ganzen quadratischen Covarianten von f irgend eine zu wählen und diese durch eine der eben dort aufgeführten Invarianten, deren Dimension in den Coefficienten von f um eine Einheit niedriger ist, zu dividiren. Dagegen findet sich in dem genannten Formensysteme keine einzige quadratische Covariante, die an sich die Dimension $+1$ in den Coefficienten von f besässe (wie ja auch a priori klar ist, dass eine solche Covariante nicht existiren kann)*). Daher haben wir, indem wir zusammenfassen:

*) Die einzige rationale ganze Covariante einer allgemeinen binären Form f, die in den Coefficienten von f linear ist, ist immer nur f selbst.

Es giebt unbegrenzt viele Integrale P, deren Zähler eine rationale Covariante von f ist, aber unter ihnen ist Q das einzige, bei dem der Zähler zugleich eine ganze Covariante von f ist.

Uebrigens ergiebt sich aus dem Grad in den Variabeln und in den Coefficienten von f, dass die Zähler der Integrale P, wenn sie überhaupt Covarianten von f sind, auch absolute Covarianten von f sind. Nun werden diese Zähler unter dem doppelten Integralzeichen einerseits mit den beiden Determinanten $(z\,dz)$, $(z'\,dz')$ multiplicirt, andererseits durch $(zz')^2$ dividirt. Daher sind die Integrale P, von denen wir handeln, und insbesondere das Integral Q, selber absolute Covarianten von f.

§ 8.

Definition der Thetafunctionen durch Integrale dritter Gattung.

Ehe ich weiter gehe, kehre ich noch einmal wieder zur Theorie der Thetafunctionen zurück und gebe eine Definition dieser Functionen durch Integrale dritter Gattung, welche für den Fortgang unserer Betrachtungen zweckmässig ist. Ich werde dabei die fernere Abkürzung gebrauchen, solche Stellen des hyperelliptischen Gebildes, welche zu $x, y, \ldots$ conjugirt sind, d. h. sich von $x, y, \ldots$ nur durch das Vorzeichen der Quadratwurzel $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt{f(y)}, \ldots$ unterscheiden, mit $\bar{x}, \bar{y}, \ldots$ zu benennen.

Wir bezeichnen jetzt mit $\vartheta(v_1, v_2)$ irgend eine gerade Thetafunction und mit $f = \varphi \cdot \psi$ die zugehörige Zerlegung von f. Die Wurzeln $z = \frac{z_1}{z_2}$ der Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ benennen wir vorübergehend mit k_1, k_2, k_3 und k_4, k_5, k_6. Wir haben dann jedenfalls folgende fundamentale Gleichung:

$$(41)\quad \log \frac{\vartheta\left(\int_{k_1}^{x} - \int_{k_2}^{x'} - \int_{k_3}^{x''}\right) \cdot \vartheta\left(\int_{k_1}^{y} - \int_{k_2}^{y'} - \int_{k_3}^{y''}\right)}{\vartheta\left(\int_{k_1}^{x} - \int_{k_2}^{y'} - \int_{k_3}^{y''}\right) \cdot \vartheta\left(\int_{k_1}^{y} - \int_{k_2}^{x'} - \int_{k_3}^{x''}\right)} = \Pi_{x,y}^{x',y'} + \Pi_{x,y}^{x'',y''},$$

wo die Bezeichnung der Argumente der ϑ-Function wohl ohne nähere Erläuterung verständlich ist und Π das unter (38) erklärte Clebsch-Gordan'sche Normalintegral ist. In dieser Gleichung können k_1, k_2, k_3 sofort durch k_4, k_5, k_6 ersetzt werden, so dass die Bevorzugung der Form φ, die vorzuliegen scheint, thatsächlich nicht statt hat.

In (41) bedeuten x, x', x'', y, y', y'' zunächst beliebige Stellen des hyperelliptischen Gebildes. Wir wollen jetzt x', x'' von x und y', y'' von y durch die Gleichungen abhängig machen:

$$(42)\qquad \begin{cases} \int_{k_1}^{x} du_i = \int_{k_2}^{x'} du_i + \int_{k_3}^{x''} du_i, \\ \int_{k_1}^{y} du_i = \int_{k_2}^{y'} du_i + \int_{k_3}^{y''} du_i, \end{cases} \qquad (i = 1, 2)$$

in denen wieder k_1, k_2, k_3 durch k_4, k_5, k_6 ersetzt werden können. Wir bringen diese Formeln in (41) zuvörderst linker Hand in Anwendung. Indem wir zusammenziehen und schliesslich beiderseits von den Logarithmen zu den Zahlen übergehen, kommt:

$$(43)\qquad \frac{\vartheta\left(\int_y^x\right)}{\vartheta} = e^{-\frac{1}{2}\left(\Pi_{x,y}^{x',y'} + \Pi_{x,y}^{x'',y''}\right)}.$$

Nun aber können wir auch rechter Hand vom Abel'schen Theoreme Gebrauch machen. Gleichung (42) sagt aus, dass die Punktgruppen

$$x', x'', \bar{x},$$

und

$$y', y'', \bar{y},$$

mit

$$k_1, k_2, k_3$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit

$$k_4, k_5, k_6$$

„corresidual" sind. Daher kommt, indem wir die Bezeichnung φ, ψ wieder aufnehmen:

$$\Pi_{x,y}^{x',y'} + \Pi_{x,y}^{x'',y''} = -\Pi_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}} + 2\log\frac{2\sqrt{f(x).f(y)}}{\sqrt{\varphi(x)}\sqrt{\psi(y)} + \sqrt{\psi(x)}\sqrt{\varphi(y)}}$$

und also:

$$(44)\qquad \frac{\vartheta\left(\int_y^x\right)}{\vartheta} = \frac{\sqrt{\varphi(x)}\sqrt{\psi(y)} + \sqrt{\psi(x)}\sqrt{\varphi(y)}}{2\sqrt{f(x).f(y)}} \cdot e^{\frac{1}{2}\Pi_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}}.$$

Diese Formel, *welche wir fortan als Definition der linker Hand stehenden Grösse betrachten wollen*, gilt selbstverständlich für jede gerade Thetafunction, sofern wir unter φ, ψ nur die jedesmal zugehörigen cubischen Formen verstehen wollen: sie hat den Vortheil, dass Alles, was auf die Charakteristik der Thetafunction Bezug hat, auf den algebraischen Theil geworfen ist, während der hinzutretende Exponentialfactor bei allen Thetafunctionen derselbe ist.

Um für die ungeraden ϑ-Functionen eine ähnliche Definitionsformel

zu erhalten, beziehe ich mich hier der Kürze halber auf Rosenhain's Parameterdarstellung der Quotienten je zweier ϑ-Functionen. Indem wir dieselbe in unsere Bezeichnung übertragen, insbesondere die Formeln (21), (22) heranziehen, kommt:

$$(45)\qquad \frac{\vartheta\left(\int_y^x\right)}{\sqrt{C}} = \frac{(xy)\sqrt{p(x)\cdot p(y)}}{2\sqrt{f(x)\cdot f(y)}}\cdot e^{\frac{1}{2}\Pi_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}}.$$

§ 9.

Definition der σ-Functionen durch Integrale dritter Gattung.

Die Quotienten, welche in (44), (45) linker Hand stehen, sind specielle Fälle der Functionen, die wir in § 1 mit Θ bezeichneten: um zu den allgemeinen Θ überzugehen, brauchen wir nur mit irgend einem Exponentialfactor

$$e^{A_{11}v_1^2+2A_{12}v_1v_2+A_{22}v_2^2}$$

zu multipliciren. *Dies aber kommt augenscheinlich darauf hinaus, das Integral* $\Pi_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}$ *in* (44), (45) *durch irgend ein anderes Integral dritter Gattung* $P_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}$ *zu ersetzen.* In der That, aus der Nebeneinanderstellung der Formeln (37), (38) folgt, dass $\Pi_{x,y}^{x',y'}$ mit $P_{x,y}^{x',y'}$ durch eine Relation verbunden ist, die wir, unter Heranziehung der v_1, v_2 statt der u_1, u_2, so schreiben können:

$$\frac{1}{2}P_{x,y}^{x',y'} = \frac{1}{2}\Pi_{x,y}^{x',y'} - A_{11}v_1v_1' - A_{12}(v_1v_2'+v_2v_1') - A_{22}v_2v_2'.$$

Nehmen wir nun insbesondere $x'=\bar{x}$, $y'=\bar{y}$, so wird $v_1'=-v_1$, $v_2'=-v_2$ und es kommt:

$$\frac{1}{2}P_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}} = \frac{1}{2}\Pi_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}} + A_{11}v_1^2 + 2A_{12}v_1v_2 + A_{22}v_2^2,$$

worin unsere Behauptung liegt.

Es müssen sich also auch unsere σ-Functionen durch Formeln vom Typus (44), (45) definiren lassen; es gilt nur, das Integral $\Pi_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}$ durch ein anderes zweckmässig gewähltes Integral dritter Gattung zu ersetzen. Ich will hier gleich das Resultat aussprechen, welches man nach dem bisherigen Gange unserer Entwickelung bereits erwarten wird: *Das Integral dritter Gattung, welches wir bei den* σ *benutzen müssen, ist einfach das Normalintegral* Q (*Formel* (36)), *die Definitionsformeln der* σ *lauten:*

1) *im Falle gerader Charakteristik:*

$$(46) \qquad \sigma(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{\varphi(x)}.\sqrt{\psi(y)} + \sqrt{\psi(x)}.\sqrt{\varphi(y)}}{2\sqrt{f(x).f(y)}} \cdot e^{\frac{1}{2}Q^{\bar{x},\bar{y}}_{x,y}},$$

2) *im Falle ungerader Charakteristik:*

$$(47) \qquad \sigma(u_1, u_2) = \frac{(xy)\sqrt{p(x).p(y)}}{2\sqrt{f(x).f(y)}} \cdot e^{\frac{1}{2}Q^{\bar{x},\bar{y}}_{x,y}}.$$

Ich habe dabei die Argumente der σ-Functionen gleich wieder mit u_1, u_2 (und nicht mit v_1, v_2) bezeichnet, da wir in der Folge nur noch von ersteren Gebrauch machen werden.

Der Beweis der Formeln (46), (47) wird in Uebereinstimmung mit § 2 darin zu liegen haben, dass in der Potenzentwickelung, die wir aus (46) für das Product der geraden σ ableiten können, die Glieder zweiter Ordnung identisch ausfallen (wobei es augenscheinlich auf dasselbe hinauskommt, ob wir, wie in § 2 geschehen, nach v_1, v_2, oder, wie wir später thun, nach u_1, u_2 ordnen). Da die Principien dieses Nachweises dieselben sind, die ich bei Aufstellung der Reihenentwickelung für die einzelnen σ gebrauche, so will ich hier in der Weise verfahren, dass ich zunächst letztere Reihenentwickelungen erbringe, *indem ich einstweilen* (46), (47) *als Definition der σ gelten lasse*, um dann den in Aussicht genommenen Beweis kurz nachzutragen. Beides soll in den folgenden zwei Paragraphen erledigt werden.

§ 10.

Allgemeines zur Reihenentwickelung der σ-Functionen.

Wir haben bereits oben (§ 7) darauf aufmerksam gemacht, dass der „Zähler" des Integrals Q eine *ganze* und in gewissem Sinne *rationale* Function der Coefficienten von f ist. Andererseits treten in den algebraischen Theilen der Formeln (46), (47) nur solche Irrationalitäten auf, die mit den Zerlegungen $f = \varphi \cdot \psi$ und $f = p \cdot \chi$ oder mit f selbst einfach zusammenhängen. *Hierin liegt, dass die Coefficienten der Reihenentwickelungen nach Potenzen von u_1, u_2*

beim geraden σ: *ganze rationale Functionen der Coefficienten von φ und ψ,*

beim ungeraden σ: *ganze rationale Functionen der Coefficienten von p und χ*

sind. Was den Beweis dieser Behauptungen angeht, so vergleiche man die neueste Arbeit von Wiltheiss (im 99ten Bande des Journals für Mathematik): durch Uebertragung der dort gegebenen Rechnungen könnte man geradezu das recurrente Gesetz finden, dem die in Rede

stehenden Entwickelungscoefficienten genügen (Partielle Differentialgleichungen der σ-Functionen, ein Gegenstand, der in enger Verbindung mit den sogleich zu entwickelnden invariantentheoretischen Sätzen behandelt werden sollte)*). — Wir wollen gleich noch zufügen, dass bei der Entwickelung der geraden σ die zugehörigen Formen φ, ψ selbstverständlich *symmetrisch* betheiligt sind.

Wir setzen jetzt für das gerade σ:

$$\sigma(u_1, u_2) = 1 + (u_1, u_2)_2 + (u_1, u_2)_4 + \cdots, \tag{48}$$

und für das ungerade σ entsprechend:

$$\sigma(u_1, u_2) = (p_1 u_1 + p_2 u_2) + (u_1, u_2)_3 + (u_1, u_2)_5 + \cdots \tag{49}$$

Die Anfangsterme dieser Reihenentwicklungen stehen nach den früheren Bemerkungen von vorneherein fest; die höheren Terme, die zu bestimmen bleiben, sollen weiterhin kurweg mit $(u_1, u_2)_{2\nu}$, beziehungsweise $(u_1, u_2)_{2\nu+1}$ bezeichnet werden. Indem wir uns erinnern, dass u_1, u_2 in den Coefficienten von f von der Dimension $-\frac{1}{2}$ sind, ferner die Schlussbemerkungen von § 3 herannehmen, folgt betreffs ihrer der weitere Satz:

Die Coefficienten von $(u_1, u_2)_{2\nu}$ *in* (48) *sind in den Coefficienten von* φ *und* ψ *je vom Grade* ν;

Die Coefficienten von $(u_1, u_2)_{2\nu+1}$ *in* (49) *sind in* p_1, p_2 *vom Grade* $(\nu+1)$, *dagegen in den Coefficienten von* χ *vom Grade* ν.

Hierüber hinaus erinnere man sich jetzt der Formeln (15), (16), (24). Wir sahen damals, dass bei einer linearen Substitution von der Determinante r, der die Integrationsvariabelen z_1, z_2 unterworfen werden:

$$z_1 = \alpha z_1' + \beta z_2',$$
$$z_2 = \gamma z_1' + \delta z_2'$$

die Integrale u_1, u_2 die Umsetzung erfahren:

$$u_1 = r(\alpha u_1' + \beta u_2'),$$
$$u_2 = r(\gamma u_1' + \delta u_2'),$$

während das gerade σ ganz ungeändert bleibt und das ungerade σ den Factor r erhält. Das Verhalten der σ muss aus dem Verhalten jedes einzelnen Terms $(u_1, u_2)_{2\nu}$, bez. $(u_1, u_2)_{2\nu+1}$ resultiren. Daher schliessen wir:

Die Terme $(u_1, u_2)_{2\nu}$ *in* (48) *sind simultane Covarianten der Formen* φ, ψ, *in denen die Variabelen durch* u_1, u_2 *ersetzt sind;*

Die Terme $(u_1, u_2)_{2\nu+1}$ *in* (49) *sind ebensolche simultane Covarianten der Formen* p *und* χ.

Dass die $(u_1, u_2)_{2\nu}$ bei den in Rede stehenden linearen Substitu-

*) Die Reihenentwickelungen der hyperelliptischen Θ-Functionen sind neuerdings von Brioschi weiter verfolgt worden; vergl. die Rendiconti della R. Accademia dei Lincei vom 21. März und 4. April 1886.

tionen überhaupt ungeändert bleiben, während die $(u_1, u_2)_{2\nu+1}$ den Factor r erhalten, giebt keinen neuen Satz, ist vielmehr eine Folge dessen, was eben über den Grad dieser Terme in den Coefficienten von φ, ψ, beziehungsweise p, χ, bereits gesagt wurde.

Die hiermit aufgestellten Sätze ergeben nun, wie ersichtlich, für die Aufstellung der Reihenentwickelungen der σ ein allgemeines Princip: *wir werden damit beginnen, die vollen Formensysteme der rationalen, ganzen Covarianten von φ und ψ, beziehungsweise von p und χ aufzustellen und setzen hernach die Terme $(u_1, u_2)_{2\nu}$ bez. $(u_1, u_2)_{2\nu+1}$ aus geeigneten Formen dieser Systeme mit Hülfe zunächst unbestimmter numerischer Factoren zusammen.* Genau so werden wir Entwickelungen verwandten Charakters aufzusuchen haben. Wenn wir uns z. B. sogleich mit der Reihenentwickelung des Productes der geraden σ beschäftigen, so werden wir in demselben Sinne das volle Formensystem der binären Form sechster Ordnung f selbst heranziehen müssen.

Die theoretische Grundlage unseres Princips ruht ersichtlich auf dem Gordan'schen Satze, demzufolge bei irgend gegebenen binären Formen *endliche* Formensysteme der in Rede stehenden Art jedesmal existiren: die practische Brauchbarkeit hinwieder auf dem glücklichen Umstande, dass wir die von uns postulirten Formensysteme in den Untersuchungen der Invariantentheoretiker thatsächlich bereits aufgestellt finden (siehe überall *Clebsch's Theorie der binären algebraischen Formen*), so dass wir die fertig vorliegenden Formeln nur heranzunehmen brauchen, wie dies nunmehr für die niedrigsten Terme der Reihenentwickelungen geschehen soll.

§ 11.

Specielle Durchführung der Reihenentwickelungen. Erledigung des noch ausstehenden Beweises.

Das simultane Formensystem zweier binärer cubischer Formen φ, ψ findet sich bei Clebsch l. c. auf p. 224 behandelt. Ich theile hier die niedrigsten demselben angehörigen Formen in nachstehendem Schema mit. Dasselbe ist nach dem Grade der Formen in den Coefficienten von φ sowie nach dem Grade in den Coefficienten von ψ geordnet; die über die einzelne Form gesetzte Zahl bedeutet den Grad in den Variabelen, die an die Klammerausdrücke rechts unten angefügten Indices den Grad der Ueberschiebung. Wir haben*):

*) Die Buchstaben $\varphi, \psi, \Delta, \nabla, \Theta$ habe ich ohne Weiteres bei Clebsch entnommen, die anderen (A und Ω) der besseren Uebersichtlichkeit halber von mir aus hinzugefügt. Statt $(\varphi, \psi)_3 = A$ giebt Clebsch $(\varphi, \psi)_3$ als von Θ und $(\varphi, \psi)_1 = \Omega$ verschiedene in den Coefficienten von φ und ψ bilineare Formen an, was ein offenbarer Druckfehler ist.

Ordnung in ψ \ Ordnung in φ	0	1	2
0	—	$\overset{3}{\varphi}$	$(\varphi, \psi)_2 = \overset{2}{\Delta}$
1	$\overset{3}{\psi}$	$(\varphi, \psi)_1 = \overset{4}{\Omega}$ $(\varphi, \psi)_2 = \overset{2}{\Theta}$ $(\varphi, \psi)_3 = \overset{0}{A}$	
2	$(\psi, \psi)_2 = \overset{2}{\nabla}$		

Diesem Schema entsprechend ergiebt sich nun folgende Reihenentwickelung der geraden σ bis zu den Termen vierter Ordnung inclusive:

$$(50)\quad \sigma(u_1, u_2) = 1 + c \,.\, \Theta(u_1, u_2) + \big(c' . A . \Omega(u_1, u_2) + c'' . \Theta(u_1, u_2)^2 + c''' . \Delta(u_1, u_2) . \nabla(u_1, u_2)\big) + \cdots,$$

unter c, c', c'', c''' numerische Constante verstanden, die auszuwerthen bleiben.

Um die Reihenentwickelungen der ungeraden σ zu finden, müssen wir zuerst das volle Formensystem einer einzelnen binären Form fünften Grades χ ins Auge fassen. Nach Clebsch, p. 277, sind die niedrigsten Formen:

Ordnung in den Coeff. von χ \ Ordnung in den Variabelen	2	5	6
1	—	χ	—
2	$(\chi, \chi)_4 = i$	—	$(\chi, \chi)_2 = H$

Die simultanen Formen von χ und p erwachsen nun nach invariantentheoretischen Principien, indem man alle möglichen Potenzen p^ν mit den Formen des vorstehenden Schemas durch ν-fache Ueberschiebung verbindet.

Solcherweise kommt für das ungerade σ bis zu den Termen fünfter Ordnung inclusive:

$$(51)\quad \sigma(u_1, u_2) = p + c \,.\, (\chi, p^2)_2 + \big(c' \,.\, p \,.\, (H, p^2)_2 + c'' . p^3 . i\big) + \cdots,$$

wo c, c', c'' auszuwerthende Constante sind.

Selbstverständlich hat man in die hier auftretenden Covarianten statt der Variabelen wieder u_1, u_2 zu substituiren.

— Uebrigens vergegenwärtige man sich den Fortschritt, der hinsichtlich der Berechnung definitiver Reihenentwickelungen der σ-Functionen durch Heranziehen der invariantentheoretischen Resultate gewonnen ist. Wollte man z. B. bei der Reihenentwickelung eines geraden σ nur die Dimension der einzelnen Terme in den Coefficienten von φ und ψ und die Symmetrie hinsichtlich φ und ψ heranziehen, so hätte man die Terme zweiter Ordnung mit $\frac{3 \cdot 16}{2} = 24$ und die Terme vierter Ordnung mit $\frac{5 \cdot 36}{2} = 90$ unbestimmten Coefficienten anzuschreiben. —

Wie jetzt die Reihenentwickelung des *Productes der geraden* σ zu finden ist, wurde bereits angedeutet. Wir setzen:

$$\prod_1^{10} \sigma(u_1, u_2) = 1 + [u_1, u_2]_2 + [u_1, u_2]_4 + \cdots,$$

bestimmen den Grad in den Coefficienten von f, den $[u_1, u_2]_\nu$ besitzt, zu ν und setzen schliesslich die einzelnen Terme als ganze Functionen geeigneter Formen des bei Clebsch auf p. 296 mitgetheilten vollen Formensystems von f zusammen. Dass nun $[u_1, u_2]_2$ identisch verschwindet, *dass also unsere jetzigen* σ *mit den in* § 2 *eingeführten übereinstimmen*, ergiebt sich sofort aus dem Umstande, der schon einmal (in § 7) für uns von Wichtigkeit war: dass nämlich eine quadratische Covariante von f, ersten Grades in den Coefficienten von f, nicht existirt. — Wir erfahren zugleich, dass $[u_1, u_2]_4$ bis auf einen Zahlenfactor mit $(f, f)_4$ übereinstimmt, etc. ..., was wir hier nicht weiter verfolgen.

Wir wollen jetzt auch noch die Frage zum Abschluss bringen, die in § 2 entstand, inwieweit nämlich die Fixirung der σ-Functionen, die wir damals wählten und auf die wir nun zurückgeführt worden sind, unter allen möglichen die zweckmässigste ist. Offenbar ergeben sich die allgemeinsten σ-Functionen aus den hier betrachteten durch Zufügung eines Exponentialfactors

$$e^{\alpha u_1^2 + 2\beta u_1 u_2 + \gamma u_2^2},$$

wo $(\alpha u_1^2 + 2\beta u_1 u_2 + \gamma u_2^2)$ eine in den u_1, u_2 als Variabelen geschriebene *eindeutige*, oder sagen wir gleich, da wir unnöthige Transcendenten jedenfalls vermeiden wollen, *rationale* Covariante von f ist, deren Dimension in den Coefficienten von f der Homogeneität wegen gleich $+1$ genommen werden muss. Nun sahen wir aber schon in § 7, dass eine solche Covariante nothwendig eine *gebrochene* Function der Coefficienten von f ist. Wenn wir die Coefficienten von f hinterher durch die Coefficienten von φ und ψ oder von p und χ ersetzen, wird sie immer noch eine gebrochene Function der in Betracht kommenden

Coefficienten bleiben. *Unsere σ sind daher die einzigen, deren Reihenentwickelungen nicht nur nach rationalen sondern auch nach ganzen Covarianten der Formen φ und ψ, bez. p und χ fortschreiten.* Uebrigens würde die Einführung allgemeinerer σ darauf hinauskommen, statt des Normalintegrales Q bei der Definition der σ-Functionen eines der anderen in § 7 erwähnten covarianten Integrale P zu benutzen.

Ich habe dabei als selbstverständlich vorausgesetzt, dass wir nur mit Covarianten von f operiren wollen. In der That, würden wir unseren Exponentialfactor nicht als Covariante von f einführen, so hiesse dies, dass wir in die Definition der σ-Functionen überflüssige Parameter, die mit der Form f in keinem nothwendigen Zusammenhange stünden, mit aufnähmen — ein Verfahren, welches Niemand würde gut heissen können.

§ 12.

Excurs über elliptische Functionen.

Um die nunmehr gewonnenen Resultate beurtheilen und in geeigneter Richtung weiterführen zu können, erscheint es nützlich, die Grundformeln von Weierstrass' Theorie der elliptischen Functionen zum Vergleich heranzuziehen. Indem ich an der durchgängigen Verwendung invarianter Bildungen festhalte, werde ich dieselben hier in einer Form hersetzen, bei welcher keinerlei besondere Voraussetzung über die Gestalt der zu Grunde liegenden Quadratwurzel oder die Wahl der Integralgrenzen gemacht ist. Ich denke mir $f(z_1, z_2)$ als irgend eine binäre biquadratische Form, und u durch die Formel definirt:

$$u = \int_y^z \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}, \tag{52}$$

was sind $\wp(u)$, $\wp'(u)$, was insbesondere die vier Sigmafunctionen $\sigma(u)$ und $\sigma_i(u)$ $[i = 1, 2, 3]$? Dies ist die Frage, die ich hier zunächst beantworte. Ich will dabei wieder in der Weise vorgehen, dass ich die in Betracht kommenden Formeln zuerst hinschreibe und hinterher verificire. *Man findet folgende Resultate:*

1) Um $\wp(u)$ zu definiren, bilden wir uns die durch 12 dividirte zweite Polare:

$$F(x, y) = \frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \cdot y_1^2 + \cdots\right). \tag{53}$$

Dann ist einfach:

$$\wp(u) = \frac{\sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)} + F(x, y)}{2(xy)^2}. \tag{54}$$

2) Bei der Definition von $\varphi'(u)$ haben wir nur erste Polaren von f in Betracht zu ziehen, *wir haben:*

$$(55)\quad \varphi'(u) = \frac{\sqrt{f(y)}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\cdot y_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\cdot y_2\right) + \sqrt{f(x)}\left(\frac{\partial f(y)}{\partial y_1}\cdot x_1 + \frac{\partial f(y)}{\partial y_2}\cdot x_2\right)}{4(xy)^3}.$$

3) Wir bilden uns jetzt das Integral dritter Gattung:

$$(56)\quad Q_{x,y}^{x',y'} = \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} \cdot \frac{(z'\,dz')}{\sqrt{f(z')}} \cdot \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')} + F(z,z')}{2(zz')^2},$$

wo unter dem Integralzeichen derselbe Ausdruck steht, nur in z und z' statt in x und y geschrieben, den wir eben gleich $\varphi(u)$ gesetzt haben. *Für $\sigma(u)$ finden wir dann folgenden Ausdruck:*

$$(57)\quad \sigma(u) = \frac{(xy)}{\sqrt{f(x)\cdot f(y)}} \cdot e^{\frac{1}{2} Q_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}}.$$

4) Jeder geraden σ-Function $\sigma_i(u)$ entspricht eine bestimmte Zerlegung von f in zwei quadratische Factoren:

$$(58)\quad f = \varphi_i \cdot \psi_i.$$

Für $\sigma_i(u)$ erhält man die Formel:

$$(59)\quad \sigma_i(u) = \frac{\sqrt{\varphi_i(x)}\sqrt{\psi_i(y)} + \sqrt{\psi_i(x)}\sqrt{\varphi_i(y)}}{2\sqrt{f(x)\cdot f(y)}} \cdot e^{\frac{1}{2} Q_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}}.$$

Was den Beweis der hiermit mitgetheilten Formeln betrifft, so bemerke man, dass selbige sämmtlich ihrem Bildungsgesetze nach völlig ungeändert bleiben, wenn man z_1, z_2 etc. irgend einer homogenen linearen Substitution von der Determinante 1 unterwirft. Wir werden jetzt voraussetzen, dass $f(z_1, z_2)$ durch eine solche Substitution, wie bekanntlich stets möglich, in die Weierstrass'sche Normalform verwandelt sei:

$$(60)\quad f(z_1, z_2) = 4z_1^3 z_2 - g_2 z_1 z_2^3 - g_3 z_2^4,$$

werden an ihr unsere Formeln ausrechnen und zusehen, ob dieselben dann mit solchen, die man anderweitig mitgetheilt findet*), übereinstimmen. Um den Vergleich zu erleichtern setze ich noch:

$$\int_x^\infty \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} = v, \qquad \int_y^\infty \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} = w,$$

also unser früheres u:

*) Vergl. überall: H. A. Schwarz: *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen.* Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstrass.

$$u = w - v$$

und substituire dementsprechend in unsere Formeln für:

$$x_1,\ x_2,\ \sqrt{f(x)};\quad y_1,\ y_2,\ \sqrt{f(y)}$$

der Reihe nach:

$$\wp(v),\ 1,\ \wp'(v);\quad \wp(w),\ 1,\ \wp'(w).$$

1) Formeln (54), (55) verwandeln sich durch die angegebene Substitution in folgende:

$$\wp(w-v) = \frac{\wp' v \cdot \wp' w + 2\wp v\,\wp w\,(\wp v + \wp w) - \frac{g_2}{2}(\wp v + \wp w) - g_3}{2(\wp v - \wp w)^2},$$

$$\wp'(w-v) = \frac{\left\{\begin{array}{l} \wp' w\left[\wp v^3 - \frac{3g_2}{4}\wp v - g_3 + 3\wp v^2 \wp w - \frac{g_2}{4}\wp w\right] \\ + \wp' v\left[\wp w^3 - \frac{3g_2}{4}\wp w - g_3 + 3\wp w^2 \wp v - \frac{g_2}{4}\wp v\right] \end{array}\right.}{(\wp v - \wp w)^3},$$

was bekannte Formen des Additionstheorems für $\wp$ und $\wp'$ sind*), womit (54) und (55) bewiesen sind.

2) Um Formel (57) zu prüfen, setze ich noch:

$$\int_{\infty}^{x} \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} = t, \qquad \int_{\infty}^{x} \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} = t'.$$

Dann wird das Doppelintegral (56) nach dem gerade Bewiesenen:

$$Q_{x,y}^{x',y'} = \int_{w'}^{v'}\int_{w}^{v} dt \,.\, dt' \,.\, \wp(t-t')$$

oder in bekannter Weise:

$$Q_{x,y}^{x',y'} = \log \frac{\sigma(v-v')\,.\,\sigma(w-w')}{\sigma(v-w')\,.\,\sigma(w-v')},$$

also

$$Q_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}} = \log \frac{\sigma(2v)\,.\,\sigma(2w)}{\sigma(v+w)^2}.$$

Formel (57) besagt hiernach:

$$\sigma(w-v) = \frac{\wp v - \wp w}{\sqrt{\wp' v\,\wp' w}} \cdot \frac{\sqrt{\sigma(2v)\,.\,\sigma(2w)}}{\sigma(v+w)},$$

was sich sofort als Identität zu erkennen giebt**).

3) Wir schreiten jetzt zu Formel (59). Wir zerlegen (60) mit Weierstrass in folgender Weise:

(61) $$f(z_1, z_2) = 4z_2(z_1 - e_i z_2)(z_1 - e_k z_2)(z_1 - e_l z_2)$$

*) Schwarz l. c. pag. 14, Formel (4) und (11).

**) Schwarz, l. c. pag. 13, N. 11 Formel (1), pag. 14, Formel (16).

und wählen dementsprechend:

$$\varphi_i = 4z_2(z_1 - e_i z_2), \quad \psi_i = (z_1 - e_k z_2)(z_1 - e_i z_2)$$

oder, vermöge der verabredeten Substitutionen:

$$\sqrt{\varphi_i(x)} = 2\sqrt{\wp v - e_i} = \frac{2 \cdot \sigma_i(v)}{\sigma(v)}, \quad \sqrt{\psi_i(x)} = \sqrt{\wp v - e_k \cdot \wp v - e_i} = \frac{\sigma_k(v) \cdot \sigma_l(v)}{\sigma(v)^2},$$

$$\sqrt{\varphi_i(y)} = 2\sqrt{\wp w - e_i} = \frac{2 \cdot \sigma_i(w)}{\sigma(w)}, \quad \sqrt{\psi_i(y)} = \sqrt{\wp w - e_k \cdot \wp w - e_i} = \frac{\sigma_k(w) \cdot \sigma_l(w)}{\sigma(w)^2}.$$

Setzen wir noch

$$\wp v - \wp w = (\wp v - e_i) - (\wp w - e_i) = \frac{\sigma(w)^2 \cdot \sigma_i(v)^2 - \sigma(v)^2 \cdot \sigma_i(w)^2}{\sigma(v)^2 \cdot \sigma(w)^2},$$

so verwandelt sich (59) nach Division mit der bereits bewiesenen Gleichung (57) in folgende Formel:

$$\frac{\sigma_i(v-w)}{\sigma(v-w)} = \frac{(\sigma v \cdot \sigma_i v \cdot \sigma_k w \cdot \sigma_l w + \sigma w \cdot \sigma_i w \cdot \sigma_k v \cdot \sigma_l v)}{(\sigma w^2 \cdot \sigma_i v^2 - \sigma v^2 \cdot \sigma_i w^2)},$$

die eine einfache Folge des gewöhnlichen Additionstheorems der σ-Functionen ist*). —

Ich gebe übrigens diese Formeln (54)—(59) nur insofern als neu, als in ihnen in Folge der Verwendung homogener Variabler die Beziehung zur Invariantentheorie der Form f explicit hervortritt. Jedenfalls die Formeln (54), (55) sind aus Vorlesungen von Weierstrass**), wie aus einer Abhandlung von Scheibner***) wohl bekannt. Sie erscheinen dort als Lösungen des Problems, ein beliebig vorgelegtes elliptisches Integral:

$$\int_y^z \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}$$

durch rationale Transformation in die Normalform:

$$\int_\varphi^\infty \frac{d\varphi}{\sqrt{4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3}}$$

überzuführen†). —

---

*) Schwarz, l. c. pag. 51, [D . 8] und [D . 1].

**) Vergl. die erste Mittheilung der betreffenden Formeln in § 1—3 der Dissertation von Biermann: *Problemata quaedam mechanica functionum ellipticarum ope soluta* (Berlin 1865).

***) *Zur Theorie der Reduction elliptischer Integrale in reeller Form* (Bd. 12 der Abhandl. d. math. phys. Classe der k. sächs. Gesellschaft d. W., 1879).

†) Es ist interessant, auch die eben dort mitgetheilten Umkehrungen der betreffenden Transformation in die homogene Form zu setzen. Betrachtet man

Zum Schlusse gedenke ich noch der Reihenentwickelungen von $\sigma(u)$, $\sigma_i(u)$. Wir haben zunächst in bekannter Weise*):

$$\sigma(u) = u - \frac{g_2}{120} u^5 - \frac{g_3}{840} u^7 - \cdots, \tag{62}$$

wo alle Coefficienten ganze Functionen der beiden rationalen Invarianten g_2 und g_3 von f sind. — Die Reihenentwickelungen der $\sigma_i(u)$ sind noch erst neuerdings von Weierstrass selbst ausführlich behandelt worden**). Man findet:

$$\sigma_i(u) = 1 - \frac{e_i}{2} u^2 \cdots, \tag{63}$$

wo die Coefficienten der aufeinanderfolgenden Potenzen ganze Functionen von e_i und $(e_k - e_i)$ sind. Wir bemerken insbesondere, dass in Folge von (63) und der Relation

$$e_i + e_k + e_i = 0$$

in der Reihenentwickelung des Productes $\sigma_1 u \,.\, \sigma_2 u \,.\, \sigma_3 u$ der Term mit u^2 wegfällt. Uebrigens aber wollen wir noch hervorheben, dass e_i, e_k, e_i, indem sie vermöge (60), (61) allein von g_2, g_3 abhängen, *irrationale* Invarianten von f sind. In allgemeiner Form können wir dieselben definiren, wenn wir von der Zerlegung $f = \varphi_i \,.\, \psi_i$ ausgehen. *Es ist*

---

neben $\wp(u)$, $\wp'(u)$ die Grenze y als bekannt und bezeichnet mit $H(y)$, $T(y)$ in üblicher Weise die Covarianten:

$$H(y) = \frac{1}{144} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y_2 \partial y_1} \\ \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y_1 \partial y_2} & \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y_2^2} \end{vmatrix}, \qquad T(y) = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} \frac{\partial f(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial f(y)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial H(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial H(y)}{\partial y_2} \end{vmatrix},$$

so hat man zunächst für x, bez. für x_1 und x_2, unter ϱ einen Proportionalitätsfactor verstanden:

$$\varrho x_1 = + \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot \wp(u) + \frac{\partial H}{\partial y_2} + 2 y_1 \sqrt{f(y)} \cdot \wp'(u),$$

$$\varrho x_2 = - \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \wp(u) - \frac{\partial H}{\partial y_1} + 2 y_2 \sqrt{f(y)} \cdot \wp'(u),$$

und hieraus durch Differentiation und Benutzung von

$$\frac{(x\,dx)}{\sqrt{f(x)}} = \frac{d\varphi}{\varphi'}$$

die Bestimmung der Quadratwurzel:

$$\varrho^2 \sqrt{f(x_1, x_2)} = -16 T(y) \,.\, \wp'(u) + 8 H(y) \sqrt{f(y)} \,.\, \wp''(u) + 8 f(y) \sqrt{f(y)} \left(2 \wp(u)^3 - \frac{3 g_2}{2} \wp(u) - g_3\right).$$

*) Schwarz l. c. pag. 6.

**) Sitzungsberichte der Berliner Akademie von 1882.

nämlich e_i gleich dem dritten Theile der zweiten Ueberschiebung von φ_i und ψ_i:

$$e_i = \frac{1}{3}(\varphi_i, \psi_i)_2. \tag{64}$$

Zum Beweise genügt es, die betreffende Ueberschiebung an den quadratischen Factoren der Weierstrass'schen Normalform auszurechnen.

§ 13.

Vergleich der elliptischen und hyperelliptischen Functionen.

Wenn wir jetzt zwischen den Entwickelungen, die wir über hyperelliptische Functionen gegeben haben, und den anderen, die wir nun betreffs der elliptischen Functionen hinzufügten, einen Vergleich anstellen sollen, so bemerken wir vor allem, dass die Definition, die wir in (46), (47) für die hyperelliptischen σ hinschrieben, vollständig übereinstimmt mit der in (57), (59) für die elliptischen σ aufgestellten. Das Gleiche können wir auch von den beiderseitigen Reihenentwickelungen sagen: wir müssen nur beachten, dass statt der zwei bei den hyperelliptischen Functionen vorhandenen Grössen u_1, u_2 im Falle der elliptischen Functionen nur eine, u, vorliegt, dass es sich also nicht mehr um *binäre* Covarianten, sondern um *unäre* handeln wird*), d. h. eben um Potenzen von u, die mit geeigneten Invarianten von f multiplicirt sind. Dem Satze, dass alle Entwickelungsterme der hyperelliptischen σ sich als ganze Functionen aus den Covarianten gewisser voller Systeme zusammensetzen, entspricht bei den elliptischen σ, dass die Coefficienten der einzelnen Potenzen von u jedesmal ganze Functionen von nur zwei Invarianten sind. — Ich verzichte darauf, die Uebereinstimmung der zweierlei σ noch weiter zu verfolgen; man vergleiche übrigens, was in § 6 über die beiderseitigen Functionalgleichungen und an anderen Stellen über die Potenzentwickelung der Producte der jeweiligen geraden σ-Functionen gesagt wurde. —

Das hiermit Bemerkte ist eine Bestätigung für die Zweckmässigkeit unserer bisherigen Ueberlegungen. Aber ein fortgesetzter Vergleich mit der Theorie der elliptischen Functionen führt weiter, zu wesentlich neuen Gedankenentwickelungen. Man beachte, dass die eigentliche Normalform der Theorie der elliptischen Functionen keineswegs diejenige ist, welche sich auf die Nebeneinanderstellung der $\sigma(u)$, $\sigma_i(u)$ stützt, vielmehr die andere, welche consequent mit $\sigma(u)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$

*) In der That, hätten wir statt hyperelliptischer Functionen zweier Variabler den nächst höheren Fall in Betracht gezogen, wo dann eine Grundform f vom achten Grade und drei überall endliche Integrale u_1, u_2, u_3 vorgelegt sein würden, so müssten die Entwickelungen der σ nach Covarianten mit drei Variablen u_1, u_2, u_3 fortschreiten, d. h. nach simultanen Invarianten von f und einer quadratischen Form, in denen die Coefficienten der quadratischen Form hinterher durch u_1, u_2, u_3 ersetzt worden sind.

operirt. Das entscheidende Moment liegt in dem Verhalten der in Betracht kommenden Functionen gegenüber linearen Transformationen der Perioden: während $\sigma(u)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$ bei allen linearen Transformationen ungeändert bleiben, ist dies bei den $\sigma_i(u)$ nur noch bei solchen linearen Transformationen der Fall, die modulo $\hat{2}$ zur Identität congruent sind, — oder auch im Sinne der sonst von mir eingehaltenen Terminologie: *die* $\sigma(u)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$ *sind Functionen erster Stufe, die* $\sigma_i(u)$ *Functionen der zweiten Stufe.* Wir werden den Sachverhalt noch besser bezeichnen, wenn wir $\wp(u)$, $\wp'(u)$ als Quotienten Jacobischer Functionen schreiben (wobei die Neuner Potenzen von $\sigma(u)$ selbst sind) und nun statt $\wp(u)$, $\wp'(u)$ neben $\sigma(u)$ nur die in den Zählern auftretenden Jacobischen Functionen nennen. Ich will eine Jacobische Function, welche der *ersten* Stufe angehört, fortan zur Unterscheidung mit $\Sigma(u)$ bezeichnen und ihr einen oberen Index geben, der ihre Ordnung anzeigt. Wir haben dann

$$(65)\qquad \sigma(u) = \Sigma^{(1)}(u),\quad \wp(u) = \frac{\Sigma^{(2)}(u)}{(\Sigma^{(1)}(u))^2},\quad \wp'(u) = \frac{\Sigma^{(3)}(u)}{(\Sigma^{(1)}(u))^3}$$

und können sagen: *dass die Normalform der Theorie der elliptischen Functionen durchweg mit* Σ*-Functionen operirt, insbesondere mit* $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, $\Sigma^{(3)}$, *durch die sich alle anderen ausdrücken lassen.* Verwenden wir statt $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, $\Sigma^{(3)}$ die σ, σ_i, so haben wir eine Theorie „zweiter Stufe"; an sie reihen sich, bei systematischer Behandlung der elliptischen Functionen, Theorieen der dritten, vierten Stufe etc.*).

Unser Zielpunkt muss jetzt sein, *eben jene Systematik die sich im Falle der elliptischen Functionen bewährt hat, auch im Falle der hyperelliptischen Functionen durchzuführen, vor allem sonach auch im hyperelliptischen Falle* Σ*-Functionen zu construiren.* Ich werde in der gegenwärtigen Darstellung nur noch auf letzteren Punkt eingehen, und kehre hier vorab, um die betreffenden Entwickelungen vorzubereiten, noch einen Augenblick zu den elliptischen Σ-Functionen zurück.

Indem wir (65) mit (54), (55), (57) combiniren, erhalten wir folgende Definitionen der elliptischen Fundamentalfunctionen:

$$(66)\quad \begin{cases} \Sigma^{(1)}(u) = (xy)\,.\,Z, \\ \Sigma^{(2)}(u) = \dfrac{\sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)} + F(x,y)}{2}\,.\,Z^2, \\ \Sigma^{(3)}(u) = \dfrac{\sqrt{f(y)}\left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}y_1 + \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2}y_2\right) + \sqrt{f(x)}\left(\dfrac{\partial f(y)}{\partial y_1}x_1 + \dfrac{\partial f(y)}{\partial y_2}x_2\right)}{4}\,.\,Z^3 \end{cases}$$

*) Man vergl. die Erläuterungen, welche ich hierüber in meiner Arbeit: *Ueber die elliptischen Normalcurven der* N^{ten} *Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der* N^{ten} *Stufe* im 13^{ten} Bande der Abhandlungen der math. phys. Classe der k. sächs. Gesellschaft d. Wiss. gegeben habe.

wo Z den folgenden „Zusatzfactor" bedeutet:

$$Z = \frac{e^{\frac{1}{2} Q_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}}}{\sqrt{f(x) \cdot f(y)}}. \tag{67}$$

Wir erkennen hier folgende Gesetze, denen sämmtliche Σ-Functionen unterliegen und die rückwärts zur Charakterisirung der Σ-Functionen ausreichen:

1) Eine Σ-Function ν^{ter} Ordnung ($\Sigma^{(\nu)}(u)$) ist gleich dem Producte von Z^ν in eine Covariante $C_{x,y}$ von f, die wir nach Adjunction der Grössen $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt{f(y)}$ als eine rationale ganze Covariante von f bezeichnen dürfen.

2) In x und y hat diese Covariante denselben Grad ν, so dass sie also bei festgehaltenem y, $\sqrt{f(y)}$ für 2ν Werthsysteme x, $\sqrt{f(x)}$, und ebenso bei festgehaltenem x, $\sqrt{f(x)}$ für 2ν Werthsysteme y, $\sqrt{f(y)}$ verschwindet.

3) Von den genannten 2ν Werthsystemen x, $\sqrt{f(x)}$ fallen jedesmal ν mit $\bar{y}$ (d. h. mit y, $-\sqrt{f(y)}$) und ebenso von den 2ν Werthsystemen y, $\sqrt{f(y)}$ jedesmal ν mit $\bar{x}$ (d. h. mit x, $-\sqrt{f(x)}$) zusammen.

Der letzte dieser drei Sätze ist offenbar besonders wichtig. Er ist nothwendig, weil der Zusatzfactor Z für $y = \bar{x}$ (oder, was dasselbe ist, für $x = \bar{y}$) einfach unendlich wird, während doch Σ endlich bleiben soll; er ist aber auch hinreichend, weil Z, wie leicht zu sehen, keine anderen Unendlichkeitsstellen als die hiermit berücksichtigten besitzt. Indem das Unendlichwerden von Z die unter 3) genannten Nullstellen von $C_{x,y}$ compensirt, verschwindet $\Sigma^{(\nu)}(u)$ selbst bei festgehaltenem y, $\sqrt{f(y)}$ nur für ν Stellen x, $\sqrt{f(x)}$ etc., wie dies von anderer Seite (aus der Theorie der Jacobi'schen Functionen) bekannt ist.

Uebrigens erweist sich $\Sigma^{(\nu)}(u)$ als eine gerade oder ungerade Function von u und bleibt also bei Vertauschung von x und y im ersteren Falle überhaupt, im zweiten bis auf das Vorzeichen ungeändert. Es folgt dies aus Homogeneïtätsgründen bei Betrachtung der nach Potenzen von u fortschreitenden Reihenentwickelungen der Σ (deren Coefficienten durchweg ganze Functionen von g_2, g_3 sein müssen), oder auch durch directe Aufstellung sämmtlicher zulässiger Covarianten $C_{x,y}$. Was letzteren Punkt angeht, so können offenbar alle homogenen Relationen zwischen Σ-Functionen als Identitäten zwischen Covarianten $C_{x,y}$ aufgefasst und bewiesen werden. Insbesondere, wenn alle $\Sigma^{(\nu)}(u)$ ganze Functionen der drei fundamentalen $\Sigma^{(1)}(u)$, $\Sigma^{(2)}(u)$, $\Sigma^{(3)}(u)$ sind, so heisst dies, dass alle $C_{x,y}$ ganze Functionen der in (66) auftretenden sind, ein Satz, den man durch directe Ueberlegung bestätigt.

§ 14.

Hyperelliptische Σ-Functionen.

Indem ich mich nunmehr zur Theorie der hyperelliptischen Σ-Functionen wende, beginne ich mit der Construction von Beispielen. Wir erhalten dieselben, indem wir geeignete symmetrische Verbindungen der hyperelliptischen σ in Betracht ziehen. Von dem hierher gehörigen Producte der geraden σ haben wir schon in § 2 und § 11 gehandelt. Aber ebensowohl gehört hierher das Product der ungeraden σ, für welches sich aus (47), unter Z wieder den Zusatzfactor (67) verstanden, folgender Werth ergiebt:

$$\prod_1^6 \sigma(u_1, u_2) = -\frac{(xy)^6 \cdot \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(y)}}{64} \cdot Z^6, \tag{68}$$

oder die Summe der Quadrate der geraden σ*), für welche aus (46) der folgende Ausdruck resultirt, dessen hauptsächlicher Bestandtheil uns im Laufe unserer Entwickelungen nun schon so oft begegnet ist:

$$\sum_1^{10} \sigma(u_1, u_2)^2 = 5 \cdot (\sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)} + F(x, y)) \cdot Z^2, \tag{69}$$

oder auch jede lineare Combination der Quadrate der ungeraden σ:

$$\sum_1^6 C_i \cdot \sigma_i(u_1, u_2)^2, \tag{70}$$

bei der wir die C_i mit Rücksicht auf die Dimension der σ_i in den Coefficienten der zugehörigen Formen p_i und χ_i in der Art als simultane Invarianten der p_i und χ_i einführen, dass ihr Grad in den Coefficienten von p_i um zwei Einheiten kleiner als ihr Grad in den Coefficienten von χ_i ist. — Ausgerechnet ergeben die Summen (70) Werthe der folgenden Form

$$(\alpha x_1 y_1 + \beta(x_1 y_2 + x_2 y_1) + \gamma x_2 y_2) \cdot (xy)^2 \cdot Z^2, \tag{71}$$

unter

$$\alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2$$

je eine rationale, ganze, quadratische Covariante von f verstanden.

Diese Beispiele, zusammen mit dem im vorigen Paragraphen über elliptische Σ-Functionen Gesagten, werden genügen, um den allgemeinen Begriff hyperelliptischer Σ-Functionen erfassen zu lassen. Ein

*) Die Summe der ersten Potenzen kommt nicht in Betracht, weil sie überhaupt keine Jacobische Function ist.

Punkt selbstverständlich bleibt den elliptischen Functionen bei diesem Vergleiche eigenthümlich und ertheilt ihrer Theorie eine besondere Signatur, dass bei ihnen nämlich eine Jacobische Function

$$\sigma(u) = \Sigma^{(1)}(u)$$

existirt, welche gleichzeitig ein σ und ein Σ ist. Im Uebrigen haben wir den folgenden Satz, der die Charakterisirung der hyperelliptischen Σ-Functionen enthält:

Eine hyperelliptische Σ-Function ν^{ter} Ordnung hat die Gestalt:

$$\Sigma^{(\nu)}(u_1, u_2) = C_{x,y} \cdot Z^\nu, \tag{72}$$

wo $C_{x,y}$ eine im Rationalitätsbereiche $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt{f(y)}$ rationale, ganze Covariante von f ist, welche bei festgehaltenem y, $\sqrt{f(y)}$ für 3ν Werthsysteme x, $\sqrt{f(x)}$ verschwindet, von denen ν mit $\bar{y}$ zusammenfallen, bei festgehaltenem x, $\sqrt{f(x)}$ aber für 3ν Werthsysteme y, $\sqrt{f(y)}$ verschwindet, von denen ν mit $\bar{x}$ coincidiren.

Als Grad von $C_{x,y}$ in den x oder den y ergiebt sich $\frac{3\nu}{2}$, woraus wir schliessen, dass ν jedenfalls eine gerade Zahl ist. Wir zeigen ferner, dass $C_{x,y}$ bei Vertauschung von x und y ungeändert bleiben muss. Es folgt dies schon aus der Reihenentwickelung von $\Sigma^{(\nu)}(u_1, u_2)$, die nach den Formen des vollen Formensystems der Form f fortschreiten muss, indem ja unter diesen Formen (deren Variable durch u_1, u_2 ersetzt werden) nur Covarianten geraden Grades vorhanden sind, die Reihenentwickelung also ungeändert bleibt, wenn wir u_1, u_2 durch $-u_1$, $-u_2$ ersetzen*).

Speciell als niederste Σ-Functionen ergeben sich vier von der zweiten Ordnung, die ich durch obere Indices unterscheiden will:

1) Es seien $\Sigma a_{ik} x_i x_k$, $\Sigma b_{ik} x_i x_k$, $\Sigma c_{ik} x_i x_k$ die niedrigsten drei rationalen, ganzen, quadratischen Covarianten von f. *Dann sind die ersten drei in Betracht kommenden Σ-Functionen in Uebereinstimmung mit* (71):

$$\begin{cases} \Sigma_1^{(2)}(u_1, u_2) = \Sigma a_{ik} x_i y_k \cdot (xy)^2 \cdot Z^2, \\ \Sigma_2^{(2)}(u_1, u_2) = \Sigma b_{ik} x_i y_k \cdot (xy)^2 \cdot Z^2, \\ \Sigma_2^{(3)}(u_1, u_2) = \Sigma c_{ik} x_i y_k \cdot (xy)^2 \cdot Z^2. \end{cases} \tag{73}$$

2) *Als weitere Function wähle ich nach* (69):

$$\Sigma_2^{(4)}(u_1, u_2) = \left(\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(y)} + F(x, y)\right) \cdot Z^2. - \tag{74}$$

Die vorliegenden Untersuchungen mögen hiermit ihr vorläufiges Ende gefunden haben. In welcher Richtung sie weiterzuführen sind,

*) Bei hyperelliptischen Functionen höherer Art treten alternirend nur gerade Σ-Functionen oder auch ungerade auf, je nachdem die Zahl der in Betracht kommenden Variabelen eine gerade oder eine ungerade ist.

und insbesondere: dass sie Uebertragungen auf allgemeine Abel'sche Functionen gestatten, dürfte ohne Weiteres deutlich sein. Das wesentlich Neue meiner Betrachtungen erblicke ich in dem principiellen Anschlusse an die Processe und Begriffsbildungen der Invariantentheorie: nur hierdurch wird von vorneherein die Unterscheidung wesentlicher und unwesentlicher Constanten möglich und also ein wichtiges Hinderniss weggehoben, das sich bisher dem Fortschritte der Theorie entgegen stellte. Die elliptischen Functionen zusammen mit den hyperelliptischen Functionen beliebig vieler Argumente erscheinen dabei durch den Umstand ausgezeichnet, dass bei ihnen die Betrachtung einer *binären* Form zu Grunde zu legen ist (oder doch zu Grunde gelegt werden kann), während man zur Behandlung der allgemeinen Abel'schen Functionen zu Formen mit grösserer Variablenzahl wird fortschreiten müssen.

Göttingen, den 10. April 1886.

Ueber die Herpolodie.

(Aus einem Briefe an die Redaction.)

Von

W. Hess in München.

Unter dem vorstehenden Titel erscheinen seit einiger Zeit in den Comptes rendus und anderen französischen Zeitschriften Abhandlungen, welche ihren Ausgang von einer in den Comptes rendus erschienenen Note de Sparre's*) nehmen. de Sparre hat daselbst gezeigt, dass die von Poinsot in seiner théorie nouvelle de la rotation des corps eingeführte ebene Curve der Herpolodie, welche durch das Abrollen eines Ellipsoids auf einer festen Ebene erzeugt wird, (Spitzen und) Wendepunkte nicht besitzen kann. Sein Beweis stützt sich auf eine Formel von Hermite**), welche die Bedingung für das Auftreten von Wendepunkten in elliptischen Functionen der Zeit ausdrücken sollte, aber in Folge eines Zeichenfehlers nicht ganz correct ausfiel, so dass es Hermite nicht möglich ward, den vorstehenden Satz selbst zu finden. Abhandlungen von Mannheim***), de St. Germain†), Franke††) und Résal†††) verfolgen nun weiterhin den Zweck, für das obige Theorem, welches sie als sehr wichtig und elegant bezeichnen, andere Beweise zu geben.

Dieses „Theorem von de Sparre" ist aber keineswegs neu.

In meiner durch Anregung des Hrn. Brill vom Jahre 1879 auf 1880 entstandenen Doctordissertation: das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariablen Ebene (München, 1880. 60 pp.) habe ich nicht nur die Frage nach den Wendepunkten der Herpolodie für die Flächen zweiten Grades allgemein gelöst, sondern auch für die

*) Sur l'erpolodie de Poinsot. Comptes rendus. Bd. 99. p. 906—909.

**) Sur quelques applications des fonctions elliptiques. ibid. Bd. 86. p. 277.

***) Sur la polhodie. ibid. Bd. 100. p. 938—940. — Sur l'herpolodie. ibid. Bd. 100. p. 963—966. — Sur l'hyperboloïde articulé et l'application de ses propriétés à la démonstration de M. de Sparre. ibid. Bd. 101. p. 501—504.

†) Sur l'herpolodie. Bd. 100. p. 1126—28.

††) Sur la courbure de l'herpolodie. Comptes rendus. Bd. 100. p. 1573—1576. Nebst einer Bemerkung von Darboux.

†††) Note sur la courbure de l'herpolodie. Journal de l'éc. polyt. Cahier 55. p. 275—285.

in der Mechanik wichtige Herpolodie des Ellipsoids eine Reihe anderer Theoreme gefunden. Zur ausdrücklichen Wahrung meiner Priorität erlaube ich mir nun, meine Sätze an dieser Stelle noch einmal aufzuführen. Der Hinweis auf die betreffende Stelle meiner Arbeit geschieht dabei durch Angabe der blosen Seitenzahl (p. . . .); fehlt die letztere, so ist der fällige Satz — meist dem Zusammenhang oder Uebergang dienend — neu hinzugefügt.

Die Halbaxen des rollenden Ellipsoids waren genannt $a = \frac{1}{\sqrt{A}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{B}}$, $c = \frac{1}{\sqrt{C}}$ $(a > b > c;\ C > B > A)$, der Abstand des Mittelpunktes O von der invariablen Ebene $h = \frac{1}{\sqrt{H}}$. Durch die Folge aller Tangentialebenen $h = h$ bestimmt sich auf dem Ellipsoid eine Raumcurve 4. Ordnung, die Poinsot'sche Polodie. Je nachdem der Abstand h grösser oder kleiner als die mittlere Halbaxe ist $(H \lesseqgtr B)$, läuft diese Curve um die grösste oder kleinste Axe des Ellipsoids; ist $h = b$ $(H = B)$, so zerfällt die Polodie in ein Ellipsenpaar durch die mittlere Axe.

Für die Grössenfolge $C > B > A$ wird das Ellipsoid ein Centralellipsoid genannt, sobald $C < A + B$; ist $C > A + B$, so kann dasselbe entsprechend als Nichtcentralellipsoid bezeichnet werden.

Eine der ersten Fragen betrifft die

I. Wendepunkte der Herpolodie des Ellipsoids.

In meiner oben citirten Dissertation habe ich hierüber bemerkt:

1. *In der Herpolodie können niemals Wendepunkte auftreten, wenn das rollende Ellipsoid ein Centralellipsoid ist.* (p. 32.)
2. *In der Herpolodie sind, auch wenn das Ellipsoid ein beliebiges ist, Wendepunkte ein- für allemal ausgeschlossen, wenn der Abstand der invariablen Tangentialebene vom Mittelpunkt des Ellipsoids kleiner ist als die mittlere Halbaxe.* (p. 32.)
3. *In der Herpolodie müssen Wendepunkte auftreten, sobald das rollende Ellipsoid ein Nichtcentralellipsoid und der Abstand der Tangentialebene grösser ist als die mittlere Halbaxe.* (p. 32.)
4. Die Vorstellungen, welche Poinsot und dessen Commentator Chelini*) von der Form der Curve hatten, waren demnach irrige (p. 33). Auch rein experimentelle Versuche, welche v. Obermayer*) nach einer von Mach*) gegebenen Anleitung

*) Bezüglich der ziemlich ausgedehnten Literatur muss ich auf meine citirte Abhandlung selbst verweisen, von deren Inhalt, soweit er die Mechanik berührt, übrigens in den Wiedemann'schen Beiblättern ein Referat erschien (Bd. VI, p. 326—327).

anstellte, lassen deutlich die Abweichungen erkennen, welche in der Form der Curve auftreten, jenachdem derselbe ein Central- oder beliebiges Ellipsoid in grösserem oder kleinerem Abstand von der festen Tangentialebene hat rollen lassen. (p. 33).

Von den vorstehenden Sätzen wird der erste, wie gesagt, von allen erwähnten Autoren abgeleitet; der zweite findet sich bei Résal und in einer späteren Note de Sparre's (s. u.). Der dritte Satz dagegen findet sich nirgends richtig ausgesprochen: man hat sich begnügt, zu bestätigen, dass für die Herpolodie eines Nichtcentralellipsoids Wendepunkte auftreten „können". Dies ist zu wenig gesagt: sobald das rollende Ellipsoid ein Nichtcentralellipsoid ist, „müssen" Wendepunkte auftreten.

Was nun die angewandten Beweisführungen betrifft, so liegen denselben bei de St. Germain und Mannheim kinematische bezw. rein geometrische Betrachtungen zu Grunde. Franke und Résal untersuchen die Bedingung, es möge die in Polarcoordinaten gegebene Curve Wendepunkte aufweisen, analytisch, indem ersterer als Veränderliche die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r der Drehung um die Axen des Ellipsoids einführt, letzterer den Ausdruck für den Krümmungsradius mittels des Contingenzwinkels bildet.

Doch scheinen mir diese Verfahren mehr oder minder nur dazu angethan, den bereits gefundenen Satz über das Fehlen von Wendepunkten in der Poinsot'schen Herpolodie noch einmal zu beweisen. Dieselben dürften sich ausser Stande sehen, über die weiteren gestaltlichen Verhältnisse der Herpolodie etwas auszusagen, noch dürfte es den meisten derselben gelingen, die in der Wendepunktsfrage gewonnenen Resultate unmittelbar, ohne Neuanlage, auf die Herpolodie der beiden Hyperboloide zu übertragen. Für diese Zwecke dürfte der sicherste Calcül derjenige sein, welcher mittels der elliptischen Functionen die Zeit t einführt, wie es auch neben Hermite von mir geschehen ist.

Durch Aufstellung der Bedingung, dass der in Polarcoordinaten ausgedrückte Werth des Krümmungsradius unendlich gross werde, fand ich eine cubische Gleichung für $\sin^2 \mathrm{am}\, u$ ($u = \text{const. } t$), deren Wurzeln sofort erkennbar waren. Es ergaben sich nämlich (p. 31 und 32):

$$\text{für } H > B \quad \mathrm{sn}^2 u_1 = \mathrm{sn}^2 u_2 = \frac{H-A}{B-A} \cdot \frac{B}{H}, \quad \mathrm{sn}^2 u_3 = \frac{H-A}{B-A} \cdot \frac{s-B}{s-H};$$

$$\text{für } H < B \quad \mathrm{sn}^2 u_1 = \mathrm{sn}^2 u_2 = \frac{C-H}{C-B} \cdot \frac{B}{H}, \quad \mathrm{sn}^2 u_3 = \frac{C-H}{C-B} \cdot \frac{s-B}{s-H},$$

$$2s = A + B + C.$$

Die Inflexionspunkte, definirt durch den Parameter u_3, sind reell oder imaginär, je nachdem $\mathrm{sn}^2 u_3 \lessgtr$ ist. Ausser den oben gefundenen Theoremen 1, 2, 3 resultirt nun für die

II. Wendepunkte der Herpolodie der Hyperboloide:

5. *In der Herpolodie des einschaligen Hyperboloids können niemals Wendepunkte auftreten, wenn der Abstand der invariablen Ebene vom Mittelpunkte grösser ist als die kleinere der reellen Halbaxen.* (p. 46.)
6. *In der Herpolodie des einschaligen Hyperboloids können, auch wenn dieser Abstand kleiner ist als die mittlere Halbaxe, Wendepunkte nicht erscheinen, wenn der absolute Werth der imaginären Halbaxe grösser ist als die Differenz der reellen Halbaxen* ($[C] > B - A$), *dagegen sind Wendepunkte möglich, sobald die imaginäre Halbaxe kleiner ist* ($[C] < B - A$). (p. 46.)
7. *Die durch das Rollen eines zweischaligen Hyperboloids erzeugte Herpolodie kann nur dann Wendepunkte besitzen, wenn die reelle Halbaxe grösser ist als die Summe der absoluten Grössen der imaginären Halbaxen* ($B > [A] + [C]$), *andernfalls sind Wendepunkte ausgeschlossen.* (p. 46.)

Diese Theoreme hat nachträglich auch de Sparre*) gefunden; dieselben lassen sich auch ohne Anwendung der elliptischen Functionen aus dem Résal'schen Ausdrucke des Krümmungsradius nachweisen.

Was die Werthe $u_1 = u_2$ anlangt, so würden dieselben auf das Zusammenfallen zweier Wendepunkte, also im allgemeinen auf einen Punkt mit vierpunktiger Tangente hinweisen. Da aber der Zähler in dem Ausdrucke für den Krümmungsradius gleichfalls für $u_1 = u_2$ verschwindet — indem nämlich der Radiusvector der Curve hierfür selbst zu Null wird — so sind u_1 und u_2 ausser Betracht zu lassen.

Das Auftreten oder Fehlen von Wendepunkten ist charakteristisch für die Herpolodie eines Nichtcentral- oder eines Centralellipsoids; man könnte, hierauf weiter fussend, auch *Nichtcentral-* und *Centralhyperboloide* unterscheiden, bedingt durch Ungleichungen zwischen den absoluten Grössen der Halbaxen, welche den für die Ellipsoide geltenden ganz analog sind.

Die Beantwortung der Frage nach den Inflexionspunkten der Herpolodie allein kann übrigens nicht geeignet sein, über die Form dieser Curve genauer aufzuklären. Es mögen desshalb die wichtigeren der in meiner Dissertation gefundenen Sätze, welche diese Linie betreffen, hier angereiht und hierdurch einer eventuellen Wiederauffindung entzogen werden.

III. Weitere Eigenschaften der Herpolodie des Ellipsoids.

Das Ellipsoid darf, wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt ist, ein beliebiges sein. Bekanntlich ist die Herpolodie immer zwischen

*) Sur l'herpolodie dans le cas d'une surface du second degré quelconque. Comptes rendus, Bd. 101, p. 370—373.

zwei concentrischen Grenzkreisen, ringförmig, eingeschlossen, deren Umfänge sie abwechselnd berührt; wir nennen das Curvenstück zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Berührungen mit demselben Kreise eine *ganze*, dasjenige zwischen je zwei folgenden Berührpunkten mit verschiedenen Kreisen eine *halbe Welle* (p. 29). Die Kenntniss der letzteren zieht, da dieselben alle symmetrisch liegen, diejenige der Curve selbst nach sich. Es gelten die Sätze:

8. *In den Berührungspunkten mit den Grenzkreisen erreicht die Geschwindigkeit, mit welcher das rollende Ellipsoid die Herpolodie erzeugt, einen extremen Werth: ein Maximum oder Minimum für den äusseren Kreis, je nachdem der Abstand der invariablen Ebene vom Mittelpunkt des Ellipsoids kleiner oder grösser ist als die mittlere Halbaxe des letzteren.* (p. 26).
9. *Treten Wendepunkte auf, ist also das Ellipsoid ein Nichtcentralellipsoid und der Abstand der invariablen Tangentialebene vom Mittelpunkt grösser als die mittlere Halbaxe, so rücken dieselben dem inneren Kreise um so näher, je mehr sich der Abstand der Grösse der mittleren Halbaxe nähert* (p. 33), *bis dieselben für die Erreichung des Grenzfalls im asymptotischen Punkt der Poinsot'schen Spirale* (*s. u.*) *verschwinden.*

Für ein Centralellipsoid ($C < A + B$) treten in der Herpolodie niemals, für ein Nichtcentralellipsoid ($C > A + B$) jedesmal Wendepunkte auf: der Uebergang der einen Curvenart in die andere wird vermittelt durch die Annahme, es möge das Ellipsoid gerade anfangen, Centralellipsoid zu werden. Diess ist der Fall, wenn das grösste Trägheitsmoment gleich ist der Summe der beiden kleineren, $C = A + B$, d. h. wenn der rotirende Körper in eine rotirende unendlich dünne Platte übergegangen ist:

10. *Für ein Ellipsoid, welches gerade noch Centralellipsoid ist, sind die beiden Wendepunkte einer Welle auf den inneren Grenzkreis gerückt und daselbst in einen Punkt mit vierpunktiger Tangente zusammengefallen.*
11. *Der Polarwinkel* Φ, *welcher durch eine Welle der Herpolodie am Centrum gespannt wird, ist für ein beliebig vorliegendes Ellipsoid und einen beliebig vorgegebenen Abstand der Tangentialebene im allgemeinen mit* π *irrational, so dass sich die Curve nicht schliessen kann. Doch genügt eine in gewisser Weise vorzunehmende kleine Abänderung, sowohl der Dimensionen des Ellipsoids, als auch des Abstandes der festen Ebene, um die Curve in sich zurücklaufen zu lassen.* (p. 38, 39.)
12. *Nähert sich das rollende Ellipsoid einem Rotationsellipsoid dadurch, dass die grösste oder kleinste Axe der mittleren gleich zu werden trachtet, so wird* 1. *der Winkel* Φ *einer Welle immer*

grösser; 2. der Ring, innerhalb dessen sich die Curve schlingt, immer schmaler, indem der äussere Grenzkreis dem inneren näher und näher kommt. (p. 49, 51.)

13. *Nähert sich das rollende Ellipsoid einem Rotationsellipsoid dadurch, dass die Länge der mittleren Axe gegen diejenige der grössten oder kleinsten angeht, so können die Winkel Φ sowohl zu- als abnehmen, der Ring wird aber auch diesesmal wieder schmäler, indem nunmehr der innere Grenzkreis mehr und mehr den äusseren zu erreichen sucht.* (p. 49, 50.)
14. *Ist das Ellipsoid in einen Rotationskörper wirklich übergegangen, so haben sich die beiden Grenzkreise erreicht, und die Herpolodie ist mit denselben in einen einzigen Kreis übergegangen. Der Winkel Φ wird aber nicht etwa, wie erwartet werden könnte, unbestimmt oder unendlich gross, sondern erlangt einen ganz bestimmten endlichen Grenzwerth.* (p. 50.)
15. *Die absolute Breite des Ringes, innerhalb dessen die Herpolodie eines beliebigen Ellipsoids verläuft, erreicht ein Minimum, nämlich den Werth 0, wenn der Abstand der invariablen Ebene vom Mittelpunkt gleich ist der grössten oder kleinsten Halbaxe, ein Maximum, wenn dieser Abstand gleich ist der mittleren Halbaxe. In den ersteren Fällen reducirt sich die Curve auf je einen Punkt, im letzteren geht dieselbe über in die Poinsot'sche Spirale, erzeugt durch das Rollen einer Halbellipse.* (p. 18.)
16. *Construirt man zu dieser Spirale die symmetrische, durch das Abrollen der anderen Hälfte der Ellipse entstandenen Spirale, so erhält man eine Doppelspirale, welche eine Fläche einschliesst gleich dem Rechtecke aus den beiden linearen Excentricitäten der um die zwei grössten und die zwei kleinsten Axen des Ellipsoids beschriebenen Ellipsen.* (p. 42.)

Zum Schlusse möchte ich noch erwähnen, dass der *Mangel an Rückkehrpunkten* in der Herpolodie eines eigenen Beweises wohl kaum bedarf, indem der mechanischen Deutung zufolge das Bogenelement der Herpolodie als das abgewickelte Bogenelement der Polodie nicht verschwinden kann.

München, im April 1886.

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

(Bekannt gemacht im Jahresbericht der Gesellschaft, Leipzig im März 1886).

Für das Jahr 1889.

Obgleich durch die Untersuchungen von Borchardt über das arithmetisch-geometrische Mittel ein gewisser Zusammenhang der Thetafunctionen mehrerer Variabeln mit mehrfachen Integralen nachgewiesen worden, und obgleich die Ausdehnung des Abel'schen Theorems auf vielfache algebraische Integrale schon Jacobi nicht unbekannt war*), so scheinen doch selbst die betreffenden Doppelintegrale noch keiner erschöpfenden Betrachtung unterworfen worden zu sein. Da sich nun zeigen lässt, dass wenn z. B. $\vartheta\ \vartheta_1\ \vartheta_2\ \vartheta_3\ \vartheta_4\ \vartheta_5$ gewisse einer sogenannten Rosenhain'schen Gruppe (Crelle's Journal Bd. XL, S. 342) angehörige Thetafunctionen zweier Variabeln u und v bedeuten, die Determinante

$$\begin{vmatrix} \vartheta & \vartheta_1 & \vartheta_2 \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial u} & \frac{\partial\vartheta_1}{\partial u} & \frac{\partial\vartheta_2}{\partial u} \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial v} & \frac{\partial\vartheta_1}{\partial v} & \frac{\partial\vartheta_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

dem Product $\vartheta_3\vartheta_4\vartheta_5$ proportional ist, so ergiebt sich daraus (Leipziger Berichte 1884, S. 187) für $x = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta}\right)^2$, $y = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta}\right)^2$ eine Gleichung von der Form $du\,dv = \frac{dx\,dy}{\sqrt{R(x\,y)}}$. Die Gesellschaft wünscht

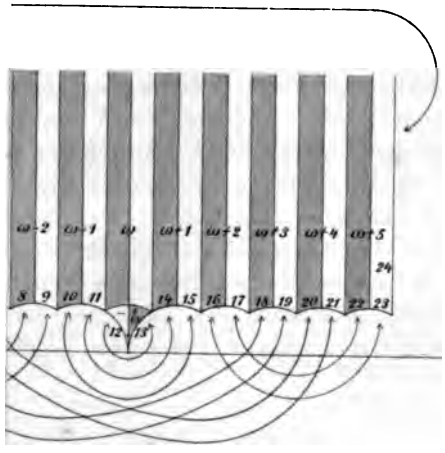
eine eingehende Untersuchung der allgemeineren Doppelintegrale von der Form $\int\int \frac{f(xy)\,dx\,dy}{\sqrt{R(xy)}}$, *wo* f *eine rationale Function sei, in ihrem Zusammenhange mit den Thetafunctionen zweier Variabeln.*

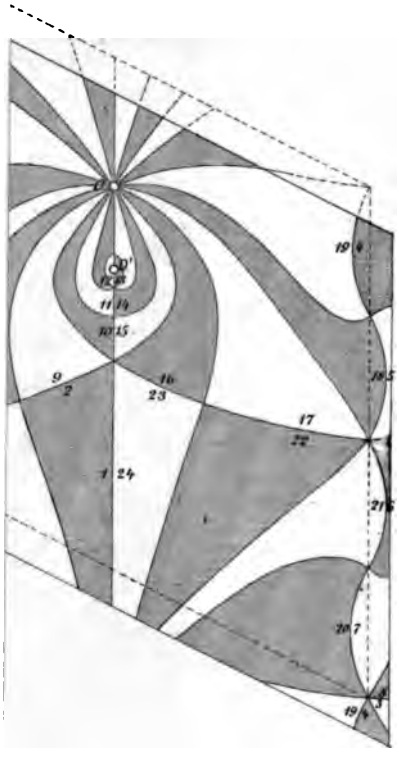
Preis 1000 Mark.

---

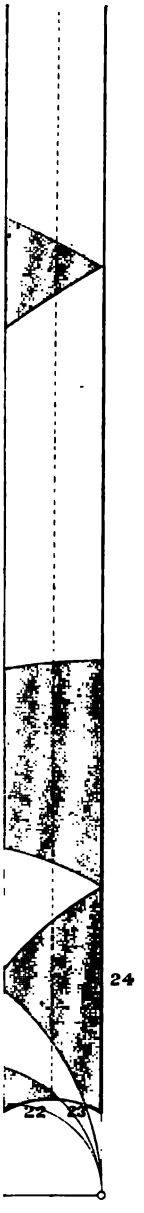
*) Siehe Crelle's Journal Bd. VIII, S. 415, sowie Rosenhain in seinen an Jacobi gerichteten Briefen, Crelle's Journal Bd. XL, wo auch Integrale von der Form $\int\int \frac{dt\,du}{\sqrt{F(t\,u)}}$ betrachtet werden, in denen $F(tu)$ das Product von sechs linearen Factoren $A + Bt + Cu$ ist. Vergl. ferner die Nöther'schen Arbeiten in den Göttinger Nachrichten, 1869 Nr. 15 und Bd. II der Mathemat. Annalen, S. 293.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in *deutscher*, *lateinischer* oder *französischer* Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und *paginirt*, ferner mit einem *Motto* versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem *30. November des angegebenen Jahres*, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.





Lith v Erdbach & Schuster, Leipzig



Lith v Reichelt & Schaefer Leipzig

Ueber das Bildungsgesetz der höheren Differentiale einer Function von Functionen.

Von

Leo Königsberger in Heidelberg.

Bei verschiedenen analytischen Untersuchungen, welche die Reihenentwicklung algebraischer Functionen oder der Integrale algebraischer Differentialgleichungen betreffen, ist es wesentlich, das Bildungsgesetz der Differentialquotienten implicite gegebener Functionen zu ermitteln, und es ist leicht einzusehen, dass wir die allgemeine Form derselben werden bestimmen können, wenn wir die Ausdrücke für die höheren totalen Differentiale einer Function mehrerer Variabeln aufgestellt haben, die sämmtlich wieder Functionen einer unabhängigen Variabeln sind oder, was dasselbe ist, für welche auch die höheren Differentiale berücksichtigt werden müssen. Nun ist freilich die letztere Aufgabe von Herrn Hoppe in seiner Arbeit über die independente Darstellung der Differentialquotienten für den Fall *einer* abhängigen Function auf die Berechnung der Differentialquotienten der Potenzen dieser Function nach der unabhängigen Variabeln genommen zurückgeführt worden, und das allgemeinere Problem für beliebige Functionen von Herrn Most im 4ten Bande der Annalen gelöst worden; ich glaube jedoch mit Rücksicht auf die von mir angewandte und auch sonst benutzbare Methode sowie auf die überaus einfache und übersichtliche Form der Resultate, welche auch in Wirklichkeit weitere Anwendungen gestatten, die nachstehenden Ausführungen veröffentlichen zu dürfen.

Sei

$$t = f(x, y, z, \ldots) \tag{1}$$

gegeben, worin $x, y, z, \ldots$ als Functionen einer Variabeln u betrachtet werden mögen, so sieht man leicht, dass

$$dt = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \cdots\right),$$

$$d^2t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \cdots\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}\,d^2y + \cdots\right),$$

$$d^3t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \cdots\right)^3$$
$$+ 3\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \cdots\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}\,d^2y + \cdots\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,d^3x + \frac{\partial f}{\partial y}\,d^3y + \cdots\right)$$

u. s. w., worin die symbolische Bezeichnung so gewählt ist, dass stets statt der Producte der Differentialquotienten erster Ordnung der entsprechende höhere Differentialquotient zu substituiren ist.

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,d^rx + \frac{\partial f}{\partial y}\,d^ry + \frac{\partial f}{\partial z}\,d^rz + \cdots\right) = P_r, \tag{2}$$

und nehmen an, die durch den Ausdruck

$$d^\varrho t = \sum_{\substack{n_1, n_2 \ldots, n_\varrho > 0 \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + \varrho n_\varrho = \varrho}} \frac{\varrho!}{n_1!\, n_2! \ldots n_\varrho!}\, \frac{1}{(1!)^{n_1}(2!)^{n_2}\ldots(\varrho!)^{n_\varrho}}\, P_1^{n_1} P_2^{n_2} \ldots P_\varrho^{n_\varrho}, \tag{3}$$

gegebene Differentialformel, in welcher $\varkappa! = 1.2.3 \ldots \varkappa$, und $0! = 1$ ist, gelte für $\varrho = 1, 2, 3, \ldots, \varrho$, so soll gezeigt werden, dass sie auch für $\varrho + 1$ besteht und somit, da sie für $\varrho = 1, 2, 3$ nach den obigen Ausdrücken erfüllt war, allgemein gültig ist.

Zum Zwecke des Beweises bemerke ich zunächst, dass wie leicht einzusehen, die oben definirten Symbole die durch die folgenden Beziehungen ausgedrückten Differentiationseigenschaften besitzen,

$$d \cdot P_1^m = P_1^{m+1} + m P_1^{m-1} P_2, \quad d \cdot P_r^m = P_r^m P_1 + m P_r^{m-1} P_{r+1}$$

allgemein

$$\begin{aligned} d \cdot P_1^{n_1} P_2^{n_2} \cdots P_\varrho^{n_\varrho} = {} & P_1^{n_1+1} P_2^{n_2} \cdots P_\varrho^{n_\varrho} + n_1 P_1^{n_1-1} P_2^{n_2+1} P_3^{n_3} \cdots P_\varrho^{n_\varrho} \\ & + n_2 P_1^{n_1} P_2^{n_2-1} P_3^{n_3+1} P_4^{n_4} \cdots P_\varrho^{n_\varrho} + \cdots \\ & + n_\varrho P_1^{n_1} P_2^{n_2} \cdots P_\varrho^{n_\varrho - 1} P_{\varrho+1}, \end{aligned} \tag{4}$$

dass also Symbole wie Potenzen differentiirt werden.

Differentiiren wir nunmehr die als richtig vorausgesetzte Gleichung (3), so ergiebt sich nach (4)

$$\begin{aligned} d^{\varrho+1}t = \sum_{\substack{n_1, n_2 \ldots n_\varrho > 0 \\ n_1 + 2n_2 + \cdots + \varrho n_\varrho = \varrho}} & \frac{\varrho!}{n_1!\, n_2! \ldots n_\varrho!}\, \frac{1}{(1!)^{n_1}(2!)^{n_2}\ldots(\varrho!)^{n_\varrho}} \Big\{ P_1^{n_1+1} P_2^{n_2} \cdots P_\varrho^{n_\varrho} \\ & + n_1 P_1^{n_1-1} P_2^{n_2+1} P_3^{n_3} \cdots P_\varrho^{n_\varrho} + \cdots \\ & + n_\varrho P_1^{n_1} P_2^{n_2} \cdots P_\varrho^{n_\varrho - 1} P_{\varrho+1} \Big\}, \end{aligned}$$

oder wie unmittelbar aus der Form der Indices zu sehen,

$$d^{\varrho+1}t = \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varrho, \nu_{\varrho+1} > 0 \\ 2\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \varrho\nu_\varrho + (\varrho+1)\nu_{\varrho+1} = \varrho+1}} A_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\varrho+1}} P_1^{\nu_1} P_2^{\nu_2} \cdots P_\varrho^{\nu_\varrho} P_{\varrho+1}^{\nu_{\varrho+1}},$$

worin

$$A_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{\varrho+1}} = \frac{\varrho!}{(\nu_1-1)!\,\nu_2!\ldots\nu_\varrho!}\,\frac{1}{(1!)^{\nu_1-1}(2!)^{\nu_2}\ldots(\varrho!)^{\nu_\varrho}}$$

$$+(\nu_1+1)\,\frac{\varrho!}{(\nu_1+1)!\,(\nu_2-1)!\,\nu_3!\ldots\nu_\varrho!}\,\frac{1}{(1!)^{\nu_1+1}(2!)^{\nu_2-1}(3!)^{\nu_3}\ldots(\varrho!)^{\nu_\varrho}}$$

$$+(\nu_2+1)\,\frac{\varrho!}{\nu_1!\,(\nu_2+1)!\,(\nu_3-1)!\,\nu_4!\ldots\nu_\varrho!}\cdot\frac{1}{(1!)^{\nu_1}(2!)^{\nu_2+1}(3!)^{\nu_3-1}(4!)^{\nu_4}\ldots(\varrho!)^{\nu_\varrho}}+\cdots$$

$$+(\nu_{\varrho-1}+1)\,\frac{\varrho!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots(\nu_{\varrho-1}+1)!\,(\nu_\varrho-1)!}\cdot\frac{1}{(1!)^{\nu_1}(2!)^{\nu_2}\ldots(\varrho-1!)^{\nu_{\varrho-1}+1}(\varrho!)^{\nu_\varrho-1}}$$

$$+\nu_{\varrho+1},$$

oder

$$A_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{\varrho+1}} = \frac{\varrho!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_\varrho!\,\nu_{\varrho+1}!}\{\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+\cdots+\varrho\nu_\varrho+(\varrho+1)\nu_{\varrho+1}\}\cdot\frac{1}{(1!)^{\nu_1}(2!)^{\nu_2}\ldots(\varrho!)^{\nu_\varrho}(\varrho+1!)^{\nu_{\varrho+1}}}$$

$$=\frac{(\varrho+1)!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_\varrho!\,\nu_{\varrho+1}!}\,\frac{1}{(1!)^{\nu_1}(2!)^{\nu_2}\ldots(\varrho!)^{\nu_\varrho}(\varrho+1!)^{\nu_{\varrho+1}}},$$

wenn berücksichtigt wird, dass nur in einem Falle vermöge der Gleichung $\nu_1+2\nu_2+\cdots+(\varrho+1)\,\nu_{\varrho+1}=\varrho+1$ die Zahl $\nu_{\varrho+1}$ von Null verschieden ist und in diesem Falle den Werth 1 hat, während $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varrho$ verschwinden, so dass

$$d^{\varrho+1}t=\sum_{\substack{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{\varrho+1}>0\\ \nu_1+2\nu_2+\cdots+(\varrho+1)\nu_{\varrho+1}}}\frac{(\varrho+1)!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_{\varrho+1}!}\,\frac{1}{(1!)^{\nu_1}(2!)^{\nu_2}\ldots(\varrho+1!)^{\nu_{\varrho+1}}}\,P_1^{\nu_1}P_2^{\nu_2}\ldots P_{\varrho+1}^{\nu_{\varrho+1}}$$

wird, und somit die Gültigkeit der obigen Formel für das $\varrho+1^{\text{te}}$ Differential bewiesen ist.

Wir erhalten somit für

$$t=f(x,y,z,\ldots)$$

den Ausdruck für das ϱ^{te} Differential in der Form

$$d^\varrho t=\sum_{\substack{n_1,n_2,\ldots,n_\varrho>0\\ n_1+2n_2+\cdots+\varrho n_\varrho=\varrho}}\frac{\varrho!}{n_1!\,n_2!\ldots n_\varrho!}\,\frac{1}{(1!)^{n_1}(2!)^{n_2}\ldots(\varrho!)^{n_\varrho}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\cdots\right)^{n_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}d^2x+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y+\cdots\right)^{n_2}\cdots\left(\frac{\partial f}{\partial x}d^\varrho x+\frac{\partial f}{\partial y}d^\varrho y+\cdots\right)^{n_\varrho}.$$

Nach Aufstellung dieser Formel ist es aber leicht, das Bildungsgesetz für die Differentiale implicite gegebener Functionen zu ermitteln; denn sei

$$f(x,y)=0 \tag{5}$$

vorgelegt und soll diese Gleichung wiederholt nach x differentiirt werden, so braucht man in dem obigen Ausdrucke nur $t = 0$ zu setzen, ferner $d^2x = d^3x = \cdots = d^\varrho x = 0$ zu nehmen und die Gleichung durch dx^ϱ zu dividiren, *so ergiebt sich als* ϱ^{tes} *Differential von* (5), *wenn der Posten mit* $y^{(\varrho)}$ *abgesondert wird, und zur Abkürzung*

$$(6) \qquad \frac{\varrho!}{n_1!\, n_2! \ldots n_{\varrho-1}!} \cdot \frac{1}{(1!)^{n_1}(2!)^{n_2}\ldots(\varrho-1!)^{n_{\varrho-1}}} = A_{n_1 n_2 \ldots n_{\varrho-1}}$$

gesetzt wird,

$$(7) \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_{\varrho-1} > 0 \\ n_1 + 2n_2 + \cdots + (\varrho-1)n_{\varrho-1} = \varrho}} A_{n_1 n_2 \ldots n_{\varrho-1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)^{n_1} \frac{\partial f^{n_2 + n_3 + \cdots + n_{\varrho-1}}}{\partial y^{n_2 + n_3 + \cdots + n_{\varrho-1}}} y''^{n_2} y'''^{n_3} \ldots y^{(\varrho-1)^{n_{\varrho-1}}} + \frac{\partial f}{\partial y} y^{(\varrho)} = 0.$$

Um noch auf eine der Anwendungen hinzuweisen, welche von der Formel (7) gemacht werden können, werde bemerkt, dass aus der für $\varrho = 2$ geltenden Beziehung, welche mit $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ multiplicirt worden,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 y'' = 0$$

zunächst ersichtlich ist, dass, weil $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$ ist, für eine algebraische Gleichung $f(x, y) = 0$ der Ausdruck $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 y''$ eine ganzzahlige, in x, y und den Coefficienten der Gleichung ganze Function ist; man sieht aber auch weiter leicht ein, dass, weil $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ in jedem ihrer Posten den Factor 2 enthalten, auch

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 \frac{y''}{2!}$$

eine ganze und ganzzahlige Function sein wird. Um nachzuweisen, dass diese Eigenschaft allen Differentialquotienten zukommt, werde angenommen, dass die Ausdrücke

$$\frac{\partial f}{\partial y} y', \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 \frac{y''}{2!}, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^5 \frac{y'''}{3!}, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2\varrho-3} \frac{y^{(\varrho-1)}}{(\varrho-1)!}$$

ganze und ganzzahlige Functionen seien; dann wird, wenn die Gleichung (7) mit $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2\varrho-2}$ multiplicirt und

$$\begin{aligned} \varkappa &= 2\varrho - 2 - [n_1 + 3n_2 + 5n_3 + \cdots + (2\varrho - 3)\, n_{\varrho-1}] \\ &= 2\varrho - 2 - [2\varrho - n_1 - n_2 - n_3 - \cdots - n_{\varrho-1}], \end{aligned}$$

oder

$$\varkappa = (n_1 + n_2 + \cdots + n_{\varrho-1}) - 2$$

gesetzt wird, mit Benutzung der Gleichung (6) sich ergeben

$$(8)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{x} \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_{\varrho-1} > 0 \\ n_1 + 2n_2 + \cdots + (\varrho-1)n_{\varrho-1} = \varrho}} \frac{1}{n_1!\, n_2! \ldots n_{\varrho-1}!} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{n_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)^{n_1} \cdot \frac{\partial^{n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1} f}}{\partial y^{n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1}}} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{3} \frac{y''}{2!}\right]^{n_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{5} \frac{y'''}{3!}\right]^{n_3} \cdots \cdots \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2\varrho-3} \frac{y^{(\varrho-1)}}{(\varrho-1)!}\right]^{n_{\varrho-1}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2\varrho-1} \frac{y^{(\varrho)}}{\varrho!} = 0.$$

Da nun aber die durch das Symbol eingeführten Ausdrücke

$$\frac{n_1(n_1-1)\cdots(n_1-\alpha+1)}{1\cdot 2\cdots\alpha} \frac{\partial^{n_1+n_2+\cdots+n_{\varrho-1} f}}{\partial x^{n_1-\alpha} \partial y^{n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1}+\alpha}},$$

in welcher α jede ganze Zahl $0, 1, \ldots, n_1$ bedeuten darf, wie leicht durch Verschiebung von $\alpha!$ zu sehen, in jedem ihrer Posten durch

$$n_1!(n_2 + n_3 + \cdots + n_{\varrho-1})!$$

theilbar sind, so wird jeder der Posten der in (8) stehenden Summe den numerischen Factor

$$\frac{(n_2 + n_3 + \cdots + n_{\varrho-1})!}{n_2!\, n_3! \cdots n_{\varrho-1}!}$$

besitzen, welcher bekanntlich eine ganze Zahl ist, und da die eckigen Klammern der Voraussetzung gemäss ganzzahlige numerische Factoren besitzen, so erhalten wir den Satz:

dass für jede durch die algebraische Gleichung $f(x, y) = 0$ definirte algebraische Function der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2\varrho-1} \frac{y^{(\varrho)}}{\varrho!}$$

eine ganzzahlige, in x, y und den Coefficienten der Gleichung ganze Function ist.

Hieraus kann man den von Eisenstein in den Monatsberichten der Berliner Akademie (Juli 1852) aufgestellten wichtigen Satz von der Eigenschaft der Potenzentwicklung algebraischer Functionen, den Heine im 48ten Bande des Crelle'schen Journals und Hermite im 7ten Bande der Proceedings of the London Mathematical Society (1876) bewiesen haben, leicht herleiten.

Heidelberg, im Mai 1886.

Ueber die rollende Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Horizontalebene unter dem Einfluss der Schwere.

(Aus den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. October 1885.)

Von

C. Neumann in Leipzig.

Es sei gegeben ein starrer Körper von überall convexer Oberfläche, wie z. B. eine Kugel oder ein Ellipsoid. Dieser Körper mag, unter dem Einfluss der *Schwere*, in Bewegung begriffen sein auf einer festen Horizontalebene, der Art, dass er mit dieser Ebene beständig in Contact bleibt. Während dieser Bewegung werden alsdann im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick *andere* und *andere* Oberflächenpunkte des Körpers mit der Horizontalebene in Contact kommen; doch wird vielleicht auch der Fall eintreten können, dass *ein und derselbe* Oberflächenpunkt längere Zeit hindurch mit jener Ebene in Contact verharrt.

Sind $t - dt$, t, $t + dt$ drei aufeinander folgende Zeitaugenblicke, und betrachtet man dasjenige Oberflächen-Molekül A, welches zur Zeit t mit der Horizontalebene in Contact ist, so wird dasselbe zur Zeit $t - dt$ entweder *oberhalb* oder *in* dieser Ebene sich befunden haben, und zur Zeit $t + dt$ von Neuem *oberhalb* oder *in* dieser Ebene gelegen sein. Die *vertikal nach Oben* gerichtete Geschwindigkeitscomponente des Moleküls A wird daher kurz *vor* dem Augenblick t

negativ oder Null,

und kurz *nach* dem Augenblick t

positiv oder Null

sein. Hieraus aber folgt (weil die Bewegung, ihrer Natur nach, eine continuirliche sein muss), dass die genannte Componente im Augenblick t nothwendig $= 0$ ist.

Das Oberflächen-Molekül A kann daher in dem Augenblick t, wo es die Horizontalebene berührt, nur noch eine *horizontale* Geschwindigkeit, also nur noch eine längs dieser Ebene *hingleitende* Bewegung besitzen. Diese horizontale Geschwindigkeit des Moleküls A wird aber

ebenfalls $= 0$ sein, *sobald man annimmt, dass gleitende Bewegungen, in Folge einer gewissen zwischen Körper und Horizontalebene stattfindenden Reibung niemals eintreten können.*

Diese Annahme wollen wir in der That machen. Alsdann wird also das Molekül A in dem Augenblick, wo es die Horizontalebene berührt, weder eine *verticale*, noch auch eine *horizontale* Geschwindigkeitscomponente besitzen, folglich *in Ruhe* sein. Die Bewegung des *Körpers selbst* besteht daher in diesem Augenblick in einer Drehung um irgend welche durch A gehende Axe. Auch bedarf es kaum noch der Bemerkung, dass diese *instantane Drehungsaxe* im Allgemeinen *schräge* liegen wird, dass sie nur ausnahmsweise vertical oder vielleicht auch horizontal sein kann.

Wenn in der Ueberschrift dieses Aufsatzes von einer *rollenden* Bewegung des Körpers die Rede ist, so soll dadurch angedeutet sein, dass zwischen dem Körper und der Horizontalebene eine gewisse *Reibung* stattfindet, und dass in Folge dieser Reibung das Eintreten irgend welcher *gleitenden* Bewegung als *absolut unmöglich* zu denken ist.

§ 1.

Die anzuwendenden Coordinaten.

Es seien 1, 2, 3 die durch den *Schwerpunkt* σ des Körpers gehenden *Hauptträgheitsaxen*. Ferner sei A ein beliebiger Punkt auf der Körperoberfläche, und α die in A auf dieser Oberfläche errichtete *innere* Normale. Ueberdies mögen die Coordinaten von A und die Richtungscosinus von α in Bezug auf das Axensystem 1, 2, 3 mit A_1, A_2, A_3 und α_1, α_2, α_3 bezeichnet sein.

Denkt man sich die Lage des Punktes A auf der Körperoberfläche durch seine (Gauss'schen) *Flächencoordinaten* p, q bestimmt, so sind A_1, A_2, A_3 und α_1, α_2, α_3 *Functionen* von p, q:

$$(1)\qquad \begin{aligned} A_1 &= F_1(p, q), & \alpha_1 &= f_1(p, q),\\ A_2 &= F_2(p, q), & \alpha_2 &= f_2(p, q),\\ A_3 &= F_3(p, q), & \alpha_3 &= f_3(p, q). \end{aligned}$$

Und zwar werden diese Functionen *völlig bestimmte, gegebene* Functionen sein. Denn wir nehmen an, dass der Körper selbst in bestimmter Weise gegeben ist, und dass überdies auch das System der Flächencoordinaten p, q und die Richtungen der Trägheitsaxen 1, 2, 3 in bestimmter Weise festgesetzt sind.

Ist der Körper eine *homogene Kugel*, also sein Schwerpunkt σ identisch mit dem Kugelcentrum, so werden als Axen 1, 2, 3 irgend drei aufeinander senkrechte Kugelradien zu wählen sein. In diesem Fall kann man

zu Flächencoordinaten p, q die gewöhnlichen Polarcoordinaten nehmen, indem man etwa unter p den Winkel des nach A gehenden Radius σA gegen die Axe 1, ferner unter q den Winkel der Ebene $1\sigma A$ gegen die Ebene $1\sigma 2$ versteht. Alsdann erhalten die Formeln (1) die Gestalt:

$$\begin{aligned} A_1 &= R\cos p, & \alpha_1 &= -\cos p, \\ A_2 &= R\sin p\cos q, & \alpha_2 &= -\sin p\cos q, \\ A_3 &= R\sin p\sin q, & \alpha_3 &= -\sin p\sin q, \end{aligned}$$

wo R den Kugelradius vorstellt.

Aus (1) folgt sofort, dass $\frac{\partial A_1}{\partial p}$, $\frac{\partial A_2}{\partial p}$, $\frac{\partial A_3}{\partial p}$ proportional sind mit den Richtungscosinus einer die Körperoberfläche im Punkte $A(A_1, A_2, A_3)$ *tangirenden* geraden Linie. Demgemäss ergiebt sich:

$$\alpha_1 \frac{\partial A_1}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial A_2}{\partial p} + \alpha_3 \frac{\partial A_3}{\partial p} = 0. \tag{2a}$$

Desgleichen erhält man:

$$\alpha_1 \frac{\partial A_1}{\partial q} + \alpha_2 \frac{\partial A_2}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial A_3}{\partial q} = 0. \tag{2b}$$

Hieraus folgt weiter:

$$\alpha_1\left(\frac{\partial A_1}{\partial p}\,dp + \frac{\partial A_1}{\partial q}\,dq\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial A_2}{\partial p}\,dp + \frac{\partial A_2}{\partial q}\,dq\right) + \alpha_3\left(\frac{\partial A_3}{\partial p}\,dp + \frac{\partial A_3}{\partial q}\,dq\right) = 0, \tag{2c}$$

oder einfacher geschrieben:

$$\alpha_1 dA_1 + \alpha_2 dA_2 + \alpha_3 dA_3 = 0. \tag{2d}$$

Dabei repräsentiren dp, dq *beliebig* zu wählende unendlich kleine Zuwüchse.

Ausser dem mit dem Körper verbundenen und mit ihm sich bewegenden Axensystem 1, 2, 3 mag noch ein zweites, und zwar *unbewegliches* Axensystem x, y, z eingeführt sein. Die yz-Ebene mag zusammenfallen mit der gegebenen Horizontalebene, und die x-Axe vertical *nach Oben* gerichtet sein. Markirt man nun auf der Körperoberfläche irgend einen Punkt (p, q), ferner auf der Horizontalebene irgend einen Punkt (y, z), und verlangt man, dass diese beiden Punkte mit einander *zusammenfallen* sollen, und dass daselbst zwischen Körper- und Horizontalebene *Berührung* stattfinden solle, dass mithin die in (p, q) auf der Körperoberfläche errichtete innere Normale α parallel sein solle mit der x-Axe, — so wird hierdurch die Position des Körpers bestimmt sein, bis auf eine noch mögliche Rotation um die Normale α. Zur *vollständigen* Positionsbestimmung wird daher, ausser der Angabe von p, q, y, z, noch die Angabe irgend eines *fünften Argumentes* erforderlich sein.

Ein solches fünftes Argument bietet sich nicht gut dar. Gewissermassen als *Surrogat* für dasselbe werden wir im Folgenden ein (noch näher anzugebendes) *unvollständiges Differential* $d\Phi$ oder vielmehr den zugehörigen *unvollständigen Differentialquotienten* $\frac{d\Phi}{dt}$ einführen, und zwar der Art, dass dieses $\frac{d\Phi}{dt}$ nichts Anderes ist als die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Normale α. Demgemäss wird z. B. die *lebendige Kraft* T des Körpers nur abhängen von p, q, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ und $\frac{d\Phi}{dt}$:

$$T = T\left(p, q, \frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{d\Phi}{dt}\right); \tag{3}$$

wie solches im dritten Paragraphen näher dargelegt werden soll.

Was ferner die von der Schwere herrührende *Kräftefunction* U betrifft, so ist offenbar:

$$U = -Mgx_\sigma, \tag{4}$$

wo g die Intensität der Schwere, M die Masse des Körpers, und x_σ die x-Coordinate des Körperschwerpunktes σ vorstellen. Man übersieht sofort, dass x_σ durch Angabe desjenigen Oberflächenpunktes (p, q), der augenblicklich mit der Horizontalebene in Berührung sein soll, vollständig bestimmt ist. Demgemäss kann also x_σ, mithin auch U, nur von p, q abhängen:

$$U = U(p, q). \tag{5}$$

Uebrigens ist diese Function $U(p, q)$ sofort angebbar. Man erhält nämlich $x_\sigma = -(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3)$, also auch (4):

$$U = Mg(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3), \tag{5a}$$

wo A_1, A_2, A_3 und α_1, α_2, α_3 die in (1) genannten *gegebenen* Functionen von p, q vorstellen.

§ 2.

Allgemeine Formeln für die Bewegung des Körpers.

Betrachtet man irgend ein Molekül m des in Bewegung begriffenen Körpers, und bezeichnet man seine Coordinaten nach den Axen 1, 2, 3 und x, y, z mit l_1, l_2, l_3 und x, y, z, so finden die Relationen statt:

$$\begin{cases} x = x_\sigma + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3, \\ y = y_\sigma + \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3, \\ z = z_\sigma + \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3, \end{cases} \tag{6}$$

wo x_σ, y_σ, z_σ die Coordinaten des Schwerpunkts σ bezeichnen, während die α, β, γ die Richtungscosinus der Trägheitsaxen 1, 2, 3

gegen die festen Axen x, y, z vorstellen. Dabei haben alsdann α_1, α_2, α_3 genau dieselbe Bedeutung wie früher in (1). Denn die Richtung der x-Axe und die Richtung der im augenblicklichen Contactpunkt A errichteten *inneren Oberflächennormale* α sind unter einander identisch. Aus (6) ergeben sich durch Differentiation nach der Zeit die Formeln:

$$x' = x_\sigma' + \alpha_1' l_1 + \alpha_2' l_2 + \alpha_3' l_3,$$
$$y' = \text{etc.}$$

oder, was dasselbe ist, die Formeln:

$$(7)\quad \begin{cases} u = u_\sigma + \alpha_1' l_1 + \alpha_2' l_2 + \alpha_3' l_3, \\ v = v_\sigma + \beta_1' l_1 + \beta_2' l_2 + \beta_3' l_3, \\ w = w_\sigma + \gamma_1' l_1 + \gamma_2' l_2 + \gamma_3' l_3, \end{cases}$$

wo u, v, w und u_σ, v_σ, w_σ die Geschwindigkeiten von m und σ vorstellen, während die Accente Differentiationen nach der Zeit andeuten.

Bringt man die Formeln (6), (7) nicht auf ein *beliebiges* Körpermolekül $m(l_1, l_2, l_3)$, sondern speciell auf *dasjenige* Molekül $A(A_1, A_2, A_3)$ in Anwendung, welches augenblicklich die Contactstelle repräsentirt, so ergeben sich für die Coordinaten x_A, y_A, z_A und die Geschwindigkeitscomponenten u_A, v_A, w_A dieses Moleküls folgende Ausdrücke:

$$(8)\quad \begin{cases} x_A = x_\sigma + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3, \\ y_A = y_\sigma + \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3, \\ z_A = z_\sigma + \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} u_A = u_\sigma + \alpha_1' A_1 + \alpha_2' A_2 + \alpha_3' A_3, \\ v_A = v_\sigma + \beta_1' A_1 + \beta_2' A_2 + \beta_3' A_3, \\ w_A = w_\sigma + \gamma_1' A_1 + \gamma_2' A_2 + \gamma_3' A_3. \end{cases}$$

Diese Formeln mögen sich auf den Augenblick t beziehen. Im nächstfolgenden Augenblick $t + dt$ hat der Körper bereits eine etwas andere Lage. Statt des Oberflächenmoleküls (A_1, A_2, A_3) wird alsdann bereits ein benachbartes Oberflächenmolekül $(A_1 + dA_1, A_2 + dA_2, A_3 + dA_3)$ mit der Horizontalebene in Contact getreten sein. Auch werden alsdann die x_σ, y_σ, z_σ und α, β, γ bereits etwas andere Werthe: $x_\sigma + dx_\sigma$, $y_\sigma + dy_\sigma$, $z_\sigma + dz_\sigma$ und $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ angenommen haben. Bezeichnet man also die Coordinaten der *Contactstelle* in diesem zweiten Augenblick $t + dt$ mit $x_A + \delta x_A$, $y_A + \delta y_A$, $z_A + \delta z_A$, so ergiebt sich aus (8):

$$(10)\quad \begin{cases} \delta x_A = (dx_\sigma + A_1 d\alpha_1 + A_2 d\alpha_2 + A_3 d\alpha_3) + (\alpha_1 dA_1 + \alpha_2 dA_2 + \alpha_3 dA_3), \\ \delta y_A = (dy_\sigma + A_1 d\beta_1 + A_2 d\beta_2 + A_3 d\beta_3) + (\beta_1 dA_1 + \beta_2 dA_2 + \beta_3 dA_3), \\ \delta z_A = (dz_\sigma + A_1 d\gamma_1 + A_2 d\gamma_2 + A_3 d\gamma_3) + (\gamma_1 dA_1 + \gamma_2 dA_2 + \gamma_3 dA_3), \end{cases}$$

wobei zu bemerken ist, dass

(10a) $$\delta x_A = 0$$

sein muss, weil die Contactstelle stets auf der yz-Ebene liegt. Beachtet man nun aber, dass nicht nur $\delta x_A = 0$, sondern [zufolge (2d)] auch $\alpha_1 dA_1 + \alpha_2 dA_2 + \alpha_3 dA_3 = 0$ ist, so reducirt sich die erste der Formeln (10) auf:

$$dx_\sigma + A_1 d\alpha_1 + A_2 d\alpha_2 + A_3 d\alpha_3 = 0.$$

Hieraus folgt, falls man durch dt dividirt:

$$u_\sigma + A_1 \alpha_1' + A_2 \alpha_2' + A_3 \alpha_3' = 0,$$

also nach (9):

(11) $$u_A = 0.$$

Diese Gleichung (11) sagt aus, dass die Geschwindigkeit (u_A, v_A, w_A) des an der Contactstelle befindlichen Moleküls *horizontal* ist. Eine horizontale Geschwindigkeit kann aber dieses Molekül, weil gleitende Bewegungen (nach unserer Voraussetzung) unmöglich sind, niemals besitzen. Folglich wird dieses Molekül augenblicklich *in Ruhe* sein, mithin den Formeln entsprechen:

(12) $$u_A = 0, \quad v_A = 0, \quad w_A = 0;$$

wie solches bereits früher (S. 479) auf etwas einfachere Weise constatirt wurde.

Die Gleichungen (12) erhalten, falls man für u_A, v_A, w_A ihre Werthe (9) substituirt, folgende Gestalt:

(13) $$\begin{aligned} u_\sigma + \alpha_1' A_1 + \alpha_2' A_2 + \alpha_3' A_3 &= 0, \\ v_\sigma + \beta_1' A_1 + \beta_2' A_2 + \beta_3' A_3 &= 0, \\ w_\sigma + \gamma_1' A_1 + \gamma_2' A_2 + \gamma_3' A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Hierdurch reduciren sich die Formeln (10), (10a) auf:

(14) $$\begin{aligned} 0 = \delta x_A &= \alpha_1 dA_1 + \alpha_2 dA_2 + \alpha_3 dA_3, \\ \delta y_A &= \beta_1 dA_1 + \beta_2 dA_2 + \beta_3 dA_3, \\ \delta z_A &= \gamma_1 dA_1 + \gamma_2 dA_2 + \gamma_3 dA_3; \end{aligned}$$

und hieraus folgt z. B.:

(14a) $$\sqrt{(\delta y_A)^2 + (\delta z_A)^2} = \sqrt{(dA_1)^2 + (dA_2)^2 + (dA_3)^2},$$

eine Formel, die *a priori* zu erwarten stand. Denn beide Seiten der Formel repräsentiren die Verrückung der Contactstelle während der Zeit dt, nur mit dem Unterschiede, dass diese Verrückung das eine Mal auf der Horizontalebene, das andere Mal auf der Körperoberfläche gemessen ist.

Es erscheint angemessen, hier noch einige Bemerkungen zuzufügen hinsichtlich der Richtungscosinus α, β, γ. — Wir setzen voraus, dass

die Axensysteme x, y, z und 1, 2, 3 beide *positiv* sind. Alsdann ist bekanntlich:

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1,$$

und folglich:

$$(16)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2, \\ \beta_1 = \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2, \\ \gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 = \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3, \\ \beta_2 = \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3, \\ \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, \\ \beta_3 = \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1, \\ \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \end{cases}$$

Wir wollen ferner unter $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, $d\Omega_3$ und Ω_1', Ω_2', Ω_3' folgende *unvollständige* Differentiale und *unvollständige* Differentialquotienten verstehen:

$$(17)\quad \begin{cases} d\Omega_1 = \alpha_3 d\alpha_2 + \beta_3 d\beta_2 + \gamma_3 d\gamma_2, \\ d\Omega_2 = \alpha_1 d\alpha_3 + \beta_1 d\beta_3 + \gamma_1 d\gamma_3, \\ d\Omega_3 = \alpha_2 d\alpha_1 + \beta_2 d\beta_1 + \gamma_2 d\gamma_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \Omega_1' = \alpha_3\alpha_2' + \beta_3\beta_2' + \gamma_3\gamma_2', \\ \Omega_2' = \alpha_1\alpha_3' + \beta_1\beta_3' + \gamma_1\gamma_3', \\ \Omega_3' = \alpha_2\alpha_1' + \beta_2\beta_1' + \gamma_2\gamma_1'. \end{cases}$$

Alsdann ist z. B.:

$$\begin{aligned} &\alpha_1\alpha_1' + \beta_1\beta_1' + \gamma_1\gamma_1' = 0, \\ &\alpha_2\alpha_1' + \beta_2\beta_1' + \gamma_2\gamma_1' = \Omega_3', \\ &\alpha_3\alpha_1' + \beta_3\beta_1' + \gamma_3\gamma_1' = -\Omega_2'. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit α_1, α_2, α_3 oder mit β_1, β_2, β_3 oder mit γ_1, γ_2, γ_3, und addirt jedesmal, so erhält man die erste Colonne des folgenden Formelsystems:

$$(18)\quad \begin{cases} \alpha_1' = \alpha_2\Omega_3' - \alpha_3\Omega_2', \\ \beta_1' = \beta_2\Omega_3' - \beta_3\Omega_2', \\ \gamma_1' = \gamma_2\Omega_3' - \gamma_3\Omega_2', \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2' = \alpha_3\Omega_1' - \alpha_1\Omega_3', \\ \beta_2' = \beta_3\Omega_1' - \beta_1\Omega_3', \\ \gamma_2' = \gamma_3\Omega_1' - \gamma_1\Omega_3', \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_3' = \alpha_1\Omega_2' - \alpha_2\Omega_1', \\ \beta_3' = \beta_1\Omega_2' - \beta_2\Omega_1', \\ \gamma_3' = \gamma_1\Omega_2' - \gamma_2\Omega_1', \end{cases}$$

dessen zweite und dritte Colonne sich in analoger Weise ergeben. Aus diesen Formeln (18) folgt durch Quadraterhebung resp. durch Multiplication sofort:

$$(19)\quad \begin{cases} \alpha_1'^2 + \beta_1'^2 + \gamma_1'^2 = \Omega_2'^2 + \Omega_3'^2, \\ \alpha_2'^2 + \beta_2'^2 + \gamma_2'^2 = \Omega_3'^2 + \Omega_1'^2, \\ \alpha_3'^2 + \beta_3'^2 + \gamma_3'^2 = \Omega_1'^2 + \Omega_2'^2, \\ \alpha_2'\alpha_3' + \beta_2'\beta_3' + \gamma_2'\gamma_3' = -\Omega_2'\Omega_3', \\ \alpha_3'\alpha_1' + \beta_3'\beta_2' + \gamma_3'\gamma_1' = -\Omega_3'\Omega_1', \\ \alpha_1'\alpha_2' + \beta_1'\beta_2' + \gamma_1'\gamma_2' = -\Omega_1'\Omega_2'. \end{cases}$$

Multiplicirt man ferner die erste Horizontale des Formelsystems (16) mit Ω_1', Ω_2', Ω_3' und addirt, so erhält man:

$$\alpha_1\Omega_1' + \alpha_2\Omega_2' + \alpha_3\Omega_3' = \beta_1(\gamma_2\Omega_3' - \gamma_3\Omega_2') + \beta_2(\gamma_3\Omega_1' - \gamma_1\Omega_3') + \beta_3(\gamma_1\Omega_2' - \gamma_2\Omega_1'),$$

also mit Rücksicht auf die letzte Horizontale des Systems (18)

$$= \beta_1\gamma_1' + \beta_2\gamma_2' + \beta_3\gamma_3'.$$

In dieser und ähnlicher Weise erhält man im Ganzen folgende drei Formeln:

$$(20)\quad \begin{cases} \alpha_1\Omega_1' + \alpha_2\Omega_2' + \alpha_3\Omega_3' = \beta_1\gamma_1' + \beta_2\gamma_2' + \beta_3\gamma_3', \\ \beta_1\Omega_1' + \beta_2\Omega_2' + \beta_3\Omega_3' = \gamma_1\alpha_1' + \gamma_2\alpha_2' + \gamma_3\alpha_3', \\ \gamma_1\Omega_1' + \gamma_2\Omega_2' + \gamma_3\Omega_3' = \alpha_1\beta_1' + \alpha_2\beta_2' + \alpha_3\beta_3'. \end{cases}$$

§ 3.

Berechnung der lebendigen Kraft.

Hält man fest an den im vorhergehenden Paragraph eingeführten Bezeichnungen, so ergiebt sich für die *lebendige Kraft* T des Körpers die Formel:

$$2T = \Sigma m(u^2 + v^2 + w^2).$$

Diese Formel kann, falls man für u, v, w die Werthe (7) substituirt, und dabei die bekannten Relationen

$$\Sigma m = M, \quad \Sigma m l_1 = \Sigma m l_2 = \Sigma m l_3 = 0,$$
$$\Sigma m l_2 l_3 = \Sigma m l_3 l_1 = \Sigma m l_1 l_2 = 0$$

beachtet, auch so geschrieben werden:

$$2T = (u_\sigma^2 + v_\sigma^2 + w_\sigma^2) M + (\alpha_1'^2 + \beta_1'^2 + \gamma_1'^2) \Sigma m l_1^2 + (\alpha_2'^2 + \beta_2'^2 + \gamma_2'^2) \Sigma m l_2^2 + (\alpha_3'^2 + \beta_3'^2 + \gamma_3'^2) \Sigma m l_3^2,$$

also mit Rücksicht auf (19) auch so:

$$2T = (u_\sigma^2 + v_\sigma^2 + w_\sigma^2) M + (\Omega_2'^2 + \Omega_3'^2) \Sigma m l_1^2 + (\Omega_3'^2 + \Omega_1'^2) \Sigma m l_2^2 + (\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2) \Sigma m l_3^2,$$

oder, was dasselbe ist, auch so:

$$(21)\quad 2T = M(u_\sigma^2 + v_\sigma^2 + w_\sigma^2) + \mathsf{M}_1\Omega_1'^2 + \mathsf{M}_2\Omega_2'^2 + \mathsf{M}_3\Omega_3'^2,$$

wo die Grössen

$$(22)\quad \mathsf{M}_1 = \Sigma m(l_2^2 + l_3^2), \quad \mathsf{M}_2 = \Sigma m(l_3^2 + l_1^2), \quad \mathsf{M}_3 = \Sigma m(l_1^2 + l_2^2)$$

die den Axen 1, 2, 3 entsprechenden *Hauptträgheitsmomente* des Körpers bezeichnen, während M seine *Masse* vorstellt.

Nun ist nach (13):

$$-u_\sigma = \alpha_1' A_1 + \alpha_2' A_2 + \alpha_3' A_3,$$
$$-v_\sigma = \beta_1' A_1 + \beta_2' A_2 + \beta_3' A_3,$$
$$-w_\sigma = \gamma_1' A_1 + \gamma_2' A_2 + \gamma_3' A_3,$$

also mit Rücksicht auf (19):

$$u_\sigma^2+v_\sigma^2+w_\sigma^2=(\Omega_2'^2+\Omega_3'^2)A_1^2+(\Omega_3'^2+\Omega_1'^2)A_2^2+(\Omega_1'^2+\Omega_2'^2)A_3^2 \\ -2\Omega_2'\Omega_3'A_2A_3-2\Omega_3'\Omega_1'A_3A_1-2\Omega_1'\Omega_2'A_1A_2,$$

oder, was dasselbe ist:

$$u_\sigma^2+v_\sigma^2+w_\sigma^2=(A_1^2+A_2^2+A_3^2)(\Omega_1'^2+\Omega_2'^2+\Omega_3'^2) \\ -(A_1\Omega_1'+A_2\Omega_2'+A_3\Omega_3')^2.$$

Dies in (21) substituirt, ergiebt sich:

$$(23)\quad 2T=M(A_1^2+A_2^2+A_3^2)(\Omega_1'^2+\Omega_2'^2+\Omega_3'^2) \\ -M(A_1\Omega_1'+A_2\Omega_2'+A_3\Omega_3')^2+\mathsf{M}_1\Omega_1'^2+\mathsf{M}_2\Omega_2'^2+\mathsf{M}_3\Omega_3'^2.$$

Es handelt sich darum, diesen Ausdruck der lebendigen Kraft auf die in (3) *genannte Form zu bringen.* Und hiezu wird, weil A_1, A_2, A_3 [vgl. (1)] gegebene Functionen von p, q sind, nur noch erforderlich sein, zu zeigen, dass Ω_1', Ω_2', Ω_3' ausdrückbar sind durch p, q, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{d\Phi}{dt}$, wobei allerdings das $\frac{d\Phi}{dt}$ seine Definition noch erst erwartet. Um nun den Ausdruck (23) in jene in (3) genannte Form zu versetzen, beginnen wir mit folgenden einfachen Betrachtungen.

Für jedwedes Zeitelement dt sind $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, $d\Omega_3$ definirt durch die Formeln (17). Wir wollen nun irgendwo im Raume ein *Linienelement* $d\Omega$ uns vorstellen, welches seiner *Richtung* und *Länge* nach den Formeln entspricht:

$$(24)\quad \begin{cases} d\Omega_1=d\Omega\cos(d\Omega,\,1), \\ d\Omega_2=d\Omega\cos(d\Omega,\,2), \\ d\Omega_3=d\Omega\cos(d\Omega,\,3). \end{cases}$$

Dabei sollen 1, 2, 3 die Richtungen der Hauptträgheitsaxen zur Zeit t, d. i. zu *Anfang* des Zeitelementes dt vorstellen. Demgemäss werden alsdann $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, $d\Omega_3$ die *Componenten* des Linienelementes $d\Omega$ nach jenen Richtungen 1, 2, 3, zu nennen sein.

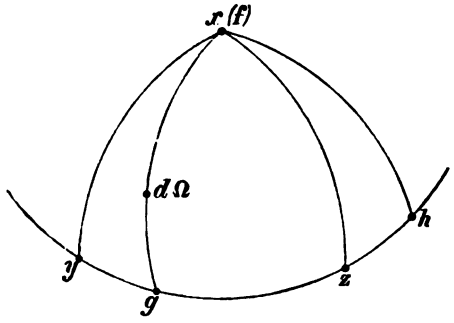
Ueberdies wollen wir, ausser den Axensystemen 1, 2, 3 und x, y, z, noch ein drittes *positives* rechtwinkliges Axensystem f, g, h von vorläufig *beliebiger* Lage einführen. Dabei mögen, der Bequemlichkeit halber, alle in Betracht kommenden Richtungen: $d\Omega$, 1, 2, 3, x, y, z, f, g, h von *ein und demselben* Raumpunkt ausgehend gedacht werden. Um diesen Punkt, als Centrum, sei eine Kugelfläche vom Radius *Eins* beschrieben; sodass also die genannten zehn Richtungen durch ebenso viele Punkte auf dieser Kugelfläche angedeutet werden können.

Bezeichnet man die Componenten des Linienelementes $d\Omega$ nach den Axen f, g, h mit $d\Omega_f$, $d\Omega_g$, $d\Omega_h$, so ist offenbar:

$$
\begin{aligned}
d\Omega_1 &= f_1 d\Omega_f + g_1 d\Omega_g + h_1 d\Omega_h, \\
d\Omega_2 &= f_2 d\Omega_f + g_2 d\Omega_g + h_2 d\Omega_h, \\
d\Omega_3 &= f_3 d\Omega_f + g_3 d\Omega_g + h_3 d\Omega_h,
\end{aligned} \tag{25}
$$

wo f_1, f_2, f_3 die Richtungscosinus der Axe f in Bezug auf 1, 2, 3 vorstellen, und g_1, g_2, g_3 und h_1, h_2, h_3 die analogen Bedeutungen haben für die Axen g und h. Disponirt man jetzt über die Lage des neuen Systems f, g, h in solcher Weise, dass die f-Axe mit der x-Axe zusammenfällt, und dass ferner das Linienelement $d\Omega$ in die xg-Ebene fällt, so gewinnt unsere auf der Kugelfläche gedachte Figur folgendes Aussehen:

(26)



Hier ist z. B. unter $d\Omega$ derjenige *Punkt* der Kugelfläche zu verstehen, durch welchen die Richtung des Linienelements $d\Omega$ dargestellt wird.

Bezeichnet man also die Componenten des Linienelementes $d\Omega$ nach den *gegenwärtigen*, in (26) angegebenen Axen x, g, h mit $d\Phi$, $d\Theta$, $d\mathsf{H}$, so wird $d\mathsf{H} = 0$ sein, weil die h-Axe senkrecht gegen die xg-Ebene, mithin auch senkrecht gegen $d\Omega$ ist. Demgemäss nehmen die Formeln (25) gegenwärtig die Gestalt an:

$$
\begin{cases}
d\Omega_1 = \alpha_1 d\Phi + g_1 d\Theta, \\
d\Omega_2 = \alpha_2 d\Phi + g_2 d\Theta, \\
d\Omega_3 = \alpha_3 d\Phi + g_3 d\Theta,
\end{cases} \tag{27}
$$

wo α_1, α_2, α_3 (ebenso wie früher) die Richtungscosinus der x-Axe in Bezug auf 1, 2, 3 vorstellen. Aus (27) folgt sofort:

$$
\begin{cases}
\alpha_1 d\Omega_1 + \alpha_2 d\Omega_2 + \alpha_3 d\Omega_3 = d\Phi, \\
g_1 d\Omega_1 + g_2 d\Omega_2 + g_3 d\Omega_3 = d\Theta, \\
h_1 d\Omega_1 + h_2 d\Omega_2 + h_3 d\Omega_3 = 0;
\end{cases} \tag{28}
$$

und die *erste* dieser Formeln (28) gewinnt mit Rücksicht auf (20) die Gestalt:

$$
d\Phi = \beta_1 d\gamma_1 + \beta_2 d\gamma_2 + \beta_3 d\gamma_3. \tag{29}
$$

Dies ist die *Definition* des einzuführenden Differentials $d\Phi$, von welchem bereits in (3) die Rede war.

Die h-Axe steht senkrecht gegen x und $d\Omega$ [vgl. (26)]. Somit ergiebt sich:

$$h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + h_3\alpha_3 = 0,$$
$$h_1 d\Omega_1 + h_2 d\Omega_2 + h_3 d\Omega_3 = 0,$$

folglich:

$$h_1 : h_2 : h_3 = (\alpha_2 d\Omega_3 - \alpha_3 d\Omega_2) : (\alpha_3 d\Omega_1 - \alpha_1 d\Omega_3) : (\alpha_1 d\Omega_2 - \alpha_2 d\Omega_1),$$

also mit Rücksicht auf die erste Horizontale des Systems (18):

$$h_1 : h_2 : h_3 = \alpha_1' : \alpha_2' : \alpha_3',$$

folglich:

$$(30)\quad h_1 = \frac{\alpha_1'}{\Delta},\ h_2 = \frac{\alpha_2'}{\Delta},\ h_3 = \frac{\alpha_3'}{\Delta},\ \text{wo}\ \Delta^2 = \alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2.$$

Da nun ferner das Axensystem x, g, h *positiv und rechtwinklig* sein soll, so ist [(vgl. die analogen Formeln (15), (16)]:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} = 1,$$

und:

$$g_1 = h_2\alpha_3 - h_3\alpha_2,\quad g_2 = h_3\alpha_1 - h_1\alpha_3,\quad g_3 = h_1\alpha_2 - h_2\alpha_1.$$

Hieraus folgt, falls man für h_1, h_2, h_3 die Werthe (30) einsetzt:

$$(31)\quad g_1 = \frac{\alpha_3\alpha_2' - \alpha_2\alpha_3'}{\Delta},\quad g_2 = \frac{\alpha_1\alpha_3' - \alpha_3\alpha_1'}{\Delta},\quad g_3 = \frac{\alpha_2\alpha_1' - \alpha_1\alpha_2'}{\Delta}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$g_1\Omega_1' + g_2\Omega_2' + g_3\Omega_3' = \frac{1}{\Delta}[\alpha_1'(\alpha_2\Omega_3' - \alpha_3\Omega_2') + \alpha_2'\,(\text{etc.}) + \alpha_3'\,(\text{etc.})],$$

also mit Rücksicht auf (18):

$$= \frac{1}{\Delta}[\alpha_1'\alpha_1' + \alpha_2'\alpha_2' + \alpha_3'\alpha_3'],$$

also mit Rücksicht auf die in (30) angegebene Bedeutung von Δ:

$$g_1\Omega_1' + g_2\Omega_2' + g_3\Omega_3' = \Delta,$$

also mit Hinblick auf die *zweite* der Formeln (28):

$$(32)\qquad \frac{d\Theta}{dt} = \Delta,\quad \text{d. i.}\quad \Theta' = \Delta.$$

Substituirt man jetzt diesen Werth von Δ in den Formeln (30), (31), so erhält man:

$$(33)\qquad h_1 = \frac{d\alpha_1}{d\Theta},\quad h_2 = \frac{d\alpha_2}{d\Theta},\quad h_3 = \frac{d\alpha_3}{d\Theta},$$

$$(34)\quad g_1 = \frac{\alpha_3 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_3}{d\Theta},\quad g_2 = \frac{\alpha_1 d\alpha_3 - \alpha_3 d\alpha_1}{d\Theta},\quad g_3 = \frac{\alpha_2 d\alpha_1 - \alpha_1 d\alpha_2}{d\Theta}.$$

Hierdurch aber gewinnen die Formeln (27) die Gestalt:

$$(35)\qquad \begin{cases} d\Omega_1 = \alpha_1 d\Phi + \alpha_3 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_3, \\ d\Omega_2 = \alpha_2 d\Phi + \alpha_1 d\alpha_3 - \alpha_3 d\alpha_1, \\ d\Omega_3 = \alpha_3 d\Phi + \alpha_2 d\alpha_1 - \alpha_1 d\alpha_2, \end{cases}$$

woraus z. B. folgt:

$$(36)\qquad (d\Omega_1)^2 + (d\Omega_2)^2 + (d\Omega_3)^2 = (d\Phi)^2 + (d\alpha_1)^2 + (d\alpha_2)^2 + (d\alpha_3)^2.$$

Durch (35), (36) erhält schliesslich der in (23) für die lebendige Kraft T aufgestellte Ausdruck folgende Gestalt:

$$(37)\quad \begin{aligned} 2T = {} & M(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\left[\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_3}{dt}\right)^2\right] \\ & - M\left[A_1\left(\alpha_1 \frac{d\Phi}{dt} + \frac{\alpha_2 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_3}{dt}\right) + \cdots\right]^2 \\ & + \left[M_1\left(\alpha_1 \frac{d\Phi}{dt} + \frac{\alpha_2 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_3}{dt}\right)^2 + \cdots\right], \end{aligned}$$

wobei unter $d\Phi$ das in (29) angegebene *unvollständige Differential* zu verstehen ist:

$$(37\text{a})\qquad d\Phi = \beta_1 d\gamma_1 + \beta_2 d\gamma_2 + \beta_3 d\gamma_3.$$

Nun sind A_1, A_2, A_3, α_1, α_2, α_3 [vgl. (1)] gegebene Functionen von p, q. *Demgemäss hat der Ausdruck* (37) *in der That die in* (3) *angegebene Beschaffenheit.*

§ 4.

Die dynamischen Differentialgleichungen.

Nach Constatirung der Formeln (3), (5):

$$(38)\qquad \begin{aligned} T &= T\left(p, q, \frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{d\Phi}{dt}\right), \\ U &= U(p, q), \end{aligned}$$

handelt es sich nun darum, *die dynamischen Differentialgleichungen zu bilden*, auf Grund des Hamilton-Jacobi'schen *Princips:*

$$(39)\qquad \delta\int (T + U)\, dt = 0 \quad \text{d. i.} \quad \int [\delta(T + U)]\, dt = 0.$$

Schwierigkeiten sind dabei nur insofern zu überwinden, als $d\Phi$ ein *unvollständiges* Differential ist, mithin $\delta d\Phi$ wesentlich verschieden ist von $d\delta\Phi$. Um die gegenseitige Beziehung zwischen $\delta d\Phi$ und $d\delta\Phi$ zu ermitteln, werden wir, ausser $d\Phi$ selber, gleichzeitig noch *andere*, ebenfalls *unvollständige* Differentiale in Betracht zu ziehen haben, nämlich $d\Theta$, $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, $d\Omega_3$. Zwischen diesen und $d\Phi$ finden nach (27) die Relationen statt:

$$(40)\qquad \begin{cases} d\Omega_1 = \alpha_1 d\Phi + g_1 d\Theta, \\ d\Omega_2 = \alpha_2 d\Phi + g_2 d\Theta, \\ d\Omega_3 = \alpha_3 d\Phi + g_3 d\Theta, \end{cases} \quad \text{mithin ist auch} \quad \begin{cases} \delta\Omega_1 = \alpha_1 \delta\Phi + g_1 \delta\Theta, \\ \delta\Omega_2 = \alpha_2 \delta\Phi + g_2 \delta\Theta, \\ \delta\Omega_3 = \alpha_3 \delta\Phi + g_3 \delta\Theta. \end{cases}$$

Unterwirft man nun das $d\Omega_1$, welches [nach seiner ursprünglichen Definition (17)] die Bedeutung hat:

$$(\alpha) \qquad d\Omega_1 = \alpha_3 d\alpha_2 + \beta_3 d\beta_2 + \gamma_3 d\gamma_2,$$

der Operation δ, so ergiebt sich:

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} \delta d\Omega_1 = {} & (\alpha_3 \delta d\alpha_2 + \beta_3 \delta d\beta_2 + \gamma_3 \delta d\gamma_2) \\ & + (\delta\alpha_3 d\alpha_2 + \delta\beta_3 d\beta_2 + \delta\gamma_3 d\gamma_2). \end{aligned}$$

Nach den beiden letzten Colonnen des Systems (18) ist aber (falls man in der einen d mit δ vertauscht):

$$\begin{cases} d\alpha_2 = \alpha_3 d\Omega_1 - \alpha_1 d\Omega_3, \\ d\beta_2 = \beta_3 d\Omega_1 - \beta_1 d\Omega_3, \\ d\gamma_2 = \gamma_3 d\Omega_1 - \gamma_1 d\Omega_3, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \delta\alpha_3 = \alpha_1 \delta\Omega_2 - \alpha_2 \delta\Omega_1, \\ \delta\beta_3 = \beta_1 \delta\Omega_2 - \beta_2 \delta\Omega_1, \\ \delta\gamma_3 = \gamma_1 \delta\Omega_2 - \gamma_2 \delta\Omega_1; \end{cases}$$

woraus durch Multiplication folgt:

$$d\alpha_2 \delta\alpha_3 + d\beta_2 \delta\beta_3 + d\gamma_2 \delta\gamma_3 = - d\Omega_3 \delta\Omega_2;$$

so dass also die Formel (β) die einfachere Gestalt erhält:

$$(\gamma) \qquad \delta d\Omega_1 = (\alpha_3 \delta d\alpha_2 + \beta_3 \delta d\beta_2 + \gamma_3 \delta d\gamma) - d\Omega_3 \delta\Omega_2.$$

Subtrahirt man von dieser Formel diejenige, welche aus ihr durch Vertauschung der Operationen d und δ entsteht, so erhält man sofort:

$$(\delta_1) \qquad \delta d\Omega_1 - d\delta\Omega_1 = d\Omega_2 \delta\Omega_3 - d\Omega_3 \delta\Omega_2.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$(\delta_2) \qquad \delta d\Omega_2 - d\delta\Omega_2 = d\Omega_3 \delta\Omega_1 - d\Omega_1 \delta\Omega_3,$$

$$(\delta_3) \qquad \delta d\Omega_3 - d\delta\Omega_3 = d\Omega_1 \delta\Omega_2 - d\Omega_2 \delta\Omega_1.$$

Substituirt man jetzt in (δ_1) für $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, $d\Omega_3$ und $\delta\Omega_1$, $\delta\Omega_2$, $\delta\Omega_3$ die Werthe (40), so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \delta(\alpha_1 d\Phi + g_1 d\Theta) - d(\alpha_1 \delta\Phi + g_1 \delta\Theta) = {} & (\alpha_2 d\Phi + g_2 d\Theta)(\alpha_3 \delta\Phi + g_3 \delta\Theta) \\ & - (\alpha_3 d\Phi + g_3 d\Theta)(\alpha_2 \delta\Phi + g_2 \delta\Theta), \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1) \qquad & \alpha_1(\delta d\Phi - d\delta\Phi) + g_1(\delta d\Theta - d\delta\Theta) + \\ & + (\delta\alpha_1 d\Phi - d\alpha_1 \delta\Phi) + (\delta g_1 d\Theta - dg_1 \delta\Theta) = \\ & = (\alpha_2 g_3 - \alpha_3 g_2)(d\Phi \delta\Theta - d\Theta \delta\Phi). \end{aligned}$$

Ebenso wie diese Formel (ε_1) aus (δ_1) entstanden ist, ebenso entstehen analoge Formeln (ε_2) und (ε_3) aus (δ_2) und (δ_3). Auch übersieht man sofort, dass die Formeln (ε_1), (ε_2), (ε_3) in einfacher Beziehung *zu einander* stehen, nämlich in einander übergehen durch cyklische Progression der Indices 1, 2, 3. Multiplicirt man daher die Formeln (ε_1), (ε_2), (ε_3) respective mit α_1, α_2, α_3, und addirt, so erhält man

$$\begin{aligned} (\zeta) \qquad & \delta d\Phi - d\delta\Phi + (\alpha_1 \delta g_1 + \alpha_2 \delta g_2 + \alpha_3 \delta g_3)\, d\Theta \\ & - (\alpha_1 dg_1 + \alpha_2 dg_2 + \alpha_3 dg_3)\, \delta\Theta = 0. \end{aligned}$$

Nach (26) ist $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 = 0$, mithin:

$$\alpha_1 dg_1 + \alpha_2 dg_2 + \alpha_3 dg_3 = -(g_1 d\alpha_1 + g_2 d\alpha_2 + g_3 d\alpha_3).$$

Das hier auf der *rechten* Seite stehende Trinom ist aber $= 0$, weil $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, $d\alpha_3$ [vgl. (33)] mit h_1, h_2, h_3 proportional sind, und die beiden Axen g und h zu einander senkrecht stehen. Demgemäss wird also:

$$\alpha_1 dg_1 + \alpha_2 dg_2 + \alpha_3 dg_3 = 0,$$

wodurch die Formel (ξ) die einfachere Gestalt erhält:

(η) $$\delta d\Phi - d\delta\Phi + (\alpha_1 \delta g_1 + \alpha_2 \delta g_2 + \alpha_3 \delta g_3)\, d\Theta = 0.$$

Hieraus aber folgt sofort:

(ϑ) $$\cdot \delta d\Phi - d\delta\Phi = (g_1 \delta\alpha_1 + g_2 \delta\alpha_2 + g_3 \delta\alpha_3)\, d\Theta,$$

oder, mit Rücksicht auf (34):

(ι) $$\delta d\Phi - d\delta\Phi = (\alpha_3 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_3)\,\delta\alpha_1 + (\alpha_1 d\alpha_3 - \alpha_3 d\alpha_1)\,\delta\alpha_2 + (\alpha_2 d\alpha_1 - \alpha_1 d\alpha_2)\,\delta\alpha_3.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine *Determinante*, und kann (falls man jede Determinante durch Niederschrift ihrer ersten Horizontalreihe andeutet) folgendermassen dargestellt werden:

$$|\, \delta\alpha_1,\ d\alpha_1,\ \alpha_1 \,|,$$

oder, weil α_1, α_2, α_3 [vgl. (1)] gegebene Functionen von p, q sind, auch so:

$$\left|\, \frac{\partial\alpha_1}{\partial p}\delta p + \frac{\partial\alpha_1}{\partial q}\delta q,\ \ \frac{\partial\alpha_1}{\partial p}dp + \frac{\partial\alpha_1}{\partial q}dq,\ \ \alpha_1 \,\right|,$$

oder, was dasselbe ist, auch so:

$$\left|\, \frac{\partial\alpha_1}{\partial p},\ \ \frac{\partial\alpha_1}{\partial q},\ \ \alpha_1 \,\right| \cdot (\delta p\, dq - \delta q\, dp).$$

Die Formel (ι) gewinnt daher folgende Gestalt:

(41) $$\delta d\Phi = d\delta\Phi + S(\delta p\, dq - dp\, \delta q),$$

wo der Factor S die Bedeutung hat:

(41a) $$S = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \frac{\partial\alpha_1}{\partial p} & \frac{\partial\alpha_1}{\partial q} \\ \alpha_2 & \frac{\partial\alpha_2}{\partial p} & \frac{\partial\alpha_2}{\partial q} \\ \alpha_3 & \frac{\partial\alpha_3}{\partial p} & \frac{\partial\alpha_3}{\partial q} \end{vmatrix},$$

und wo also S [ebenso wie α_1, α_2, α_3, vgl. (1)] eine *gegebene* Function von p, q vorstellt.

Nachdem in dieser Weise die gegenseitige Beziehung zwischen $\delta d\Phi$ und $d\delta\Phi$ zu Tage gefördert ist, kehren wir zurück zu den zu Anfang dieses Paragraphen genannten Formeln (38), (39). Aus (38) folgt sofort:

$$(42)\qquad \delta(T+U) = \frac{\partial(T+U)}{\partial p}\,\delta p + \frac{\partial(T+U)}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial T}{\partial p'}\,\delta p' + \frac{\partial T}{\partial q'}\,\delta q' + \frac{\partial T}{\partial \Phi'}\,\delta \Phi',$$

wo die Accente Differentialquotienten nach der Zeit andeuten. Nun ist ohne Weiteres:

$$(\alpha)\qquad \delta p' = \delta\frac{dp}{dt} = \frac{d(\delta p)}{dt},$$

$$(\beta)\qquad \delta q' = \delta\frac{dq}{dt} = \frac{d(\delta q)}{dt},$$

hingegen nach (41):

$$(\gamma)\qquad \delta\Phi' = \delta\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(\delta\Phi)}{dt} + S\left(\frac{dq}{dt}\,\delta p - \frac{dp}{dt}\,\delta q\right).$$

Diese Werthe (α), (β), (γ) in (42) substituirt, erhält man:

$$(43)\qquad \delta(T+U) = \left(\frac{\partial(T+U)}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial \Phi'}Sq'\right)\delta p + \left(\frac{\partial(T+U)}{\partial q} - \frac{\partial T}{\partial \Phi'}Sp'\right)\delta q + \frac{\partial T}{\partial p'}\frac{d(\delta p)}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q'}\frac{d(\delta q)}{dt} + \frac{\partial T}{\partial \Phi'}\frac{d(\delta\Phi)}{dt}.$$

Lässt man aber diesen Werth von $\delta(T+U)$ eintreten in die Formel (39) des *Hamilton-Jacobi'schen Princips*, so gelangt man in bekannter Weise zu folgenden Gleichungen:

$$(44)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(T+U)}{\partial p} + \dfrac{\partial T}{\partial \Phi'}Sq' = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial p'}, \\ \dfrac{\partial(T+U)}{\partial q} - \dfrac{\partial T}{\partial \Phi'}Sp' = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q'}, \\ 0 = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \Phi'}. \end{cases}$$

Aus der letzten Formel folgt sofort

$$\frac{\partial T}{\partial \Phi'} = \text{Const.} = C.$$

Und hierdurch gewinnen die Gleichungen (44) folgendes Aussehen:

$$(45)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \Phi'} = C, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial p'} - \dfrac{\partial(T+U)}{\partial p} = +CSq', \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q'} - \dfrac{\partial(T+U)}{\partial q} = -CSp'. \end{cases}$$

Dies dürfte die einfachste Gestalt der hier aufzustellenden dynamischen Differentialgleichungen sein. Dabei ist zu beachten, dass C eine durch den Anfangszustand zu bestimmende Constante, S hingegen eine gegebene Function von p, q vorstellt [vgl. (41a)].

§ 5.

Das Princip der lebendigen Kraft.

Multiplicirt man die drei Gleichungen (44) respective mit p', q', Φ', und addirt, so erhält man:

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial p}p' + \frac{\partial(T+U)}{\partial q}q' = \\ = p'\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'} + q'\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'} + \Phi'\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \Phi'},$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial p}p' + \frac{\partial(T+U)}{\partial q}q' + \frac{\partial T}{\partial p'}p'' + \frac{\partial T}{\partial q'}q'' + \frac{\partial T}{\partial \Phi'}\Phi'' = \\ = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p'}p' + \frac{\partial T}{\partial q'}q' + \frac{\partial T}{\partial \Phi'}\Phi'\right).$$

Die *linke* Seite dieser Formel ist offenbar nichts Anderes, als der vollständige Differentialquotient von $(T+U)$ nach der Zeit. Andererseits ist das auf der *rechten* Seite in Parenthese gestellte Trinom identisch mit $2T$, wie sich sofort ergiebt, falls man nur beachtet, dass T eine homogene Function zweiten Grades von p', q', Φ' ist. Demgemäss geht also die Formel über in:

$$\frac{d(T+U)}{dt} = \frac{d(2T)}{dt};$$

woraus durch Integration sich ergiebt:

$$T - U = \text{Const.} = H; \tag{46}$$

dies aber ist das *Princip der lebendigen Kraft.*

Bemerkung. — Von ähnlicher Einfachheit wie die Formel (46) ist offenbar die erste der Formeln (45):

$$\frac{\partial T}{\partial \Phi'} = \text{Const.} = C. \tag{47}$$

Wir werden weiterhin zeigen, dass diese letztere Formel einen *Flächensatz* repräsentirt, oder wenigstens einen Satz repräsentirt, der dem Flächensatz *nahe verwandt* ist. Einstweilen sei nur bemerkt, dass die doppelte lebendige Kraft [nach (23) und (27)] folgendermassen darstellbar ist:

$$2T = M(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)(\Phi'^2 + \Theta'^2) \\ - M[(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3)\Phi' + (A_1g_1 + A_2g_2 + A_3g_3)\Theta']^2 \\ + \mathsf{M}_1(\alpha_1\Phi' + g_1\Theta')^2 + \mathsf{M}_2(\alpha_2\Phi' + g_2\Theta')^2 + \mathsf{M}_3(\alpha_3\Phi' + g_3\Theta')^2, \tag{48}$$

dass mithin die linke Seite der Formel (47) den Werth besitzt:

$$\frac{\partial T}{\partial \Phi'} = M(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\Phi' \\ - M[(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3)\Phi' + (A_1g_1 + \cdots)\Theta'](A_1\alpha_1 + \cdots) \\ + (\mathsf{M}_1\alpha_1^2 + \mathsf{M}_2\alpha_2^2 + \cdots)\Phi' + (\mathsf{M}_1\alpha_1g_1 + \cdots)\Theta'. \tag{49}$$

Der Uebergang von (48) zu (49) d. i. die Differentiation von T nach Φ' ist völlig correct. [Man erkennt solches am Einfachsten, wenn man statt der soeben benutzten Formeln (27) die etwas umständlicheren Formeln (35) anwendet, und dabei beachtet, dass $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, A_1, A_2, A_3$ *gegebene* Functionen von p, q vorstellen.]

§ 6.

Die instantane Drehungsaxe.

Substituirt man in den Formeln (7) für $u_\sigma, v_\sigma, w_\sigma$ die aus (13) sich ergebenden Werthe, so erhält man sofort:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1'(l_1 - A_1) + \alpha_2'(l_2 - A_2) + \alpha_3'(l_3 - A_3), \\ v &= \beta_1'(l_1 - A_1) + \beta_2'(l_2 - A_2) + \beta_3'(l_3 - A_3), \\ w &= \gamma_1'(l_1 - A_1) + \gamma_2'(l_2 - A_2) + \gamma_3'(l_3 - A_3). \end{aligned} \tag{50}$$

Hier bezeichnen u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten eines *ganz beliebigen* Körpermoleküls $m(l_1, l_2, l_3)$. Und gleichzeitig sind A_1, A_2, A_3 die (den Axen 1, 2, 3 entsprechenden) Coordinaten des augenblicklichen Contactpunktes.

Denkt man sich die Geschwindigkeit (u, v, w) des Moleküls $m(l_1, l_2, l_3)$ in drei Componenten zerlegt nach den Axen 1, 2, 3, und diese Componenten mit $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3$ bezeichnet, so ist offenbar z. B.:

$$\mathfrak{v}_1 = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w,$$

also nach (50):

$$\mathfrak{v}_1 = (\alpha_1\alpha_2' + \beta_1\beta_2' + \gamma_1\gamma_2')(l_2 - A_2) + (\alpha_1\alpha_3' + \beta_1\beta_3' + \gamma_1\gamma_3')(l_3 - A_3),$$

also mit Rücksicht auf (17):

$$\begin{cases} \mathfrak{v}_1 = \Omega_2'(l_3 - A_3) - \Omega_3'(l_2 - A_2). \\ \mathfrak{v}_2 = \Omega_3'(l_1 - A_1) - \Omega_1'(l_3 - A_3), \\ \mathfrak{v}_3 = \Omega_1'(l_2 - A_2) - \Omega_2'(l_1 - A_1). \end{cases} \tag{51}$$

Ebenso ergiebt sich:

Diese Formeln (51) zeigen von Neuem, dass dasjenige Molekül m, welches an der Berührungsstelle sich befindet, dessen Coordinaten l_1, l_2, l_3 also gleich A_1, A_2, A_3 sind, *augenblicklich in Ruhe* ist. Sie zeigen ferner aber auch, dass Gleiches von all' denjenigen Molekülen m gilt, deren Coordinaten l_1, l_2, l_3 der Formel entsprechen:

$$l_1 - A_1 : l_2 - A_2 : l_3 - A_3 = \Omega_1' : \Omega_2' : \Omega_3'. \tag{52}$$

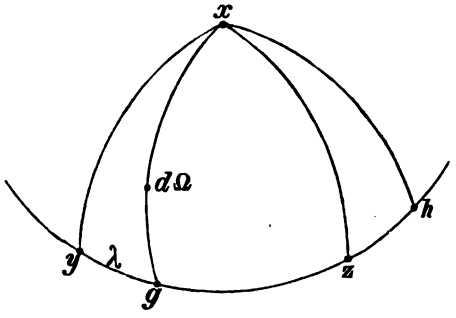
Diese *augenblicklich ruhenden* Moleküle bilden daher zusammengenommen eine gerade Linie, — die *instantane Drehungsaxe.* Diese Axe geht, wie aus (52) ersichtlich, durch den Contactpunkt (A_1, A_2, A_3), und ist gegen die Trägheitsaxen 1, 2, 3 unter Winkeln geneigt, deren Cosinus proportional sind mit $\Omega_1', \Omega_2', \Omega_3'$, d. i. mit $d\Omega_1, d\Omega_2, d\Omega_3$. *Das früher von uns construirte Linienelement* $d\Omega$ [vergl. (24)] *repräsentirt daher die Richtung der instantanen Axe.*

§ 7.

Das horizontale Azimuth der instantanen Axe.

Die im Contactpunkt errichtete, (der x-Axe parallele) *Normale* und die durch den Contactpunkt gehende *instantane Axe* bilden zusammengenommen eine Verticalebene, die im Allgemeinen *in Drehung begriffen* sein wird. Es soll das Azimuth dieser Verticalebene gegen die *feste* Verticalebene xy mit λ bezeichnet, und näher untersucht werden. In der schon früher (26) entworfenen Figur

(53)



ist offenbar λ derjenige Winkel, unter welchem die beiden Axen y und g gegen einander geneigt sind.

Aus dieser Figur ergiebt sich sofort:

$$(54)\quad \begin{cases} g_1 = \beta_1 \cos\lambda + \gamma_1 \sin\lambda, \\ g_2 = \beta_2 \cos\lambda + \gamma_2 \sin\lambda, \\ g_3 = \beta_3 \cos\lambda + \gamma_3 \sin\lambda. \end{cases} \qquad (54\,a)\quad \begin{cases} h_1 = -\beta_1 \sin\lambda + \gamma_1 \cos\lambda, \\ h_2 = -\beta_2 \sin\lambda + \gamma_2 \cos\lambda, \\ h_3 = -\beta_3 \sin\lambda + \gamma_3 \cos\lambda, \end{cases}$$

und hieraus durch Umkehrung:

$$(55)\quad \begin{cases} \beta_1 = g_1 \cos\lambda - h_1 \sin\lambda, \\ \beta_2 = g_2 \cos\lambda - h_2 \sin\lambda, \\ \beta_3 = g_3 \cos\lambda - h_3 \sin\lambda, \end{cases} \qquad (55\,a)\quad \begin{cases} \gamma_1 = g_1 \sin\lambda + h_1 \cos\lambda, \\ \gamma_2 = g_2 \sin\lambda + h_2 \cos\lambda, \\ \gamma_3 = g_3 \sin\lambda + h_3 \cos\lambda. \end{cases}$$

Durch Differentiation der Formeln (55a) folgt mit Rücksicht auf (55):

$$(56)\quad \begin{cases} d\gamma_1 - \beta_1 d\lambda = \sin\lambda \cdot dg_1 + \cos\lambda \cdot dh_1, \\ d\gamma_2 - \beta_2 d\lambda = \sin\lambda \cdot dg_2 + \cos\lambda \cdot dh_2, \\ d\gamma_3 - \beta_3 d\lambda = \sin\lambda \cdot dg_3 + \cos\lambda \cdot dh_3. \end{cases}$$

Nunmehr folgt aus den Formeln (55) und (56) durch Multiplication:

$$(\beta_1 d\gamma_1 + \beta_2 d\gamma_2 + \beta_3 d\gamma_3) - d\lambda = (g_1 dh_1 + g_2 dh_2 + g_3 dh_3) \cos^2\lambda - (h_1 dg_1 + h_2 dg_2 + h_3 dg_3) \sin^2\lambda,$$

also mit Rücksicht auf (37a):

$$(57)\qquad d\Phi - d\lambda = g_1 dh_1 + g_2 dh_2 + g_3 dh_3,$$

oder, falls man für $g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3$ die Werthe (30), (31) substituirt, nach leichter Reduction:

$$(58) \qquad \frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1' & \alpha_1'' \\ \alpha_2 & \alpha_2' & \alpha_2'' \\ \alpha_3 & \alpha_3' & \alpha_3'' \end{vmatrix},$$

wo die Accente Differentiationen nach der Zeit vorstellen. Diese Formel zeigt, dass $d\lambda$ und $d\Phi$ *keineswegs* unter einander identisch sind.

Der innere Grund dieser Nichtübereinstimmung ist leicht angebbar. Es repräsentirt nämlich $d\Phi$, wie aus (25), (26), (27) folgt, den Winkel, um welchen sich der *starre Körper* während der Zeit dt um die x-Axe dreht. Hingegen repräsentirt $d\lambda$ den der Zeit dt entsprechenden Drehungswinkel *der Ebene* xg um jene Axe. Diese beiden Dinge, der starre Körper und die Ebene xg, sind aber keineswegs starr miteinander verbunden, und werden also im Allgemeinen mit *verschiedenen* Geschwindigkeiten um die x-Axe sich drehen.

Beiläufige Formeln. — Aus (31) folgt durch Multiplication mit $d\alpha_1, d\alpha_2, d\alpha_3$ und Addition:

$$(\alpha) \qquad g_1 d\alpha_1 + g_2 d\alpha_2 + g_3 d\alpha_3 = 0.$$

In gleicher Weise folgt aus (30):

$$(\beta) \quad h_1 d\alpha_1 + h_2 d\alpha_2 + h_3 d\alpha_3 = \frac{\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2}{\Delta} dt = \Delta dt = d\Theta;$$

denn nach (32) ist $\Delta dt = d\Theta$. Fügt man nun zu diesen beiden Formeln (α), (β) noch die Gleichung (57) hinzu, so erhält man folgendes Formelsystem:

$$(59) \qquad \begin{cases} g_1 dh_1 + g_2 dh_2 + g_3 dh_3 = d\Phi - d\lambda, \\ h_1 d\alpha_1 + h_2 d\alpha_2 + h_3 d\alpha_3 = d\Theta, \\ \alpha_1 dg_1 + \alpha_2 dg_2 + \alpha_3 dg_3 = 0. \end{cases}$$

Andererseits folgt aus (55), (55a) durch Multiplication mit $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, $d\alpha_3$, und mit Rücksichtnahme auf (59):

$$\beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2 + \beta_3 d\alpha_3 = -\sin\lambda \cdot d\Theta,$$
$$\gamma_1 d\alpha_1 + \gamma_2 d\alpha_2 + \gamma_3 d\alpha_3 = +\cos\lambda \cdot d\Theta.$$

Fügt man hierzu noch die Gleichung (37a) hinzu, so erhält man folgendes Formelsystem:

$$(60) \qquad \begin{cases} \beta_1 d\gamma_1 + \beta_2 d\gamma_2 + \beta_3 d\gamma_3 = d\Phi \qquad = d\mathsf{A}, \\ \gamma_1 d\alpha_1 + \gamma_2 d\alpha_2 + \gamma_3 d\alpha_3 = \cos\lambda \cdot d\Theta = d\mathsf{B}, \\ \alpha_1 d\beta_1 + \alpha_2 d\beta_2 + \alpha_3 d\beta_3 = \sin\lambda \cdot d\Theta = d\Gamma, \end{cases}$$

wo die rechts beigefügten $d\mathsf{A}, d\mathsf{B}, d\Gamma$ als blosse Abbreviaturen dienen sollen für spätere Zwecke.

§ 8.

Ueber ein dem Flächensatz verwandtes Theorem.

Das hier darzulegende Theorem ist mit dem Flächensatz keineswegs identisch, besitzt aber mit demselben gewisse Aehnlichkeit. Das Theorem lautet:

Rollt der gegebene Körper unter dem Einfluss der Schwere auf einer festen Horizontalebene, und bezeichnet man die augenblicklichen Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten der einzelnen Körpermoleküle m mit x, y, z und u, v, w, ferner die augenblicklichen Coordinaten des Contactpunktes mit x_A, y_A, z_A, so wird die über alle Körpermoleküle ausgedehnte Summe

$$\Sigma m[(y - y_A)w - (z - z_A)v] \tag{61}$$

constant sein, d. h. ein und denselben Werth haben für alle Augenblicke der betrachteten Bewegung.

Dabei ist das zu Grunde gelegte feste Axensystem x, y, z der Art zu denken, dass seine yz-Ebene identisch ist mit der gegebenen Horizontalebene. (Mithin ist z. B. x_A stets $= 0$).

Beweis. — Nach (6) und (7) ist:

$$x = x_\sigma + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3, \quad u = u_\sigma + \alpha_1' l_1 + \alpha_2' l_2 + \alpha_3' l_3,$$

ferner nach (8) und (13):

$$x_A = x_\sigma + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3, \quad 0 = u_\sigma + \alpha_1' A_1 + \alpha_2' A_2 + \alpha_3' A_3.$$

Hieraus folgt durch Subtraction:

$$(\alpha) \qquad \xi = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3, \quad u = \alpha_1' \lambda_1 + \alpha_2' \lambda_2 + \alpha_3' \lambda_3,$$

falls man nämlich ξ, η, ζ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als augenblickliche Abkürzungen benutzt für folgende Differenzen:

$$(\beta) \qquad \xi = x - x_A, \quad \eta = y - y_A, \quad \zeta = z - z_A,$$

$$(\gamma) \qquad \lambda_1 = l_1 - A_1, \quad \lambda_2 = l_2 - A_2, \quad \lambda_3 = l_3 - A_3.$$

Die Formeln (α) repräsentiren offenbar folgende *Formelsysteme:*

$$(\delta) \quad \begin{cases} \xi = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3, \\ \eta = \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 + \beta_3 \lambda_3, \\ \zeta = \gamma_1 \lambda_1 + \gamma_2 \lambda_2 + \gamma_3 \lambda_3, \end{cases} \qquad (\varepsilon) \quad \begin{cases} u = \alpha_1' \lambda_1 + \alpha_2' \lambda_2 + \alpha_3' \lambda_3, \\ v = \beta_1' \lambda_1 + \beta_2' \lambda_2 + \beta_3' \lambda_3, \\ w = \gamma_1' \lambda_1 + \gamma_2' \lambda_2 + \gamma_3' \lambda_3. \end{cases}$$

Substituirt man die aus (δ) für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ entspringenden Werthe:

$$\lambda_1 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta,$$
$$\lambda_2 = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta,$$
$$\lambda_3 = \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta,$$

in die Formeln (ε), so ergiebt sich mit Rücksicht auf (60):

$$(\xi)\qquad \begin{cases} u = \mathsf{B}'\zeta - \Gamma'\eta, \\ v = \Gamma'\xi - \mathsf{A}'\zeta, \\ w = \mathsf{A}'\eta - \mathsf{B}'\xi. \end{cases}$$

Hieraus folgt sofort:

$$\eta w - \zeta v = \mathsf{A}'(\eta^2 + \zeta^2) - \mathsf{B}'\xi\eta - \Gamma'\xi\zeta,$$

oder, falls man für A', B', Γ' ihre eigentlichen Bedeutungen aus (60) substituirt:

$$\eta w - \zeta v = \Phi'(\eta^2 + \zeta^2) - \Theta' \cos\lambda \cdot \xi\eta - \Theta' \sin\lambda \cdot \xi\zeta.$$

Multiplicirt man diese Formel mit der Masse m desjenigen Moleküls, auf welches u, v, w und x, y, z, mithin [nach (β)] auch ξ, η, ζ sich beziehen, und summirt sodann über *alle* Moleküle des ganzen Körpers, so ergiebt sich:

$$(\eta)\quad \Sigma m(\eta w - \zeta v) = \Phi' \Sigma m(\eta^2 + \zeta^2) - \Theta' \cos\lambda \Sigma m\xi\eta - \Theta' \sin\lambda \Sigma m\xi\zeta.$$

Die Summen rechter Hand sind leicht berechenbar auf Grund der Formeln (δ), wobei für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Werthe (γ) zu substituiren sind. Man findet:

$$(\vartheta)\quad \begin{aligned} \Sigma m(\eta^2+\zeta^2) &= M(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) - M(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3)^2 \\ &\quad + \mathsf{M}_1\alpha_1^2 + \mathsf{M}_2\alpha_2^2 + \mathsf{M}_3\alpha_3^2, \\ \Sigma m\xi\eta &= M(A_1\alpha_1 + \cdots)(A_1\beta_1 + \cdots) - (\mathsf{M}_1\alpha_1\beta_1 + \cdots), \\ \Sigma m\xi\zeta &= M(A_1\alpha_1 + \cdots)(A_1\gamma_1 + \cdots) - (\mathsf{M}_1\alpha_1\gamma_1 + \cdots), \end{aligned}$$

wo M die Masse des Körpers und M_1, M_2, M_3 seine Hauptträgheitsmomente vorstellen. Multiplicirt man die beiden letzten Formeln mit $\cos\lambda$ und $\sin\lambda$, und addirt, so folgt mit Rücksicht auf (54):

$$(\iota)\quad \cos\lambda \Sigma m\xi\eta + \sin\lambda \Sigma m\xi\zeta = M(A_1\alpha_1 + \cdots)(A_1 g_1 + \cdots) - (\mathsf{M}_1\alpha_1 g_1 + \cdots).$$

Durch Substitution der Werthe (ϑ), (ι) gewinnt jetzt die Formel (η) folgendes Aussehen:

$$(\varkappa)\quad \begin{aligned} \Sigma m(\eta w - \zeta v) &= [M(A_1^2 + \cdots) - M(A_1\alpha_1 + \cdots)^2 + (\mathsf{M}_1\alpha_1^2 + \cdots)]\Phi' \\ &\quad - [M(A_1\alpha_1 + \cdots)(A_1 g_1 + \cdots) - (\mathsf{M}_1\alpha_1 g_1 + \cdots)]\Theta'. \end{aligned}$$

Zufolge (49) ist aber die rechte Seite dieser Gleichung nichts Anderes, als der Werth von $\frac{\partial T}{\partial \Phi'}$. Somit erhält man:

$$(\lambda)\qquad \Sigma m(\eta w - \zeta v) = \frac{\partial T}{\partial \Phi'};$$

also *zufolge des Satzes* (47):

$$(\mu)\qquad \Sigma m(\eta w - \zeta v) = \text{Const.}$$

Dies aber ist, falls man für η, ζ ihre Werthe (β) einsetzt, das zu beweisende Theorem.

§ 9.

Ueber die Bestimmung sämmtlicher Variablen als Functionen der Zeit.

Durch die drei Differentialgleichungen (45) *bestimmen sich zuvörderst*

$$(\mathfrak{A}) \qquad p,\ q,\ \Phi'$$

als Functionen der Zeit. Solches aber ausgeführt gedacht, werden [zufolge (1)]

$$(\mathfrak{B}) \qquad A_1,\ A_2,\ A_3,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,$$

und [zufolge (30), (31)]

$$(\mathfrak{C}) \qquad \Delta,\ h_1,\ h_2,\ h_3,\ g_1,\ g_2,\ g_3$$

ebenfalls *bekannte Functionen der Zeit* sein. Dabei bleibt das Vorzeichen von Δ willkürlich, was darin seinen Grund hat, dass die auxiliaren Axen g, h durch unsere Determinationen noch nicht völlig bestimmt sind. In der That kann man diesen Axen g, h, statt der ihnen in der Figur (26) zuertheilten Richtungen, ebensogut auch die *entgegengesetzten* Richtungen verleihen.

Sind nun die Grössen $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$ *bekannte Functionen der Zeit,* so gilt [nach (58)] Gleiches auch von

$$(\mathfrak{D}) \qquad \lambda,$$

also [nach (55)] Gleiches auch von

$$(\mathfrak{E}) \qquad \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,$$

also [nach (13)] Gleiches auch von

$$(\mathfrak{F}) \qquad u_\sigma,\ v_\sigma,\ w_\sigma \quad \text{und} \quad x_\sigma,\ y_\sigma,\ z_\sigma.$$

Endlich ergeben sich alsdann auch die Coordinaten y, z der *Contactstelle* als *Functionen der Zeit.* Und zwar erhält man in dieser Beziehung [durch Integration der Gleichungen (10)] folgende Formeln:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \begin{aligned} y - y_0 &= [y_\sigma + A_1\beta_1 + A_2\beta_2 + A_3\beta_3]_{t=t_0}^{t=t}, \\ z - z_0 &= [z_\sigma + A_1\gamma_1 + A_2\gamma_2 + A_3\gamma_3]_{t=t_0}^{t=t}, \end{aligned}$$

wo y_0, z_0 die Coordinaten der Contactstelle zur Zeit $t = t_0$ vorstellen sollen.

§ 10.

Beiläufige Bemerkung.

Mit Rücksicht darauf, dass die Ermittelung der gegenseitigen Beziehung zwischen δd und $d\delta$ meistentheils eine etwas *mühsame Auf-*

gabe ist [vgl. insbesondere § 4], mag hier eine diesem Zweck entsprechende und *verhältnissmässig einfache* Methode angedeutet werden.

Dreht sich ein starrer Körper um einen *festen* Punkt O, und lässt man von O zwei Axensysteme 1, 2, 3 und x, y, z ausgehen, das erstere starr mit dem Körper verbunden, das letztere unbeweglich im Raume, so gelten für die Coordinaten l_1, l_2, l_3 und x, y, z, welche irgend ein Körpermolekül m in diesen beiden Systemen besitzt, die Formeln:

$$(A) \qquad \begin{cases} x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3, \\ y = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3, \\ z = \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3, \end{cases}$$

wo die α, β, γ die Richtungscosinus des einen Axensystems in Bezug auf das andere vorstellen. Aus (A) folgt durch Differentiation:

$$dx = l_1 d\alpha_1 + l_2 d\alpha_2 + l_3 d\alpha_3,$$

oder, falls man für l_1, l_2, l_3 die aus (A) sich ergebenden Werthe substituirt:

$$dx = y(\beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2 + \beta_3 d\alpha_3) + z(\gamma_1 d\alpha_1 + \gamma_2 d\alpha_2 + \gamma_3 d\alpha_3).$$

Diese Formel aber gewinnt, falls man die Abkürzungen einführt:

$$(B) \qquad \begin{cases} \beta_1 d\gamma_1 + \beta_2 d\gamma_2 + \beta_3 d\gamma_3 = d\mathsf{A}, \\ \gamma_1 d\alpha_1 + \gamma_2 d\alpha_2 + \gamma_3 d\alpha_3 = d\mathsf{B}, \\ \alpha_1 d\beta_1 + \alpha_2 d\beta_2 + \alpha_3 d\beta_3 = d\Gamma, \end{cases}$$

folgende Gestalt:

$$(C) \qquad \begin{cases} dx = z d\mathsf{B} - y d\Gamma. \text{ Und ebenso erhält man:} \\ dy = x d\Gamma - z d\mathsf{A}, \\ dz = y d\mathsf{A} - x d\mathsf{B}. \end{cases}$$

Hieraus folgt durch Ausführung der Operation δ:

$$\delta dx = z \delta d\mathsf{B} - y \delta d\Gamma + \delta z d\mathsf{B} - \delta y d\Gamma,$$

oder, falls man in den beiden letzten Gliedern für δy und δz die aus (C) ersichtlichen Werthe:

$$\delta y = x\delta\Gamma - z\delta\mathsf{A},$$
$$\delta z = y\delta\mathsf{A} - x\delta\mathsf{B}$$

substituirt:

$$\delta dx = z\delta d\mathsf{B} - y\delta d\Gamma - x(d\mathsf{B}\delta\mathsf{B} + d\Gamma\delta\Gamma) + y d\mathsf{B}\delta\mathsf{A} + z d\Gamma\delta\mathsf{A}.$$

Nun ist offenbar, was die *linke* Seite dieser Formel betrifft, $\delta dx = d\delta x$. Demgemäss muss also die *rechte* Seite ebenfalls bei einer Vertauschung von d und δ *sich gleich* bleiben. Die so entstehende Gleichung zerfällt aber, weil x, y, z willkürlich sind, in *drei* Gleichungen. Von diesen *drei* Gleichungen ist *eine* (nämlich die durch Vergleichung der

Coefficienten von x entstehende) *identisch*, während die *beiden andern* (d. i. die durch Vergleichung der Coefficienten von y respective z entstehenden) dargestellt sind durch die *beiden letzten* Formeln des folgenden Systems:

$$(D) \qquad \begin{cases} \delta dA - d\delta A = d\Gamma\delta B - \delta\Gamma dB, \\ \delta dB - d\delta B = dA\delta\Gamma - \delta A d\Gamma, \\ \delta d\Gamma - d\delta\Gamma = dB\delta A - \delta B dA. \end{cases}$$

Dass sich die *erste* Formel dieses Systems in analoger Weise herleiten lässt, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Leipzig, Juni 1885.

Ueber eine einfache Methode zur Begründung des Princips der virtuellen Verrückungen.*)

Von

C. Neumann in Leipzig.

Die einer gegebenen Bedingung:

(1) $$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots, x_n, y_n, z_n) = 0$$

unterworfenen n Massenpunkte $m_1(x_1, y_1, z_1)$, $m_2(x_2, y_2, z_2)$, $\cdots$, $m_n(x_n, y_n, z_n)$ mögen unter dem Einfluss irgend welcher *unbekannter* Kräfte $P_1, P_2, \cdots, P_n$ im *Gleichgewicht* sein. Es sollen die Eigenschaften und Formeln entwickelt werden, welche, aus dieser Annahme des Gleichgewichts, für jene unbekannten Kräfte sich ergeben.

Das vorhandene Gleichgewicht wird offenbar, falls man zur Bedingung (1) noch irgend welche *neuen* Beschränkungen hinzutreten lässt, hierdurch *nicht gestört* werden [sondern im Gegentheil nur noch mehr *verstärkt* werden, falls ein solcher Ausdruck gestattet ist]. So z. B. wird jenes Gleichgewicht *bestehen* bleiben, falls man die $(n-1)$ Punkte $m_2, m_3, \cdots, m_n$ *festhält*, mithin ihre Coordinaten als *unveränderlich* betrachtet, wodurch alsdann der Punkt m_1 in seiner Beweglichkeit auf diejenige bestimmte Fläche Ω beschränkt sein wird, welche [jene Coordinaten *unveränderlich* gedacht] durch die Gleichung (1) dargestellt ist. Alsdann aber reducirt sich die ursprüngliche Sachlage dahin, dass der auf Ω verschiebbare Punkt m_1 unter dem Einfluss der unbekannten Kraft P_1 im Gleichgewicht sich befindet. Hieraus folgt, dass diese Kraft P_1 zur Fläche Ω *normal* sein muss, dass mithin ihre Componenten X_1, Y_1, Z_1 Werthe besitzen müssen von folgender Gestalt:

$$X_1 = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_1},$$

$$Y_1 = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y_1},$$

$$Z_1 = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z_1},$$

wo λ_1 einen noch unbekannten Factor vorstellt.

*) Aus den Berichten der Königl. Sächsischen Ges. d. Wiss. vom 8. März 1886.

Analoges wird offenbar in analoger Weise für die übrigen Kräfte $P_2, P_3, \cdots, P_n$ respective für deren Componente $X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3, \cdots, X_n, Y_n, Z_n$ sich ergeben, sodass man also zu folgenden $3n$ Formeln gelangt:

$$(2)\qquad \begin{aligned} X_h &= \lambda_h \frac{\partial f}{\partial x_h}, \\ Y_h &= \lambda_h \frac{\partial f}{\partial y_h}, \quad h = 1, 2, 3, \cdots, n, \\ Z_h &= \lambda_h \frac{\partial f}{\partial z_h}, \end{aligned}$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ noch *unbekannte* Factoren vorstellen.

Nachdem durch die Formeln (2) die *Richtungen* der unbekannten Kräfte $P_1, P_2, \cdots, P_n$ ermittelt sind, handelt es sich nun weiter um die Untersuchung ihrer *Intensitäten*, oder (was dasselbe ist) um die Untersuchung der unbekannten Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Um hierauf näher einzugehen, greifen wir zurück zur *ursprünglichen* Sachlage, welche darin besteht, dass die der Bedingung (1) unterworfenen Punkte $m_1, m_2, \cdots, m_n$ unter dem Einfluss der Kräfte $P_1, P_2, \cdots, P_n$ im *Gleichgewicht* sind. Dieses Gleichgewicht wird bestehen bleiben, falls man die $(n-2)$ Punkte $m_3, m_4, \cdots, m_n$ *räumlich fixirt*, überdies aber die beiden Punkte m_1 und m_2, in ihrer Beweglichkeit, auf zwei *feste geradlinige Geleise* m_1G_1 und m_2G_2 beschränkt, welche einander *parallel* sein mögen, und deren gemeinschaftliche Richtungscosinus mit α, β, γ bezeichnet sein sollen. Alsdann werden die Punkte m_1 und m_2, in Folge der Bedingung (1), längs dieser Geleise nur in solcher Weise sich bewegen können, dass ihre gleichzeitig durchlaufenen Wegelemente δs_1 und δs_2 zu einander in der Beziehung stehen:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_1}\beta + \frac{\partial f}{\partial z_1}\gamma\right)\delta s_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_2}\beta + \frac{\partial f}{\partial z_2}\gamma\right)\delta s_2 = 0.$$

Und diese simultanen Wegelemente δs_1, δs_2 werden daher einander *gleich* sein, sobald man die α, β, γ der Relation unterwirft:

$$(3)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_1}\beta + \frac{\partial f}{\partial z_1}\gamma\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_2}\beta + \frac{\partial f}{\partial z_2}\gamma\right) = 0.$$

Solches festgesetzt, sind also die Punkte m_1 und m_2 längs ihrer *parallelen* Geleise G_1 und G_2 nur um *gleichviel* verschiebbar, also nur der Art beweglich, dass ihr gegenseitiger Abstand *constant* bleibt. Demgemäss erleidet diese Beweglichkeit der beiden Punkte keinerlei Hemmung oder Beeinträchtigung, falls man die beiden Punkte durch eine *starre Linie* L miteinander verbindet.

Solches aber ausgeführt gedacht, reducirt sich jetzt die ursprüngliche Sachlage dahin, dass die *starre Linie* L, deren Endpunkte m_1

und m_2 auf den *parallelen festen Geleisen* G_1 und G_2 verschiebbar sind, unter Einwirkung der ihre Endpunkte sollicitirenden Kräfte P_1 und P_2 im *Gleichgewicht* ist. Hieraus folgt sofort, dass die Summe der diesen Geleisen entsprechenden Componenten von P_1 und P_2 gleich *Null* sein muss. Man erhält also die Formel:

$$P_1 \cos(P_1, G_1) + P_2 \cos(P_2, G_2) = 0.$$

Diese Formel aber kann man auch so schreiben:

$$(X_1\alpha + Y_1\beta + Z_1\gamma) + (X_2\alpha + Y_2\beta + Z_2\gamma) = 0,$$

oder mit Rücksicht auf (2) auch so:

$$\lambda_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_1}\beta + \frac{\partial f}{\partial z_1}\gamma\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_2}\beta + \frac{\partial f}{\partial z_2}\gamma\right) = 0,$$

oder, weil α, β, γ der Relation (3) unterworfen worden sind, auch so:

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

In analoger Weise wird sich offenbar ergeben $\lambda_1 = \lambda_3$, ferner $\lambda_1 = \lambda_4$, u. s. w., mithin allgemein:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n. \tag{4}$$

Bezeichnet man aber den gemeinschaftlichen Werth dieser n Grössen kurzweg mit λ (ohne Index), so gelangt man auf Grund der Formeln (2) zu folgendem Resultat:

Theorem. — *Befinden sich die einer gegebenen Bedingung*

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots, x_n, y_n, z) = 0$$

unterworfenen n Massenpunkte $m_h(x_h, y_h, z_h)$ *unter dem Einfluss irgend welcher Kräfte* $P_h(X_h, Y_h, Z_h)$ *im Gleichgewicht, so müssen diese Kräfte nothwendiger Weise Werthe besitzen von folgender Gestalt:*

$$\left.\begin{aligned} X_h &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x_h}, \\ Y_h &= \lambda \frac{\partial f}{\partial y_h}, \\ Z_h &= \lambda \frac{\partial f}{\partial z_h}, \end{aligned}\right\} \quad h = 1, 2, 3, \cdots, n, \tag{5}$$

wo λ *einen unbekannten Factor vorstellt.*

Dabei ist hinzuzufügen, dass dieser unbekannte Factor λ *keinen bestimmten Werth zu haben braucht, sondern im Gegentheil jeden beliebigen Werth besitzen darf.*

Um die Richtigkeit dieser letzten Behauptung darzuthun, werden wir offenbar nur zu zeigen brauchen, dass *irgend eine* von den Kräften $P_1, P_2, \cdots, P_n$, z. B. P_1 von *beliebiger Stärke* sein kann.

Zu diesem Zweck wollen wir die $(n-1)$ Punkte $m_2, m_3, \cdots, m_n$ von Neuem *festhalten*; sodass also der Punkt m_1 nur noch verschiebbar ist längs der (früher besprochenen) Fläche Ω. Alsdann wird offenbar

dieser Punkt m_1 im *Gleichgewicht* sein unter dem Einfluss einer *beliebig starken* Kraft P_1, falls nur dieselbe *normal* ist zur Fläche Ω. Denken wir uns nun aber eine solche Normalkraft P_1, von *beliebiger* Stärke, auf m_1 wirklich einwirkend, und bezeichnen wir die dabei zum Festhalten der $(n-1)$ Punkte $m_2, m_3, \cdots, m_n$ erforderlichen Kräfte mit $P_2, P_3, \cdots, P_n$, so haben wir im Ganzen n Kräfte, die zusammengenommen das Punktsystem im Gleichgewicht halten, und von denen die erste (nämlich P_1) ihrer Stärke nach *beliebig* gewählt war. — Q. e. d.

Wie man schliesslich zu verfahren hat, um vom Satze (5) aus zum *Princip der virtuellen Verrückungen* zu gelangen, soll hier nicht weiter dargelegt werden.

Bemerkung. — Sollte man es als einen Uebelstand empfinden, dass bei Anwendung der festen parallelen Geleise G_1, G_2 der gegenseitige Abstand der beiden Punkte m_1, m_2 nur im *ersten Augenblick* der eintretenden Bewegung constant bleibt, so kann man diesen Uebelstand leicht dadurch vermeiden, dass man an Stelle jener Geleise G_1, G_2 zwei *feste Curven* C_1, C_2 in Anwendung bringt. Diese Curven C_1, C_2 lassen sich alsdann leicht der Art festsetzen, dass die längs derselben verschiebbaren und überdies der Bedingung (1) unterworfenen Punkte m_1, m_2 einen gegenseitigen Abstand besitzen, der *fortdauernd* constant bleibt.

Man gelangt in solcher Weise ebenfalls zum Satze (5), nur auf etwas umständlicherem Wege.

Schliesslich mag noch auf einige Sätze von sehr specieller Natur aufmerksam gemacht werden, die aber durch überraschende Einfachheit sich auszeichnen. Dieselben lauten:

Erster Satz. *Sind drei Punkte m_1, m_2, m_3 der Bedingung unterworfen, dass der Flächeninhalt des von ihnen gebildeten Dreiecks constant bleiben soll, und befinden sich diese Punkte unter dem Einfluss irgend welcher Kräfte P_1, P_2, P_3 im Gleichgewicht, so werden P_1, P_2, P_3 in die Ebene des genannten Dreiecks fallen, ferner senkrecht stehen zu den gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks, und mit diesen Seiten proportional sein.*

Zweiter Satz. *Sind vier Punkte m_1, m_2, m_3, m_4 der Bedingung unterworfen, dass das Volumen des von ihnen gebildeten Tetraëders constant bleiben soll, und befinden sich diese Punkte unter dem Einfluss irgend welcher Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 im Gleichgewicht, so werden P_1, P_2, P_3, P_4 senkrecht stehen zu den gegenüberliegenden Tetraëderflächen und mit diesen Flächen proportional sein.*

Leipzig, 16. Januar 1886.

Ueber Greens Theorie der Reflexion und Brechung des Lichtes.

Von

KARL VONDERMÜHLL in Leipzig.

Gegen Ende des Jahres 1837 hat George Green Gleichungen abgeleitet für die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze unkrystallinischer Medien.*) Diese Theorie besitzt vor derjenigen, welche Cauchy zunächst nur angedeutet und dann im Laufe der vierziger Jahre etwas näher begründet hat, den grossen Vorzug, dass die Bedingungen für die Grenze der beiden Medien aus streng mechanischen Principien entwickelt werden. Und zwar gelangt Green zu denselben Gleichungen, welche nach Cauchy die Continuität der Bewegung bedingen sollen, und welche aussagen, dass an der Grenze sowohl die drei Componenten der Verrückung, als auch die Differentialquotienten derselben nach der Normale in den beiden Medien gleich sein sollen. Damit werden die Voraussetzungen klar festgestellt, auf welchen diese Grenzbedingungen beruhen: Es muss angenommen werden, dass die zwei Constanten, welche das elastische Verhalten eines unkrystallinischen Mediums bestimmen, in den beiden Medien gleiche Werthe haben. Dies ist Fresnels Annahme: Die Elasticität des Lichtäthers soll in allen unkrystallinischen Medien dieselbe sein, die verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes allein durch die verschiedene Dichtigkeit des Aethers bedingt werden.

Indem somit beide Theorien von Differentialgleichungen und Grenzgleichungen genau derselben Form ausgehen, gelangen sie schliesslich doch zu ganz verschiedenenen Gleichungen für die Reflexion und Brechung, weil Green und Cauchy den elastischen Constanten eines

*) George Green. On the Laws of the Reflexion and Refraction of Light at the common surface of two non-crystallized Media. Read December 11, 1837. Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. VII, part 1, 1838. — Mathematical Papers of the late George Green, edited by N. M. Ferrers. London 1871, p. 243.

Aethermediums verschiedene Werthe beimessen. Beide wollen longitudinale Wellen, deren ungeschwächte Fortpflanzung mit der Erfahrung in Widerspruch steht, bei Seite schaffen. Nun hat aber Green erkannt, dass stabiles Gleichgewicht nicht möglich ist, dass also ein elastisches Medium von der angenommenen Beschaffenheit nicht existirt, wenn die Kräftefunction einen positiven Werth annehmen kann.*) Damit ist die Möglichkeit ausgeschlossen, dem Quadrat von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen einen negativen Werth zu ertheilen; es bleibt allein übrig, diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit unendlich gross zu setzen, also der erstern von den beiden elastischen Constanten, A und B, wenn wir Greens Bezeichnung annehmen, nicht einen negativen Werth, wie das Cauchy gethan hat, sondern einen unendlich grossen positiven Werth zuzuschreiben.**) Damit fallen die longitudinalen Wellen ebenso wohl aus der Rechnung heraus, wie wenn ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit imaginär wird; nur enthalten die Greenschen Formeln eine Constante weniger, als die Cauchyschen, in denen der endliche negative Werth von A auftritt.

Die Annahme, A sei unendlich gross im Vergleich mit B, bedeutet nichts Anderes, als dass der Widerstand, der einer Compression entgegengesetzt wird, unendlich gross sei im Vergleich mit demjenigen, welchen eine blosse Verschiebung der Theilchen gegen einander, ohne Veränderung der Dichtigkeit, zu überwinden hat. Folglich nimmt Green an, der Lichtäther sei incompressibel, und dann müssen seine Gleichungen für die Reflexion und Brechung mit denjenigen übereinstimmen, welche ich schon vor längerer Zeit unter derselben Annahme abgeleitet habe,***) vorausgesetzt, dass in diese letzteren Gleichungen die Fresnelschen Annahmen über Dichtigkeit und Elasticität eingeführt werden.

Die Vergleichung der Formeln bestätigt dies und giebt zunächst eine Controle für die Richtigkeit der in ganz verschiedener Weise durchgeführten Rechnungen. Weiter folgt aber, dass eine der Annahmen, welche Green an die Spitze seiner Entwicklungen stellt, für die Endformeln ohne alle Bedeutung ist, nämlich die Annahme, dass die oben erwähnte elastische Constante A, welche die Compressibilität bestimmt, und damit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen, für alle Aethermedien denselben Werth habe.†) Green

*) Math. Papers, p. 246. — Vergl. auch die Note, Appendix, p. 330.

**) Es ist mir unverständlich, wie S. Haughton (Phil. Mag., S. 4, V. 6, p. 88) von verschiedenen particulären Integralen der allgemeinen Bewegungsgleichungen sprechen kann, welche Cauchy und Green sollen gewählt haben.

***) Ueber die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze unkrystallinischer Medien. — Math. Ann. Bd. 5, p. 471. 1872.

†) Dies hat schon J. W. Strutt hervorgehoben, Phil. Mag. S. 4. Vol 42. p. 83.

begründet die Annahme mit dem analogen Verhalten der Gase*), und wenn diese Begründung ihm selbst mangelhaft erscheint, so kann nach dem eben Bemerkten in der Uebereinstimmung der Resultate mit den beobachteten Thatsachen eine Bestätigung der Annahme nicht gefunden werden. Vielmehr bleibt allein anzuführen, dass die Grenzgleichungen durch Verbindung von $A = A_1$ mit der Fresnel'schen Annahme $B = B_1$ eine sehr einfache Form erhalten, und wenn man das Letztere annimmt, so wird auch das Erstere keinen Anstoss erregen. Geht man aber mit F. Neumann und Mac Cullagh davon aus, dass die Dichtigkeit des Aethers überall denselben Werth habe, die Elasticität dagegen verschieden sei, so liegt gar kein Grund vor, das Verhältniss der beiden Constanten, $\frac{A}{B}$, in allen unkrystallinischen Aethermedien gleich zu setzen. Dass endlich Greens Grenzgleichungen mit den von Cauchy aufgestellten übereinstimmen, kann in keiner Weise für die zu Grunde gelegten Annahmen sprechen; denn wie ich in der oben erwähnten Abhandlung gezeigt habe,**) beruht die von Cauchy angedeutete und von Verschiedenen genauer ausgeführte Herleitung dieser Gleichungen auf einer nicht ausgesprochenen, ganz willkürlichen Voraussetzung.

Bekanntlich stimmen die von Green für die Reflexion und Brechung abgeleiteten Gleichungen mit den Fresnelschen Formeln, also auch mit der Erfahrung nur in dem Falle angenähert überein, wo das Brechungsverhältniss von dem Werthe Eins wenig verschieden, also die Brechung schwach ist. Und wenn Green erwartet hat, dass die Abweichung seiner Formeln von den Fresnelschen zu Erklärung der Erscheinungen führe, welche der stark brechende Diamant nach Beobachtungen von Airy und Andern zeige,***) so wäre die Bestätigung beim Vergleich mit der Erfahrung kaum in Anrechnung zu bringen. Denn die heute vorliegenden genauen Beobachtungen über die Beschaffenheit des reflectirten Lichtes, z. B. bei Reflexion an der Grenze von Glas und Luft, haben die angenäherte Giltigkeit der Fresnelschen Formeln ausser Zweifel gestellt; so starke Abweichungen, wie sie in diesem besonderen Falle nach Green stattfinden sollen, stehen in völligem Widerspruch mit der Erfahrung. Dies ist längst allgemein anerkannt, und Green selbst hat Bedenken getragen, die von ihm als wohl zulässig dargestellte Vernachlässigung kleiner Grössen aufrecht zu erhalten. In einem Nachtrag zu seiner Abhandlung über die Reflexion und Brechung des Lichtes***) versucht er, allerdings nur beiläufig

*) Math. Papers, p. 257. Vergl. namentlich die Anmerkung p. 257/8.

**) Math. Annalen, Bd. 5, p. 477.

***) Green. Supplement to a Memoir on the Reflexion and Refraction of Light. Trans. Cambr. Phil. Soc. 1839. Read May 6, 1839. — Math. Papers, p. 281.

und mit wenig Zutrauen in die nach seiner Ausdrucksweise nicht auf eine strenge Ableitung gegründete Schlussfolgerung, eine grössere Annäherung an die Fresnelsche Formel herzustellen, indem er einem allmähligen Uebergang von dem einen Medium zum andern Rechnung trägt. Allein diese Rechnung ist fehlerhaft: Bei Annahme von n homogenen Schichten, in welchen die Dichtigkeit von der einen zur andern sich sprungweise, aber sehr wenig ändert, findet der Act der Reflexion und Brechung an der einen Grenze zweier Schichten nicht nur einmal, sondern unendlich oft statt, falls man die Schicht seitlich unbegrenzt denkt; demzufolge wird die Anzahl von sehr kleinen Grössen der Ordnung $\frac{1}{n^2}$, welche vernachlässigt werden, nicht durch $\frac{1}{n}$ bestimmt, wie Green angiebt; sondern es ist diese Zahl gegen $\frac{1}{n}$ unendlich gross, so dass für einen unendlich grossen Werth von n die Anzahl der vernachlässigten Glieder unendlich gross von derselben Ordnung wird, wie das einzelne Glied unendlich klein. Eine genaue Rechnung ist von mir an dem oben angegebenen Orte*), unter etwas allgemeineren Voraussetzungen, durchgeführt worden; wird die Dicke der Schicht, in welcher der stetige Uebergang von dem einen Medium zum andern stattfinden soll, verschwindend klein gegen die Wellenlänge angenommen, so folgen genau dieselben Gleichungen, wie bei der Annahme einer sprungweisen Aenderung. Auf diese Weise ist also Einklang mit der Erfahrung nicht herzustellen.

Hier mag auch ein Punkt erörtert werden, welcher für Fresnels Definition der Polarisationsebene sprechen und die entgegengesetzte ausschliessen soll. Zuerst hat dies Lorenz**) hervorgehoben, dann auch J. W. Strutt***) in einer Abhandlung über Greens Reflexionstheorie, auf welche letztere Abhandlung wir später noch zurückkommen müssen. Während nämlich Greens Formeln für den Fall einer schwachen Brechung mit den Fresnelschen sehr nahe übereinstimmen, sobald man Fresnels Annahmen über Dichtigkeit und Elasticität einführt, findet Aehnliches nicht statt, wenn man die Dichtigkeit des Aethers constant, die Elasticität verschieden annimmt. Strutt hat die Rechnung durchgeführt; dasselbe ist auch den von mir abgeleiteten Formeln†) unmittelbar zu entnehmen. Die Schwingungen sollen in der Einfallsebene stattfinden, und es werden, wenn n das Brechungs-

*) Math. Annalen, Bd. 5, § 3. p. 505 ff.

**) W. Lorenz. Bestimmung der Schwingungsrichtung des Lichtäthers durch die Reflexion und Brechung des Lichtes. Pogg. Ann. 114. 1861. Vergl. namentlich p. 248.

***) J. W. Strutt. On the Reflection of Light from Transparent Matter. Phil. Mag. S. 4, Vol. 42. 1871. Vergl. p. 89 ff.

†) Math. Annalen, Bd. 5, p. 495.

verhältniss bezeichnet, Grössen von der Ordnung $(n^2-1)^2$ vernachlässigt. Dann erhält man für den Fall gleicher Elasticität die Tangentenformel, dagegen für den Fall gleicher Dichtigkeit nicht die Sinusformel.

Einen zwingenden Grund, die Fresnelsche Definition der Polarisationsebene und damit auch seine Ansicht über die Dichtigkeit und Elasticität anzunehmen, kann ich in diesem Umstand nicht finden. Denn da die nach dem Vorgange von Green aus streng mechanischen Principien abgeleiteten Reflexionsformeln bei endlicher Brechung mit den Beobachtungen in Widerspruch stehen, will es nicht viel bedeuten, dass bei schwacher Brechung angenähert Einklang stattfindet; es kann eben, wie erwähnt, aus diesem besonderen Falle der allgemeine auf dem von Green eingeschlagenen Wege nicht abgeleitet werden. Und ebensowenig möchte dem andern Umstand, dass bei Annahme der Fresnelschen Definition die einfachere Sinusformel, bei Annahme der Neumannschen die weniger einfache Tangentenformel als giltig erhalten wird, ein entscheidendes Gewicht zukommen. Vielmehr handelt es sich wesentlich darum, wie man für den Fall einer endlichen Brechung zu einer Theorie gelangt, die mit den Beobachtungen in Einklang steht.

Dies hat S. Haughton*) durch eine Modification der Greenschen Formeln zu erreichen versucht, welche genauerer Erwägung bedarf. Weil Cauchys Formeln die Beobachtungen gut darstellen und gewisse Abweichungen von dem einfachen Verhalten, wie sie Jamin und Andere wahrgenommen haben, mittelst des sogenannten Ellipticitätscoefficienten erklären, liegt es sehr nahe, auch Formeln mit zwei verschiedenen, von einander unabhängigen Constanten auf dem von Green gelegten Fundament zu gewinnen, indem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen nicht unendlich gross, sondern nur sehr gross angenommen wird. Allerdings ist damit dem Werth der zweiten Constante eine Schranke gesetzt; dies hat Haughton nicht nur nicht beachtet; sondern nach seinen Formeln erhält die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen sogar einen imaginären Werth. Auf diesen Widerspruch hat F. Eisenlohr**) zuerst aufmerksam gemacht. In den von Haughton modificirten Gleichungen Greens kommt nämlich eine Grösse Q vor,

$$Q = \frac{\sqrt{1-\mu^2\varepsilon^2}+\mu^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(\mu^2-1)^2},$$

wo μ das Brechungsverhältniss bedeutet, ε aber eine von der Fort-

*) Samuel Haughton. On the Reflexion of Polarized Light from the surface of Transparent Bodies. Phil. Mag. S. 4. Vol. 6, p. 81—88. 1853.

**) F. Eisenlohr. Pogg. Ann. 104, p. 346. 1858.

pflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen abhängige Grösse ist. Der Annahme Greens entspricht

$$\varepsilon = 0;$$

nach Haughton soll ε einen sehr kleinen positiven Werth haben. Dann erhält Q seinen grössten Werth für $\varepsilon = 0$, und dieser ist in dem einzigen Beispiel, welches Haughton durchgerechnet hat,

$$Q = 0{,}278\,, \quad \text{entsprechend} \quad \mu = 2{,}454.$$

Nun folgt aber aus den von Jamin veröffentlichten Beobachtungen

$$Q = 2{,}55\,;$$

demgemäss müsste gesetzt werden

$$\varepsilon^2 = -\,56{,}8\,,$$

und einem solchen negativen Werth von ε^2 entspricht ein imaginärer Werth für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen. Die von Haughton angestellte Rechnung würde also zu dem Resultat führen, dass in dem bestimmten Beispiel Uebereinstimmung mit den Beobachtungen nur erzielt wird, wenn die Constante A nicht einen sehr grossen positiven, sondern einen negativen Werth besitzt. Diese letztere Annahme hat aber Green als mechanisch unmöglich erkannt und nachgewiesen.

Uebrigens ist Haughtons Rechnung ganz fehlerhaft angelegt. Die Annahme, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen nicht unendlich gross, sondern nur sehr gross sei, führt auf wesentliche Schwierigkeiten. Denn für Einfallswinkel, welche unterhalb einer gewissen Grenze liegen, werden sich longitudinale Wellen ungeschwächt fortpflanzen, und wenn auch für solche kleine Einfallswinkel das reflectirte Licht einer genauen Beobachtung schwer zugänglich sein mag, so könnten doch gewisse Anomalien, die daraus folgen, namentlich die Theilung eines Lichtstrahles durch zwei Reflexionen, wo die zweite den longitudinal schwingenden Strahl zum Theil wieder in transversale Bewegung verwandeln würde, der Wahrnehmung nicht entgangen sein. Auch müsste unter Umständen die Lichtbewegung einen Verlust an lebendiger Kraft erleiden. Alle diese Schwierigkeiten hat Haughton übersehen; nach seiner Rechnung stellt sich ein sehr einfaches Verhalten heraus; aber das ist Folge eines Rechenfehlers. Denn Haughton greift auf die Formeln Greens zurück, ohne sich die Bedeutung der verschiedenen Zeichen klar gemacht zu haben; sonst könnte er nicht die Grösse, welche er ε nennt, als eine von der Natur der beiden Medien abhängige Constante ansehen; in Wirklichkeit ist ε dem Sinus des Winkels, unter welchem der longitudinale Strahl reflectirt wird, umgekehrt gleich. Folglich muss ε dem Sinus des Einfallswinkels umgekehrt proportional sein; einmal

kann also für kleine Einfallswinkel der Werth von ε gar nicht klein sein, so dass für solche Einfallswinkel die Haughtonschen Formeln nicht gelten; für grössere Einfallswinkel aber ist ε, und damit auch Q, von dem Einfallswinkel abhängig.

Bezeichnet μ den Brechungsquotienten, ε^2 das Verhältniss der beiden Elasticitätsconstanten, φ den Einfallswinkel, so ergiebt sich

$$Q = \frac{\mu^2 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\sin^2\varphi}} + \sqrt{1 - \frac{\mu^2\varepsilon^2}{\sin^2\varphi}}}{(\mu^2 - 1)^2}.$$

Demnach ist Q für kleine Einfallswinkel imaginär; erst von $\sin\varphi = \mu\varepsilon$ an erhält es einen positiven Werth, welcher mit wachsendem φ zunimmt von

$$\frac{\mu\sqrt{\mu^2 - 1}}{(\mu^2 - 1)^2} \quad \text{bis} \quad \frac{\mu^2\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \sqrt{1 - \mu^2\varepsilon^2}}{(\mu^2 - 1)^2};$$

dieser letztere Werth ist der von Haughton als allgemein giltig angegebene. Von einer Uebereinstimmung der richtig abgeleiteten Formel mit der Erfahrung kann nicht die Rede sein.

Seit Green ist der Widerspruch mit der Erfahrung, auf welchen eine streng mechanische Theorie der Reflexion und Brechung führt, darin gesucht worden, dass bei Ableitung der Formeln ein plötzlicher Uebergang von dem einen Aethermedium zum andern angenommen wird, während in der Wirklichkeit dieser Uebergang allmählig und stetig, wenn auch innerhalb einer äusserst dünnen Schicht, stattfinden muss. In der schon erwähnten Abhandlung hat J. W. Strutt durch Berücksichtigung einer solchen Uebergangsschicht auf Grund der Greenschen Theorie Formeln*) erhalten, welche ebenso gut, wie die Cauchyschen, mit den Beobachtungen übereinstimmen. Strutt nimmt an, dass die sogenannten longitudinalen Wellen, besser Oberflächenwellen, in einem Medium von anderer Dichtigkeit vor sich gehen, als die transversalen Lichtwellen, und diese Annahme ist insofern nicht widersinnig, als die transversalen Wellen sich in den beiden homogenen Medien ungeschwächt fortpflanzen, während die Oberflächenwellen nur in der Uebergangsschicht merklich sind, daher so gut wie ganz in dieser Schicht von besonderer Dichtigkeit verlaufen. Man kann deshalb wohl vermuthen, dass die Oberflächenwellen von dem veränderlichen Werth der Dichtigkeit in der Uebergangsschicht stark beeinflusst werden. Wenn aber Strutt diesem Einfluss dadurch Rechnung tragen will, dass er die Oberflächenwellen einfach in einem homogenen Medium von mittlerer Dichtigkeit stattfinden lässt, so fehlt diesem Verfahren jede Begründung. Die Uebereinstimmung mit den Beobachtungen bietet keinerlei Gewähr; denn es ist sehr fraglich, ob

*) J. W. Strutt, Phil. Mag. S. 4, Vol. 42, p. 96 u. 97.

die Uebergangsschicht einen solchen Einfluss ausüben kann, wie er in den Formeln Strutts zum Ausdruck gelangt.

Nun kann mit der Rechnung genau verfolgt werden, wie sich die Schwingungen durch eine Uebergangsschicht von stetig veränderlicher Dichtigkeit fortpflanzen, und ich habe diese Rechnung in der oben angeführten Abhandlung*) durchgeführt. Die Resultate bestätigen nicht, was Strutt vermuthet hat; so einfach, wie er annimmt, gestaltet sich die Wirkung der Uebergangsschicht keineswegs. Setzt man die Dicke der Uebergangsschicht gegen die Wellenlänge verschwindend klein, so gelten die Greenschen Formeln; giebt man aber jener Dicke einen grössern Werth, so beschränkt sich die Wirkung nicht auf die Oberflächenwellen. Wenigstens ist mir nicht gelungen, durch eine einfache Annahme über die Dicke der Uebergangsschicht und über die Aenderung der Dichtigkeit die Fresnelschen Gleichungen zu erhalten; dies müsste aber möglich sein, wenn Strutts Vermuthung zuträfe.

Demnach bleibt weiter zu untersuchen nöthig, durch welche Annahmen in Bezug auf Dichtigkeit und Elasticität und auf die Art ihrer Aenderung von dem einen Medium zum andern die Theorie mit der Erfahrung in Einklang zu bringen sei. Die von mir angestellten Rechnungen, auf welche ich eben hingewiesen habe, sind insoweit frei von unnöthiger Beschränkung, als die Elasticität der verschiedenen Aethermedien nicht von vornherein gleichgesetzt ist; dagegen erweist sich eine Verallgemeinerung nach einer andern Seite hin als möglich. Man braucht nämlich nicht nothwendig den Lichtäther incompressibel zu setzen, die Greensche Constante A unendlich gross; vielmehr kann die Möglichkeit einer ungeschwächten Fortpflanzung von longitudinalen Wellen bestehen bleiben, wenn nur von dem einen Medium zum andern ein solcher stetiger Uebergang stattfindet, dass die reflectirten und gebrochenen longitudinalen Strahlen keinen merklichen Theil der einfallenden lebendigen Kraft in Anspruch nehmen.

Um dies klarzulegen, nehmen wir, wie bei der eben angeführten Rechnung, die z-Axe senkrecht auf die Grenze, in das zweite Medium positiv; das erste homogene Medium erfülle den Raum $z < 0$, das zweite homogene Medium den Raum $z > c$, während zwischen den beiden Ebenen $z = 0$ und $z = c$ ein allmähliger Uebergang von dem einen zu dem anderen Medium stattfinde. Innerhalb dieser Uebergangsschicht wäre die Bewegung eine ganz beliebige; dagegen dürfte in dem ersten homogenen Medium kein longitudinaler Strahl von endlicher lebendiger Kraft reflectirt, ebenso wenig in dem zweiten Medium ein solcher Strahl gebrochen werden. Dies wäre von vornherein er-

*) Math. Ann. Bd. 5, p. 505 ff.

reich., wenn man für das eine homogene Medium, wie für das andere die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen unendlich gross setzte. Dann möchte man aber die entsprechende Annahme auch für die Uebergangsschicht machen müssen, und es ergäben sich die von mir abgeleiteten Formeln*), deren weitere Behandlung und Anpassung an die Beobachtungen auf grosse Schwierigkeiten stösst.

Doch bietet sich ein anderer, allgemeinerer Weg, mit der Erfahrung übereinstimmende Formeln zu gewinnen: Man lässt das Verhältniss der beiden Elasticitätsconstanten für den Aether zunächst unbestimmt, führt die Rechnung ganz allgemein durch und erhält in den beiden homogenen Medien neben den reflectirten und gebrochenen transversalen Lichtstrahlen noch einen reflectirten und einen gebrochenen longitudinal schwingenden Strahl. Nun kommt es darauf an, die beiden longitudinalen Strahlen zum Verschwinden und die transversalen Schwingungen mit den Beobachtungen in Einklang zu bringen; dies Beides gelingt vielleicht eher durch eine andere Annahme über das Verhältniss der beiden Elasticitätsconstanten, als die oben genannte, welche die erstere Forderung für sich allein am Einfachsten erfüllt. Schon vor längerer Zeit habe ich eine solche Rechnung angestellt; die Veröffentlichung unterblieb, weil das Ziel ebenso schwer erreichbar schien, wie auf dem früher verfolgten Wege. Allein jene Rechnungen sind, wie ich jetzt erkenne, mit einer unnöthigen Beschränkung behaftet; es war nicht beachtet, dass im Innern der beiden homogenen Medien ein verschiedener Druck stattfinden kann. Diese Möglichkeit hat vielleicht auch hier Bedeutung, da in Greens Theorie der Doppelbrechung ein verschiedener Druck nach drei aufeinander rechtwinkligen Richtungen muss angenommen werden, falls die Schwingungen senkrecht auf die Polarisationsebene stattfinden sollen. Ferner ist auch noch der Zusammenhang festzustellen zwischen der Betrachtungsweise Greens und den beiden verschiedenen Fassungen, deren die Bedingung der Incompressibilität im Falle einer veränderlichen Aetherdichtigkeit fähig ist. Die weitere Erörterung muss ich einer späteren Gelegenheit vorbehalten.

Leipzig, im Mai 1886.

---

*) Math. Ann. Bd. 6, p. 549.

Ueber eine Eigenschaft der cubischen Formen mit beliebig vielen Veränderlichen.

Von

A. Voss in München.

Ist f eine Form s^{ten} Grades von p homogenen Variabelen, H ihre Hesse'sche Form, H_H die Hesse'sche Form der letzteren, so ist bekanntlich im binären Gebiete, sobald $s > 3$,

$$H_H = Pf + QH \quad (1)$$

*). Für ternäre Formen findet ein ähnlicher Satz allgemein nur statt, wenn f vom dritten Grade ist; man hat dann

$$H_H = Af + BH,$$

wo A und B die beiden Invarianten von f sind. Neuerdings hat Herr Bauer gezeigt, dass ein ähnliches Theorem für cubische Formen auch im quaternären Gebiete besteht, indem er, von der canonischen Form von f ausgehend, direct die Existenz einer Relation von der Form (1) erwies**). Ich beabsichtige in dieser Note zu zeigen, *dass der Satz* (1) *für cubische Formen mit beliebig viel Variabelen Gültigkeit hat.*

Man kann sich dazu zunächst einer geometrischen Ueberlegung bedienen. Eine Form f mit p homogenen Variabelen x stellt, gleich Null gesetzt, eine Mannigfaltigkeit von $p-2$ Dimensionen, eine M_{p-2}, im projectiven Raume von $p-1$ Dimensionen vor, welche als *Fläche* f bezeichnet werden möge. Die Tangentenebene derselben im Punkte x hat die Gleichung

$$\sum_i z_i f_i = 0; \quad (2)$$ ***)

*) Salmon-Fiedler, Algebra d. linearen Transformationen, S. 273.

**) G. Bauer. Von der Hesse'schen Determinante der Hesse'schen Fläche einer Fläche dritter Ordnung. Münch. Acad. XIV. 1883.

***) Da die Summationen sich immer von 1 bis p erstrecken, so genügt es, die Indices anzugeben, über welche summirt wird. Unter den $f_{ikl}\ldots$ sind im folgenden immer die entsprechenden Differentialquotienten von f nach x zu verstehen.

sie wird *stationär*, d. h., es fallen zwei unendlich benachbarten Punkten entsprechende Tangentialebenen zusammen, wenn es möglich ist, den Differentialen dx solche Werthe beizulegen, dass die p Gleichungen

$$\sum_k f_{ik}\,dx_k = \varrho f_i, \tag{3}$$

für

$$i = 1, 2, \ldots, p$$

bestehen, während zwischen den dx noch die Relation

$$\sum_i a_i\,dx_i = 0 \tag{4}$$

mit willkürlichen Coefficienten a stattfindet. Die Bedingungen (3) und (4) führen, wie man leicht sieht, auf

$$\mathsf{H} = 0.$$

Nennt man einen Punkt von f, für den eine stationäre Tangentenebene existirt, einen parabolischen Punkt, so hat man:

Die parabolischen Punkte von f bilden eine M_{p-3}, welche durch die Hesse'sche Fläche H *von f aus f ausgeschnitten wird.*

Vermöge der p Gleichungen

$$\sum_i y_i f_{ik} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, p \tag{5}$$

sind zwei Flächen H und S, gebildet aus den correspondirenden Punkten x und y, eindeutig auf einander bezogen; S kann die zu H gehörige Steiner'sche Fläche genannt werden*). Bezeichnet man die ersten Unterdeterminanten der Hesse'schen Form durch H_{ik}, so ergiebt sich aus (5) für $\mathsf{H} = 0$

$$\mu y_i y_k = \mathsf{H}_{ik}. \tag{6}$$

Aus (5) folgt ferner durch Differentiation

$$\sum_i dy_i f_{ik} + \sum_{i,l} y_i f_{ikl}\,dx_l = 0,$$

und hieraus

$$\sum_i f_i\,dy_i = 0, \tag{7}$$

d. h. *die Steiner'sche Fläche ist die Enveloppe der Polarebenen der Punkte von* H *in Bezug auf f.* Soll nun die Tangentenebene von S in einem Punkte y stationär sein, so müssen nach (7) die p Bedingungen

$$\sum_k f_{ik}\,dx_k = \varrho f_i, \quad i = 1, 2, \cdots, p,$$

nebst den Gleichungen

*) Vgl. meine Arbeit „Zur Theorie der conjugirten Kernflächen", diese Annalen Bd. XXVII.

$$\sum_i \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_i}\, dx_i = \sum_{i,k,l} \mathsf{H}_{ik} f_{ikl}\, dx_i = \mu \sum_{i,k,l} y_i y_k f_{ikl}\, dx_i = 0,$$

$$\sum_i a_i\, dx_i = 0$$

für beliebige Werthe der a erfüllt sein. Diese Gleichungen erfordern, dass für *beliebige* Werthe der Grössen a, c die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1p} & f_1 & c_1 \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2p} & f_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{p1} & f_{p2} & \cdots & f_{pp} & f_p & c_p \\ \mathsf{H}_1 & \mathsf{H}_2 & \cdots & \mathsf{H}_p & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_p & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

in welcher H_i für $\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_i}$ gesetzt ist, verschwindet. Durch eine einfache Reduction erhält man aber, falls s den Grad von f bedeutet, mit Hülfe von (6)

$$(s-1)\,\Delta = -\mu\, a_x c_y \sum_i \mathsf{H}_i y_i.$$

Die Bedingung $\mu = 0$ sagt aus, dass alle ersten Unterdeterminanten von H verschwinden. Dies findet statt für eine M_{p-4} auf H, welche aus Knotenpunkten von H gebildet ist; sie heisse $\varkappa$. Jedem dieser Knotenpunkte von H entspricht eine *Gerade*, d. h. ein lineares Gebilde einer Dimension, mit stationärer Tangentenebene; auf einer solchen Geraden befinden sich $p-1$ singuläre Punkte, die im allgemeinen einer Cuspidalmannigfaltigkeit M_{p-3} von S angehören. Die M_{p-4} kann wieder Theile enthalten, für die auch noch alle zweiten Unterdeterminanten von H verschwinden, den Punkten derselben entsprechen dann lineare Strahlbüschel, längs deren die Tangentenebene von S stationär bleibt, u. s. w. *Das Gebiet* $p-3^{ter}$ *Dimension* σ *auf* S, *welches* $\varkappa$ *entspricht, bildet eine singuläre parabolische* M_{p-3} *auf* S. Die *eigentliche* parabolische M_{p-3} von S ist daher charakterisirt durch die Gleichung

$$\sum_i \mathsf{H}_i y_i \equiv \sum_{i,k,l} y_i y_k y_l f_{ikl} = 0.$$

Das heisst: *Die Tangentenebene eines Punktes* x *der Hesse'schen Fläche geht nur dann durch den zugeordneten Punkt* y *der Steiner'schen Fläche, wenn der letztere der eigentlichen parabolischen* M_{p-3} *von* S *angehört, und die Punkte* x *bilden auf* H *eine* M_{p-3}, *längs deren sich die Flächen*

$$H = 0 \quad \textit{und} \quad \sum_{i,k} H_{ik} H_i H_k = 0$$

berühren.

Ist insbesondere f eine *cubische* Form, *so fallen* S *und* H *zusammen**), und man hat den Satz:

Die eigentliche parabolische M_{p-3} *der cubischen Fläche* f *ist zugleich eigentliche parabolische* $M_{\mu-3}$ *von* H.

Für eine cubische Form f, die selbst keine Knotenpunkte enthält — welche Voraussetzung übrigens unwesentlich ist — *kann zugleich* H *keine anderen Knotenpunkte, als die in der genannten* M_{p-4} *auftretenden, besitzen.* Denn aus den Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial x_l} = \mu \sum_{i,k} f_{ikl} y_i y_k = 0,$$

$$l = 1, 2, \cdots, p$$

folgt entweder $\mu = 0$, oder

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}\right) = 0$$

für $x = y$; d. h. es müsste y ein Knotenpunkt von f sein. Bei den cubischen Formen enthält also die M_{p-4} alle singulären Punkte von H. Einem jeden derselben entspricht im allgemeinen eine Gerade mit constanter Tangentialebene auf H. Da die Determinante

$$\begin{vmatrix} \sum_n (y_n f_{nik}) & \alpha_i \\ \beta_k & 0 \end{vmatrix}$$

bei beliebigem α, β für $H = 0$ den Factor $\alpha_x \beta_x$ enthält, so folgt weiter:

Auf jeder solchen Geraden von H *liegen* $p - 1$ *Knotenpunkte von* H, *und umgekehrt gehen durch jeden Knoten von* H $p - 1$ *dieser Geraden.***) Sie bilden die singuläre M_{p-3} der parabolischen Punkte auf H, welche mit P bezeichnet werden möge.

---

*) Dabei mag man bemerken, dass, so lange f keinen Knotenpunkt hat, correspondirende Punkte x und y nie zusammenfallen können.

**) Man vergleiche die bekannten Eigenschaften von H bei der Fläche dritter Ordnung. Bei einer Form s^{er} Ordnung mit p Variabelen geht durch jeden ihrer Punkte eine M_{p-s-2} von Geraden, wenn $s \leq p - 2$. Ist aber $s = p - 2 + \mu$, so wird es eine M_{2p-s-5} von Geraden auf derselben geben, so lange noch $s \leq 2p - 5$. Eine cubische Form enthält daher eine M_{2p-8} von Geraden. Für $p = 5$ gehen durch jeden Punkt der cubischen Form 6 Gerade, welche eine M_2 auf der Form bilden. Eine solche Gerade ist aber im allgemeinen nicht mehr Tangente von H in denjenigen Punkten, wo sie von H getroffen wird; dies ist vielmehr nur bei $= 4$ der Fall.

Aus den eben angeführten Betrachtungen kann man bereits folgern (vgl. die Betrachtung gegen den Schluss dieser Note), dass für eine cubische Form mit beliebig vielen Variabelen der Satz 1) gilt. Die wirkliche Darstellung von H_H in dieser Form ist eine Aufgabe der Formentheorie. Nun lässt sich allerdings, was ich hier nicht ausführen kann, für quaternäre Formen eine solche Darstellung mit Hülfe der symbolischen Methoden ganz allgemein geben. Aber bei einer beliebigen Anzahl von Variabelen erscheint eine directe Untersuchung von H_H auf diesem Wege so weitläufig, dass ich vorzog, ein anderes Verfahren einzuschlagen, durch welches auf *rein algebraischem Wege* der in Rede stehende Satz bewiesen wird. Dasselbe stützt sich auf eine eigenthümliche Identität, welche für alle cubischen Formen gilt, und die man auf folgende Art erhalten kann.

Bezeichnet man der Kürze halber die Unterdeterminanten H_{ik} durch y_{ik}, so bestehen für das System von zweimal $\frac{1}{2}p(p+1)$ Grössen f_{ik}, y_{ik} die Identitäten

$$\begin{aligned} H &= \sum_n y_{ni} f_{ni}, \\ 0 &= \sum_n y_{ni} f_{nk}, \end{aligned} \tag{8}$$

für ein beliebiges

$$i = 1, 2, \cdots, p; \quad k = 1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, p.$$

Aus ihnen folgt durch Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_l} &= \sum_n \left(\frac{\partial y_{ni}}{\partial x_l} f_{ni} + y_{ni} f_{nil} \right), \\ 0 &= \sum_n \left(\frac{\partial y_{ni}}{\partial x_l} f_{nk} + y_{ni} f_{nkl} \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit x_i, die übrigen mit den x_k und addirt, so entsteht

$$x_i \frac{\partial H}{\partial x_l} = (s-1) \sum_n \frac{\partial y_{ni}}{\partial x_l} f_n + \delta_{il} H(s-2), \text{*)}$$

wo s der Grad von f ist, und δ_{il} das Kronecker'sche Symbol bezeichnet; also wenn man mit den willkürlichen Grössen α_i multiplicirt und addirt

$$\alpha_x \frac{\partial H}{\partial x_l} = (s-1) \sum_n \frac{\partial \eta_n}{\partial x_l} f_n + H \alpha_l (s-2), \tag{10}$$

*) Diese Gleichungen sind schon von Jacobi, Crelle's Journal, Bd. XL, angegeben.

falls

$$\eta_n = \sum_i \alpha_i y_{ni} \tag{11}$$

gesetzt wird. Wird nunmehr eine cubische Form $s = 3$ vorausgesetzt, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial x_l \partial x_m} = \sum_n \frac{\partial^2 y_{ni}}{\partial x_l \partial x_m} f_{ni} + \sum_n \left(\frac{\partial y_{ni}}{\partial x_l} f_{nim} + \frac{\partial y_{ni}}{\partial x_m} f_{nil} \right),$$

$$0 = \sum_n \frac{\partial^2 y_{ni}}{\partial x_l \partial x_m} f_{nk} + \sum_n \left(\frac{\partial y_{ni}}{\partial x_l} f_{nkm} + \frac{\partial y_{ni}}{\partial x_m} f_{nkl} \right).$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit y_{si}, die übrigen $p - 1$ mit

$$y_{s1},\ y_{s2},\ \cdots,\ y_{s,i-1},\ y_{s,i+1},\ \cdots,\ y_{sp},$$

und addirt, so findet man

$$y_{is} \frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial x_l \partial x_m} = \mathsf{H} \frac{\partial^2 y_{is}}{\partial x_l \partial x_m} + \sum_{k,n} \left(\frac{\partial y_{ni}}{\partial x_l} f_{nkm} y_{sk} + \frac{\partial y_{ni}}{\partial x_m} f_{nkl} y_{sk} \right),$$

oder, wenn man mit den willkürlichen Grössen $\alpha_i \alpha_s$ multiplicirt und summirt

$$R_x \frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial x_l \partial x_m} = \mathsf{H} \frac{\partial^2 R_x}{\partial x_l \partial x_m} + \sum_{n,k} \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial x_l} \eta_k f_{nkm} + \frac{\partial \eta_n}{\partial x_m} \eta_k f_{nkl} \right), \tag{12}$$

falls man mit R_x die Form

$$\sum_{i,k} y_{ik} \alpha_i \alpha_k = \sum_n \alpha_n \eta_n, \tag{13}$$

d. h. die mit dem negativen Zeichen genommene mit den α geränderte Determinante der f_{ik}

$$R_x = -\begin{vmatrix} f_{ik} & \alpha_i \\ \alpha_k & 0 \end{vmatrix}$$

bezeichnet.

Man schreibe nun die Gleichungen (9) in der Gestalt

$$\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_l} = \sum_n \frac{\partial y_{ns}}{\partial x_l} f_{ns} + \sum_h f_{hsl} y_{hs},$$

$$0 = \sum_n \frac{\partial y_{ns}}{\partial x_l} f_{nk} + \sum_h f_{hkl} y_{hs},$$

und multiplicire die erste mit $\frac{\partial y_{is}}{\partial x_m}$, die letzten $p - 1$ mit

$$\frac{\partial y_{i1}}{\partial x_m}, \cdots, \frac{\partial y_{i,s-1}}{\partial x_m}, \frac{\partial y_{i,s+1}}{\partial x_m}, \cdots, \frac{\partial y_{ip}}{\partial x_m},$$

und addire wieder, so entsteht

$$\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_i}\frac{\partial y_{is}}{\partial x_m}=\sum_{n,k}\frac{\partial y_{ns}}{\partial x_i}\frac{\partial y_{ik}}{\partial x_m}f_{nk}+\sum_{h,k}f_{hkl}\frac{\partial y_{ik}}{\partial x_m}y_{hs},$$

oder, wenn man wieder mit $\alpha_i\alpha_s$ multiplicirt und addirt

$$\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_i}\frac{\partial R}{\partial x_m}=\sum_{n,k}\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_n}{\partial x_m}f_{nk}+\sum_{n,k}f_{knl}\frac{\partial \eta_n}{\partial x_m}\eta_k. \tag{14}$$

Demnach wird aus (12)

$$R_x\frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial x_i\partial x_m}=\mathsf{H}\frac{\partial^2 R}{\partial x_i\partial x_m}+\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_i}\frac{\partial R}{\partial x_m}+\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_m}\frac{\partial R}{\partial x_i}-2\sum_{n,k}\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_n}{\partial x_m}f_{nk},$$

und wenn man noch mit α_x multiplicirt und die Gleichungen (10) zur Anwendung bringt, erhält man

$$\alpha_x R_x\frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial x_i\partial x_m}=\alpha_x\mathsf{H}\frac{\partial R_x}{\partial x_i\partial x_m}+\mathsf{H}\left(\frac{\partial R_x}{\partial x_m}\alpha_i+\frac{\partial R_x}{\partial x_i}\alpha_m\right)+2W_{im}, \tag{15}$$

wo

$$W_{im}=\sum_n\left(\frac{\partial R_x}{\partial x_m}\frac{\partial \eta_n}{\partial x_i}+\frac{\partial R_x}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_n}{\partial x_m}\right)f_n-\sum_{n,k}\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_n}{\partial x_m}f_{nk}\alpha_x.$$

Bildet man nun die Hesse'sche Form auf beiden Seiten der identischen Relation (15), so entsteht linker Hand

$$\alpha_x^p R_x^p \mathsf{H}_H.$$

Rechter Hand tritt nur *ein* Glied auf, welches den Factor H *nicht* enthält; es ist die mit 2^p multiplicirte Determinante W der W_{im}

$$W=\left|\sum_n\left(\frac{\partial R_x}{\partial x_m}\frac{\partial \eta_n}{\partial x_i}+\frac{\partial R_x}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_n}{\partial x_m}\right)f_n-\sum_{n,k}\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_n}{\partial x_m}f_{nk}\alpha_x\right|.$$

Aber diese Determinante erkennt man leicht als das Product zweier Factoren. Setzt man nämlich

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial \eta_p}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \eta_p}{\partial x_p}\end{vmatrix}, \tag{16}$$

$$\Delta=|\,\alpha_i f_k+\alpha_k f_i-f_{ik}\alpha_x\,|,$$

so wird

$$W=D^2\Delta.$$

Für Δ erhält man weiter

$$\Delta = (-1)^p \begin{vmatrix} \alpha_x f_{ik} & \alpha_i & f_i \\ f_k & 1 & 0 \\ \alpha_k & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

und, wenn man die letzte Horizontal- und Verticalreihe mit $2\alpha_x$ multiplicirt, und dann die ersten p Reihen, mit den $x_1 \cdots x_p$ multiplicirt, von dieser subtrahirt

$$\Delta = (-1)^p \frac{1}{(2\alpha_x)^2} \{\alpha_x^{p+2} \mathsf{H} - 6f\alpha_x^p R_x\}.$$

Hiermit ist zunächst die identische Relation

$$\alpha_x^p R_x^p \mathsf{H}_H = \mathsf{A}\mathsf{H} - (-1)^p \alpha_x^{p-2} \cdot 3 \cdot 2^{p-1} D^2 R_x f \tag{17}$$

erwiesen, welche für alle cubischen Formen gilt. Man kann dieselbe durch eine etwas andere Bildung der Determinante der auf der rechten Seite stehenden Grössen nicht unerheblich vereinfachen. Setzt man zur Abkürzung

$$p_{lm} = \sum_{n,k} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_l} \frac{\partial \eta_m}{\partial x_m} f_{nk}, \quad r_{lm} = \frac{\partial^2 R_x}{\partial x_l \partial x_m}, \quad \frac{\partial \eta_n}{\partial x_m} f_n = s_m,$$

$$\alpha_m \mathsf{H} + 2s_m = q_m,$$

so wird

$$\alpha_x^p R_x^p \mathsf{H}_H = \begin{vmatrix} (\mathsf{H} r_{lm} - 2p_{lm})\alpha_x, & \frac{\partial R}{\partial x_m}, & -q_m \\ \frac{\partial R}{\partial x_l} & 1 & 0 \\ -q_l & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

oder wegen

$$\sum_m p_{lm} x_m = (p-1)\,\mathsf{H} \frac{\partial R_x}{\partial x_l},$$

$$\sum_m r_{lm} x_m = (p-2) \frac{\partial R}{\partial x_l},$$

$$\alpha_x^p R_x^p \mathsf{H}_H = -\frac{(p-1)R_x}{p\alpha_x \mathsf{H}} \begin{vmatrix} (\mathsf{H} r_{lm} - 2p_{lm})\alpha_x, & \alpha_m \mathsf{H} + 2s_m \\ \alpha_l \mathsf{H} + 2s_l & 0 \end{vmatrix}, \tag{18}$$

so dass der Factor R_x rechts ausgesondert ist. Der dabei eingeführte Nenner H lässt sich wieder entfernen. Entwickelt man nämlich die Determinante nach Potenzen von H, so erhält man für das von H freie Glied

$$2^{p+1}(-1)^{p-1} \alpha_x^{p-1} \begin{vmatrix} p_{lm} & s_l \\ s_m & 0 \end{vmatrix} = (-1)^p \cdot 3 \cdot 2^p \alpha_x^{p-1} D^2 f \mathsf{H}. \tag{19}$$

Multiplicirt man ferner die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{ik} & h_i \\ f_k & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} h_x \mathsf{H},$$

mit D^2, und setzt

$$\sum_n \frac{\partial \eta_n h_n}{\partial x_l} = k_l,$$

so erhält man

$$\begin{vmatrix} p_{lm} & k_l \\ s_m & 0 \end{vmatrix} = -\frac{D^2}{2} h_x \mathsf{H}, \tag{20}$$

und kann zugleich rechter Hand Dh_x als ganze Function von x und den völlig willkürlichen Grössen k ausdrücken. Multiplicirt man endlich die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{ik} & f_i & h_i \\ f_k & 0 & 0 \\ h_l & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(h_x^2 \mathsf{H} + 3f R_h),$$

mit D^2, so ergiebt die für die völlig willkürlichen Grössen k gültige Formel

$$\begin{vmatrix} p_{lm} & s_l & k_l \\ s_m & 0 & 0 \\ k_l & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{D^2}{4}(h_x^2 \mathsf{H} + 3f R_h),$$

dass auch alle ersten Unterdeterminanten der in (19) links auftretenden Determinante noch von der Form

$$\beta \mathsf{H} + \gamma f$$

sind. Aus diesen und aus Determinanten von der Form (20) ist aber der Coefficient von H in der Entwicklung der Determinante rechter Hand in (18) zusammengesetzt. Man kann daher die Identität (17) auch in der folgenden Form geben

$$a_x^2 R_x^{p-1} \mathsf{H}_H = A' f + B' \mathsf{H}.^*) \tag{17a}$$

Man kann endlich die Functionaldeterminante (16) noch umformen. Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_i} = \sum_n \left(\frac{\partial y_{ni}}{\partial x_l} f_{ni} + y_{ni} f_{nil} \right),$$

$$0 = \sum_n \left(\frac{\partial y_{nk}}{\partial x_l} f_{ni} + y_{nk} f_{nil} \right),$$

erhält man

*) Dass diese Identität bei beliebigem p nicht weiter reducirt werden kann, geht aus dem unten erwähnten Falle $p = 2$ hervor.

$$\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_i}\alpha_i = \sum_n \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial x_i} f_{ni} + \eta_n f_{nii}\right).$$

Berechnet man hieraus D, so ergiebt sich leicht

$$D\mathsf{H} = (-1)^p \begin{vmatrix} \sum_n (\eta_n f_{nik}) & \alpha_i \\ \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_k} & 1 \end{vmatrix}.$$

Beachtet man, dass

$$\sum_{n,i} \eta_n f_{nii} x_i = \alpha_i \mathsf{H}$$

wird, so ergiebt sich hieraus

$$\mathsf{H}D = (-1)^p (p-1) \left| \sum_n (\eta_n f_{nik}) \right|, \tag{21}$$

wo also rechter Hand die Hesse'sche Form von f, gebildet in Bezug auf die Grössen η, steht. Da die Benutzung der letzteren Gleichung den Nenner H wieder einführen würde, ist es zweckmässiger, statt derselben die Gleichung

$$-\alpha_x D\mathsf{H} = (-1)^p \begin{vmatrix} \sum_n (\eta_n f_{nik}) & \alpha_i & \alpha_i \mathsf{H} \\ \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_k} & 1 & p\mathsf{H} \\ \alpha_k & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

zu bilden, aus welcher unmittelbar

$$\alpha_x D = (-1)^p (p-1) R_\eta \tag{22}$$

entsteht.

Aus der Identität (17) oder (17 a) ergeben sich einige allgemeine Bemerkungen. Verschwinden H und H_H, d. h. betrachtet man die parabolischen Punkte von H, so muss entweder f oder $D^2 R_x$ verschwinden. Im ersten Falle hat man die eigentliche parabolische Curve von H. R_x dagegen kann nur verschwinden, wenn H mit allen ersten Unterdeterminanten verschwindet, d. h. für die M_{p-n} der Knotenpunkte von H. Zugleich wird für $\mathsf{H} = 0$, wegen

$$\eta_k = \sum \alpha_i y_{ik} = \mu y_k \alpha_y,$$

$$\alpha_x D = (-1)^p (p-1) \mu^{p-1} (\alpha y)^{p-1} R_y, \tag{23}$$

so dass dann auch D verschwindet. Und soll umgekehrt für $\mathsf{H} = 0$ D verschwinden, ohne dass R_x Null wird, so muss der Punkt y ein Knotenpunkt von H sein. Vertauscht man andererseits in der Identität (17) x mit y, was wegen der Reciprocität der Form H geschehen darf,

und versteht alsdann unter y irgend einen Punkt der singulären parabolischen M_{p-3}, welche oben mit P bezeichnet wurde, so verschwindet R_y nicht, dagegen verschwindet jetzt wegen $R_x = 0$ nach (23) die Functionaldeterminante D. Man hat also nach (17) den Satz:

Die Mannigfaltigkeit P gehört der Fläche $\mathsf{H}_H = 0$ doppeltzählend an, was übrigens auch daraus geschlossen werden kann, dass sie aus linearen Punktreihen mit constanter Tangentenebene gebildet wird.

In der Identität (17a) kann man nicht allgemein den links auftretenden Factor von H_H entfernen, obgleich derselbe die völlig willkürlichen Grössen α enthält, ohne dass die rechte Seite aufhört, von der Form $Af + B\mathsf{H}$ zu sein. Für eine *binäre cubische Form* wird nämlich R_x linear, und man findet aus (17a)

$$\alpha_x^2 R_x \mathsf{H}_H = \mathsf{H} \begin{vmatrix} g_{im} & \alpha_i \\ \alpha_m & 0 \end{vmatrix} + 2D\mathsf{H} \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_m} & \alpha_m \\ x_i & 0 \end{vmatrix} - 6D^2 f.$$

Hier erhält man aber, für $f = (a_x)^3$,

$$D = 18(a\alpha)(b\alpha)(ab)^2,$$
$$R_x = 6(a\alpha)^2 a_x,$$

während die Factoren von H und $2D\mathsf{H}$ in der eben angegebenen Identität werden

$$6 \cdot 36 \cdot (ab)(cb)(a\alpha)^2 (c\alpha)^2 b_x \quad \text{und} \quad 6(a\alpha)^2 a_x.$$

Nach einigen einfachen Umformungen entsteht demnach, wenn $\alpha_1 = -z_2$, $\alpha_2 = +z_1$ gesetzt wird

$$a_x a_z^2 (zx)^2 \mathsf{H}_H = \left[\frac{1}{2} \mathsf{H}_{(x)} f_{(z)} \sum_i z_i \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_i} - \mathsf{H}_{(z)}^2 f_{(x)}\right] - 54(zx)\, \mathsf{H}_{(x)} Q_{(z)},$$

wo

$$Q_{(z)} = (ab)^2 (cb)\, a_z c_z^2;$$

welche Gleichung nur zeigt, wie aus dem rechter Hand eingeklammerten, für $z = x$ verschwindenden, Terme der Factor (zx) entfernt werden kann; H_H ist übrigens die Discriminante der binären cubischen Form.

Für eine Form f mit mehr als zwei homogenen Variabelen muss dagegen der Factor $\alpha_x^2 R_x^{p-1}$ entfernt werden können. Verschwinden nämlich f und H, so muss auch H_H verschwinden. Denn R_x kann nur verschwinden, wenn alle ersten Unterdeterminanten von H Null sind; dann verschwindet aber auch H_H. *Demnach verschwindet H_H überall, wo f und H verschwinden.* Nun hat aber Herr Nöther*) untersucht, unter welchen Bedingungen hieraus eine Darstellung von der Form (1) folgt. Setzt man voraus, dass f überhaupt keine singu-

*) Diese Annalen Bd. VI, S. 351—359.

lären Elemente enthält, was, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, geschehen darf, so ist, da eine specielle Beziehung von f und H auch in den singulären Punkten von H im allgemeinen nicht stattfindet, hierzu erforderlich, dass H_H mindestens q-fach verschwindet, wenn H längs einer f und H gemeinsamen Mannigfaltigkeit q-fach Null ist. Nun gilt aber der allgemeine, leicht zu beweisende Satz:

*Wenn eine Form von p homogenen Variabelen einen q-fachen Knotenpunkt hat, so hat ihre Hesse'sche Form im allgemeinen einen $pq - 2(p-1)$-fachen Knotenpunkt, dessen „Knotenkegel" aus zwei Theilen besteht, von denen der erstere mit dem Knotenkegel von f zusammenfällt, während der zweite aus dem „Hesse'schen Kegel" des letzteren gebildet wird**).

Für $p = 5$ tritt übrigens nur eine einfache Mannigfaltigkeit von Knotenpunkten von H auf, so dass auf f selbst nur eine endliche Anzahl singulärer Punkte von H liegt.

München, 8. März 1886.

---

*) Für $p = 4$ findet man diesen Satz in der Arbeit des Herrn Rohn, diese Annalen Bd. XXIII, bereits ausgesprochen.

Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen.

Von

A. Voss in München.

Man verdankt Herrn Noether die für die Theorie der algebraischen Curven (und auch für höhere Mannigfaltigkeiten) fundamentale Untersuchung über die Frage, welchen Bedingungen eine Curve (Fläche etc.) $F(xy) = 0$ zu genügen habe, damit F von der Form $Af + B\varphi$ sei, wo A, B, f, φ wieder ganze rationale Functionen von x, y sind. Dem Beweise für den einfachen Fall, dass jene Darstellung stets möglich ist, wenn F durch sämmtliche als einfache Punkte von $f = 0$, $\varphi = 0$ vorausgesetzte Schnittpunkte dieser beiden Curven hindurchgeht (Math. Annalen II, S. 314), welcher später von Herrn Bacharach in seiner Dissertation (Erlangen 1881) reproducirt wurde*), hat Herr Noether im VI. Bande dieser Annalen eine für alle Fälle gültige Betrachtung hinzugefügt. Aber die dort gegebene höchst scharfsinnige Darstellung dürfte einige Schwierigkeiten bieten, welche es wünschenswerth erscheinen lassen, das genannte Theorem, dessen strenger Beweis um so wichtiger erscheint, als auf demselben eine grosse Zahl weiterer und tiefgehender Untersuchungen, insbesondere von Herrn Noether selbst, beruhen, in einer einfacheren Weise darlegen zu können. Auf diesen Gegenstand beziehen sich die folgenden Bemerkungen.

Auch Herr Halphen hat**) einen Beweis für die in Rede stehende Frage gegeben. Einerseits aber setzt derselbe den Beweis für den einfachen Fall bereits voraus, andererseits dürfte die auf einem Grenzübergange, resp. der Methode der Variation der Constanten, beruhende Verallgemeinerung desselben nicht durchsichtig genug sein, um einen rein algebraischen Beweis entbehrlich zu machen. Bei der so wesentlichen Aenderung überdies, welche die Bedingungen der Darstellbarkeit von F in der obigen Form erfahren, sowie f und φ specielle

*) Siehe auch Band 26 dieser Annalen, pag. 275 ff.

**) Sur un théorème d'algèbre, Bull. de la société math. de France, tome V, pag. 160.

Singularitäten in einem gemeinsamen Punkte annehmen, scheint es äusserst umständlich, einen solchen Grenzübergang in völlig befriedigender Weise klar zu legen.

§ 1.

Es seien f und φ zwei ganze rationale Functionen von x und y, deren Grad in y der m^{te} und n^{te} sei, von denen vorausgesetzt werden möge, was durch eine lineare Substitution stets erreichbar ist, dass y^m und y^n in f und φ in nicht verschwindende Constanten multiplicirt sind. Eine beliebige ganze rationale Function derselben Variabelen W wird man immer in eine solche Form bringen können, dass

$$W = F + Af + B\varphi,$$

wo F eine Function ist, deren Grad in y dann $\leq m + n - 1$ vorausgesetzt werden kann. Nach einem bekannten Satze hat man nun, wenn

(1)
$$\begin{aligned} f &= A_0 + A_1 y + \cdots + A_m y^m, \\ \varphi &= B_0 + B_1 y + \cdots + B_n y^n, \\ F &= C_0 + C_1 y + \cdots + C_{m+n-1} y^{m+n-1}, \end{aligned}$$

(2)
$$FR = Af + B\varphi,$$

oder

(3)
$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \ldots & f \\ 0 & A_0 & A_1 & \ldots & fy \\ 0 & 0 & A_0 & \ldots & fy^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_0 & B_1 & B_2 & \ldots & \varphi \\ 0 & B_0 & B_1 & \ldots & \varphi y \\ 0 & 0 & B_0 & \ldots & \varphi y^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_0 & C_1 & C_2 & \ldots & F \end{vmatrix} = 0,$$

wo R die in Bezug auf y gebildete Sylvester'sche Resultante der beiden Formen f und φ bedeutet. Die in (3) enthaltene Dartellung von F ist bei beliebigen Parallelverschiebungen des Coordinatensystemes absolut invariant. Diese sehr nahe liegende Bemerkung kann man übrigens leicht auch ganz direct beweisen, indem man die Determinante in (3) mit der $m + n$-reihigen Determinante H multiplicirt, deren erste Horizontalreihe aus den Elementen α^0, α^1, $\alpha^2 \ldots \alpha^{m+n-1}$, deren folgende aus den Ableitungen derselben nach der beliebigen Grösse α gebildet sind, und dann durch das Product

$$(1 \,.\, 2!\, 3!\, 4! \ldots (m+n-1)!)$$

dividirt. Man erhält dann durch eine einfache Reduction der so gebildeten Determinante an Stelle der linken Seite von (3)

$$\begin{vmatrix} f\alpha & f'\alpha & \frac{f''\alpha}{2} \cdots & f \\ 0 & f\alpha & f'\alpha \cdots & f(y-\alpha) \\ 0 & 0 & f\alpha \cdots & f(y-\alpha)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi\alpha & \varphi'\alpha & \frac{\varphi''\alpha}{2} \cdots & \varphi \\ 0 & \varphi\alpha & \varphi'\alpha \cdots & \varphi(y-\alpha) \\ 0 & 0 & \varphi\alpha \cdots & \varphi(y-\alpha)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F\alpha & F'\alpha & \frac{F''\alpha}{2} \cdots & F \end{vmatrix},$$

aus welcher Form die obige Behauptung hervorgeht.

Soll nun F von der Form $af + b\varphi$ selbst sein, so muss jeder in R enthaltene Factor in der rechten Seite von (2) entfernt werden können, ohne dass dadurch die Form derselben geändert wird, und man hat nur zu ermitteln, welches die Bedingungen sind, unter denen für jeden f und φ gemeinsamen Punkt eine solche Theilbarkeit stattfindet.

Für einen solchen Punkt sei $R = tR'$, so dass also R den Factor t enthält, durch den die in demselben vereinigten gemeinsamen Punkte von f und φ bestimmt sind. Es sei ferner

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 y + \cdots + \alpha_{n-1} y^{n-1}, \tag{4}$$
$$B = \beta_0 + \beta_1 y + \cdots + \beta_{m-1} y^{m-1},$$

so ist nach Voraussetzung

$$FR' = A'f + B'\varphi. \tag{5}$$

Die beiden Polynome A', B' kann man jedenfalls in der Form

$$a_0 + a_1 y + \cdots + a_{n-1} y^{n-1} + H\varphi,$$
$$b_0 + b_1 y + \cdots + b_{m-1} y^{m-1} + Kf,$$

voraussetzen. Durch Subtraction von (2) und (5) entsteht

$$0 = f \sum_1^{n-1} (\alpha_i - t a_i) y^i + \varphi \sum_1^{m-1} (\beta_i - t b_i) y^i - tf\varphi(H+K),$$

welche Identität nur bestehen kann, wenn $H + K = 0$, da anderenfalls der erste Term, welcher y nur in der $m + n - 1$ Dimension enthält, durch $f\varphi$ theilbar sein müsste. Aber jener Term selbst kann nur verschwinden, wenn sämmtliche

$$\alpha_i - t a_i, \quad \beta_i - t b_i$$

verschwinden, da f und φ, welche an sich nicht als irreducibel vorausgesetzt zu werden brauchen, doch wenigstens keinen Factor in y gemeinsam haben werden.

Und so hat man folgenden Satz:

Zur Darstellung von F in der Form $af + b\varphi$ ist nothwendig und hinreichend, dass diejenige Form, welche aus der Sylvester'schen Resultante von f und φ entsteht, wenn sie horizontal mit den Coefficienten von F, vertical mit beliebigen Coefficienten geändert wird, durch jeden Factor der Resultante theilbar bleibt.

Man bezeichne jetzt eine beliebige Unterdeterminante von R durch R_{ik} (und zwar sollen die ersten Indices sich auf die Horizontalreihen beziehen), ihre Elemente selbst unterschiedslos durch r_{ik}, so dass also

$$\begin{aligned} &r_{00} = A_0,\ r_{01} = A_1,\ \ldots,\ r_{0m} = A_m,\ r_{0m+1} = 0,\ \ldots \\ &r_{10} = 0,\quad r_{11} = A_0,\ \ldots, \\ &r_{20} = 0,\quad r_{21} = 0\ ,\ \ldots \end{aligned}$$

wird. Zufolge der eben ausgesprochenen Bedingung ist dann, wenn ein f und φ gemeinsamer Punkt zum Anfange der Coordinaten gemacht wird,*)

$$\sum_{k=0}^{k=m+n-1}(C_k R_{ik})$$

von derselben Ordnung Null, wie R; d. h. man kann setzen

$$\frac{1}{R}\sum C_k R_{ik} = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + \cdots,$$

wo auf der rechten Seite eine Potenzreihe nach x steht. Aus dieser nothwendigen und hinreichenden Bedingung erhält man, wenn man mit r_{ih} multiplicirt und nach $i = 0, 1, \ldots, m + n - 1$, summirt

$$(6) \qquad C_h = \sum_i a_{i0} r_{ih} + x\sum_i a_{i1} r_{ih} + x^2 \sum_i a_{i2} r_{ih} + \cdots$$

oder durch Multiplication mit y^h und Summation nach h

$$F = \sum_{i,h} a_{i0} r_{ih} y^h + x \sum_{i,h} a_{i1}\, r_{ih} y^h + x^2 \sum_{i,h} a_{i2} r_{ih} y^h + \cdots.$$

Beachtet man nun, dass

*) Den Fall, dass zu ein und demselben Werthe von x mehrere verschiedene y gehören, für welche f und φ Null sind, wird man durch Coordinatentransformation von vornherein vermeiden können, so dass zu $x = 0$ alsdann auch nur Werthe $y = 0$ gehören. Vgl. auch § 2.

$$\sum r_{0\lambda} y^\lambda = f, \quad \sum r_{1\lambda} y^\lambda = fy, \quad \sum r_{2\lambda} y^\lambda = fy^2, \ldots$$

$$\sum r_{n\lambda} y^\lambda = \varphi, \quad \sum r_{n+1\lambda} y^\lambda = \varphi y, \ldots$$

so ergiebt sich unmittelbar als nothwendige und hinreichende Bedingung

$$F = af + b\varphi, \tag{7}$$

wo nunmehr a, b zwei Potenzreihen nach x sind, deren Coefficienten Polynome in y sind, welche y respective höchstens in der $n-1$, $m-1^{\text{ten}}$ Potenz enthalten.

Aus einer Relation von der Form (7) folgt aber unmittelbar durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von y rückwärts wieder die Gleichung (6) oder auch die ihr unmittelbar vorhergehende, welche selbst als hinreichend und nothwendig erkannt war. Demnach ergiebt sich das folgende Criterium für die Darstellbarkeit von F in der Form

$$Af + B\varphi:$$

Zur Darstellbarkeit von F in der gewünschten Form ist es nothwendig und hinreichend, dass in der Nähe jedes gemeinsamen Punktes von $f = 0$ und $\varphi = 0$ zwei Potenzreihen a und b nach x existiren, deren Coefficienten Polynome $n-1$, $m-1^{ter}$ Ordnung in y sind, so dass die Relation (7) *identisch erfüllt werden kann.*

Herr Noether hat (a. a. O.) die Bedingungen für die Darstellbarkeit von F in einer etwas anderen Form ausgesprochen, welche für die Anwendung vielleicht bequemer erscheint, und die man etwa so ausdrücken kann:

Es müssen für jede den Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ genügende Lösung $x = \alpha$, $y = \beta$ zwei Entwickelungen A', B' nach Potenzen von $x - \alpha$, $y - \beta$ existiren, so dass identisch

$$F = A'f + B'\varphi.$$

Man kann aber, wie aus den Betrachtungen von Herrn Noether hervorgeht, voraussetzen, dass A', B' die Variabele $y - \beta$ nur bis zu einer endlichen, genügend hohen, Potenz enthalten. Setzt man nun, wie oben

$$A' = [A'] + \varphi A'',$$
$$B' = [B'] + fB'',$$

wo $[A']$, $[B']$, $y - \beta$ nur in der $n-1.$, $m-1.$ Dimension enthalten, so wird

$$F - \{[A']f + [B']\varphi\} = f\varphi(A'' + B'')$$

welche Identität nur bestehen kann, wenn $A'' + B''$ Null ist, da die

linke Seite als Function $m + n - 1^{ter}$ Ordnung in $y - \beta$ nicht durch $f\varphi$ theilbar sein kann. Damit ist die Uebereinstimmung beider Criterien nachgewiesen.

§ 2.

Für die Untersuchungen in der Theorie der algebraischen Curven ist von besonderer Wichtigkeit der Fall, wo f und φ in den ihnen gemeinsamen (vielfachen) Punkten keine Berührung mit einander eingehen. Dieser Fall ist z. B. derjenige, welcher in den Untersuchungen der Herren Brill und Noether zunächst vorausgesetzt wird, da die Ausdehnung derselben auf die besonderen Fälle weiterer gemeinsamer Punkte durch Ueberlegungen anderer Art hinlänglich einfach erreicht werden kann, ohne das in § 1 bewiesene Fundamentaltheorem vorauszusetzen. Ich gebe daher im folgenden eine ganz directe Untersuchung für den Fall, dass f und φ lediglich Punkte mit einander gemein haben, welche für f, φ beziehungsweise k, l fach sind, *während die Zweige von f mit denen von φ dabei keine Berührung besitzen.* Es gilt dann nämlich folgendes Theorem:

Wenn für jeden gemeinsamen, etwa k, l-fachen, Punkt von f, φ der Ausdruck F bis zu den Gliedern $k + l - 2^{ter}$ Dimension inclusive mit der Entwickelung $A'f + B'\varphi$ identisch gemacht werden kann, wo A', B' ganze rationale Functionen von x, y sind, so ist F von der Form $Af + B\varphi$.

Wenn $k \leqq l$, so kann man, da F selbstverständlich einen k-fachen Punkt an einer solchen zum Anfangspunkt der Coordinaten gewählten Stelle besitzen muss, setzen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} f &= f_k + f_{k+1} + \cdots + f_m, \\ \varphi &= \varphi_l + \varphi_{l+1} + \cdots + \varphi_n, \\ F &= F_k + F_{k+1} + \cdots + F_p, \end{aligned}$$

wo f_h, φ_h, F_h binäre Formen von x, y vom Grade h bedeuten. Ordnet man auch A', B' nach binären Formen

$$\begin{aligned} A' &= a_0 + a_1 + \cdots, \\ B' &= b_0 + b_1 + \cdots, \end{aligned}$$

so sind die durch den zu beweisenden Satz ausgesprochenen Bedingungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} &a_0 f_k = F_k, \\ &a_1 f_k + a_0 f_{k+1} = F_{k+1}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &a_{l-k} f_k + a_{l-k-1} f_{k+1} + \cdots + a_0 f_l + b_0 \varphi_l = F_l, \\ &a_{l-k+1} f_k + a_{l-k} f_{k+1} + \cdots + a_0 f_{l+1} + b_1 \varphi_l + b_0 \varphi_{l+1} = F_{l+1}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &a_{l-2} f_k + \ldots + a_0 f_{k+l-2} + b_{k-2} \varphi_l + \cdots + b_0 \varphi_{k+l-2} = F_{l+k-2}. \end{aligned}$$

Setzt man die aus den Gleichungen (2) für die Coefficienten von F entspringenden Bedingungen als erfüllt voraus, so kann man stets die in a_{l-1}, b_{k-1}, enthaltenen $k+l$ Constanten so bestimmen, dass noch die Terme $k+l-1^{\text{ter}}$ Dimension in F und $A'f+B'\varphi$ übereinstimmen. Denn hierzu ist erforderlich, dass identisch

(3) $f_k a_{l-1} + \varphi_l b_{k-1} = F_{k+l-1} - \{f_{k+1} a_{l-2} + \varphi_{l+1} b_{k-2} + \cdots\} = S$

wird. Bezeichnet man nun die Sylvester'sche Resultante der beiden binären Formen f_k, φ_l durch Δ, so hat man bekanntlich die identische Gleichung

$$f_k P + \varphi_l Q = \Delta S,$$

so dass die Coefficienten von a_{l-1}, b_{k-1} die durch Δ dividirten Coefficienten der Polynome P, Q sind. Da aber Δ nach der Voraussetzung nicht verschwindet, ist die eben gemachte Behauptung erwiesen. Von der Resultante R der beiden Functionen f und φ lässt sich unter derselben Voraussetzung leicht nachweisen, dass sie nach Potenzen von x entwickelt mit dem Gliede

$$x^{kl}\Delta M$$

beginnt, wo die Constante M nicht verschwindet.

Man schreibe nämlich R in der folgenden Weise

$$\left|\begin{array}{cccccccccc|c}
A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_k & A_{k+1} & \cdots & A_{l-1} & A_l & \cdots A_{k+l-1} & A_{k+l} \cdots \\
0 & A_0 & A_1 & \cdots & A_{k-1} & A_k & \cdots & A_{l-2} & A_{l-1} & \cdots A_{k+l-2} & A_{k+l-1} \cdots \\
0 & 0 & A_0 & \cdots & A_{k-2} & A_{k-1} & \cdots & A_{l-3} & A_{l-2} & \cdots A_{k+l-3} & A_{k+l-2} \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & A_0 & A_1 & \cdots A_k & A_{k+1} \cdots \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & A_0 & \cdots A_{k-1} & A_k \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & 0 & \cdots \cdot & \cdot \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots A_0 & A_1 \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots 0 & A_0 \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot \cdots \\
\hline
B_0 & B_1 & B_2 & \cdots & B_k & B_{k+1} & \cdots & B_{l-1} & B_l & \cdots B_{k+l-1} & B_{k+l} \cdots \\
0 & B_0 & B_1 & \cdots & B_{k-1} & B_k & \cdots & B_{l-2} & B_{l-1} & \cdots B_{l+l-2} & B_{k+l-1} \cdots \\
0 & 0 & B_0 & \cdots & B_{k-2} & B_{k-1} & \cdots & B_{l-3} & B_{l-2} & \cdots B_{k+l-3} & B_{k+l-2} \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & B_0 & B_1 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots B_{l-1} & B_l \cdots \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & B_0 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots B_{l-2} & B_{l-1} \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots B_0 & B_1 \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots 0 & B_0 \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot \cdots
\end{array}\right|$$

und bezeichne die einzelnen Felder in der durch diese Zerlegung angedeuteten Weise durch

a	1	2
b	3	4
c	5	6
d	7	8
	e	f

Die Felder 1 und 5 bilden eine $k+l$ reihige, 4 und 8 eine $m+n-(k+l)$ reihige Determinante. Man hat so vier Gruppen a, b, c, d von Horizontalreihen, mit je l, $n-l$, k, $m-k$ Reihen, und zwei Gruppen e, f von Vertikalreihen mit je $k+l$, $m+n-(k+l)$ Reihen von Elementen.

Aus den ersten l Reihen a kann man die Factoren

$$x^k,\ x^{k+1},\ \ldots,\ x^{k+l-1}$$

heraussetzen, dann erhalten die Elemente im Felde 2 der Reihe nach die Coefficienten

$$x^{-k},\ x^{-(k+1)},\ \ldots,\ x^{-(k+l-1)}.$$

Ebenso kann man aus den k Reihen c die Factoren

$$x^l,\ x^{l+1},\ \ldots,\ x^{k+l-1}$$

entfernen; die Elemente in 6 enthalten dann die Coefficienten

$$x^{-l},\ x^{-(l+1)},\ \ldots,\ x^{-(l+k-1)}.$$

Aus den $k+l$ Reihen e sondere man nun die Factoren

$$x^0,\ x^{-1},\ \ldots,\ x^{-(k+l-1)}$$

aus. Endlich entferne man aus jeder der Reihen b und d den Factor x^{k+l-1} und aus den Reihen f ebenso den Factor $x^{-(k+l-1)}$. Setzt man in der so umgeformten Determinante nun $x=0$, so verschwinden alle Elemente in 3 und 7, während die Elemente in 1 und 5 übergehen in die der Resultante Δ. Die Elemente in 4 und 8 bilden eine Determinante M, welche nicht verschwindet, wenn man voraussetzt, dass die beiden Formen f und φ für $x=0$ keine gemeinsame von Null verschiedene Wurzel $y=c$ besitzen, was durch eine geeignete Wahl des Coordinatensystemes von vornherein bei allen gemeinsamen Punkten von f und φ erreicht werden kann.

Da nun im ganzen der Factor

$$x^{kl+\frac{l}{2}(l-1)+kl+\frac{k}{2}(k-1)-\frac{1}{2}(k+l-1)(k+l)} = x^{kl}$$

herausgenommen ist, so wird

$$R = \Delta M x^{kl} + \cdots,$$

wie zu zeigen war. Nunmehr versehe man R mit einem aus den $C_0\, C_1\, C_2 \ldots$ gebildeten horizontalen und einem aus den beliebigen Grössen $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$; $q_0, q_1, \ldots, q_{m-1}$ gebildeten verticalen Rande. Setzt man dann

$$\varphi[\beta_0 + \beta_1 y + \cdots + \beta_{k-1} y^{k-1}] + f[\alpha_0 + \alpha_1 y + \cdots + \alpha_{l-1} y^{l-1}]$$
$$= \gamma_0 + \gamma_1 y + \cdots + \beta_{k+l-1} y^{k+l-1} + \cdots,$$

so ist es nach den Gleichungen (2) und (3) stets möglich, die Polynome α, β so zu bestimmen, dass, nach Potenzen von x geordnet

$$C_h - \gamma_h$$

mit dem Gliede

$$x^{k+l-h} c_h$$

für

$$h = 0, 1, 2, \ldots, k + l - 1,$$

beginnt. Die Coefficienten γ entstehen aber, wie man unmittelbar sieht, indem man die l Reihen a und die k Reihen c in der Resultante mit den Polynomen α, β multiplicirt und die Resultate vertical addirt. Multiplicirt man daher in der geränderten Resultante R' die Reihen a mit den Polynomen α, die Reihen c mit den Polynomen β, so kann man durch Subtraction der entstandenen Elemente von der letzten Horizontalreihe erreichen, dass an Stelle derselben die Elemente $C_h - \gamma_h$ eintreten.

Diese letzteren werden also

$$c_0 x^{k+l} \ldots,\ c_1 x^{k+l-1} \ldots,\ c_2 x^{k+l-2} \ldots,\ \ldots,\ c_{k+l-1} x \ldots,$$
$$-\sum_0^{l-1}(\alpha_i p_i) - \sum_0^{k-1}(\beta_i q_i).$$

Man kann daher aus denselben noch immer den Factor x^{k+l-1} entfernen, und übrigens bei beliebiger Wahl der Grössen p, q die zuvor beschriebene Absonderung des Factors x^{kl} vornehmen. Setzt man dann wieder $x = 0$, so erkennt man, da die $k + l$ ersten Elemente der letzten Horizontalreihe wieder Null werden, dass die Entwickelung der Form R' mit dem Gliede

$$x^{kl} \Delta M' - x^{kl} \Delta M \left[\sum_0^{l-1}(\alpha_i p_i) + \sum_0^{k-1}(\beta_i q_i) \right]_{x=0}$$

beginnt, wo M' durch Ränderung aus M entspringt.*) Dies aber war zu zeigen.

*) Es genügt übrigens, die allgemeine Abzählung im Texte für irgend einen speciellen Fall, z. B. $k = 2$, $l = 3$ auszuführen.

Derselbe Weg kann übrigens in allen den Fällen eingeschlagen werden, wo die Bedingungen, denen F zu genügen hat, in einfacher Weise ausdrückbar sind, so z. B., wenn f und φ sich in einfachen Punkten in beliebig hoher Ordnung berühren und dergleichen. Dagegen erscheint es schwierig, einen gleich einfachen Beweis für den allgemeinen in § 1 behandelten Fall zu führen, da hierzu eine allgemeine Entwickelung von R nach Potenzen von x erforderlich sein würde.

München, 23. Mai 1886.

Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen.

Von

FRIEDRICH SCHUR in Leipzig.

Seitdem Riemann in seiner Habilitationsschrift zuerst darauf hingewiesen hatte, dass die Unterordnung unseres concreten Raumes unter den allgemeinen Begriff einer Mannigfaltigkeit oder eines Raumes ausgehen müsste von den besonderen Eigenschaften derjenigen quadratischen Form der Coordinatenzuwachse, durch welche das Quadrat des Linienelements dieses Raumes dargestellt ist, ist eine grosse Anzahl von Abhandlungen über diesen Gegenstand erschienen. Ich will hier nur zwei derselben hervorheben. Einmal die von Herrn Beltrami*), welcher ausgehend von der durch Riemann gegebenen Form des Linienelements der sogenannten nicht-euklidischen oder projectiven Räume zeigte, dass die geodätischen Linien solcher Räume durch lineare Gleichungen dargestellt werden können, und dass solche Räume im Riemann'schen Sinne constantes Krümmungsmaass besitzen. Nennt man nämlich diejenigen Flächen, welche aus den einfach unendlich vielen durch einen Punkt laufenden geodätischen Linien, deren Anfangselemente einer Ebene angehören, bestehen, geodätische Flächen, so hängt, wie Riemann bemerkte, die Beschaffenheit des Raumes in der Nähe jenes Punktes wesentlich von dem Gaussischen Krümmungsmaasse dieser Flächen ab, in analoger Weise wie die Beschaffenheit einer Fläche in der Nähe eines ihrer Punkte abhängt von den Krümmungsradien der Normalschnitte. Wie diese durch einen Quotienten zweier quadratischen Formen der Parameterzuwachse, welche die Richtung des betreffenden Normalschnittes bestimmen, dargestellt sind, so ist auch jenes Riemann'sche Krümmungsmaass als Quotient zweier quadratischen Formen derjenigen Grössen darstellbar, welche die betreffende geodätische Fläche bestimmen; und es wird dieser Ausdruck seinem Werthe nach unabhängig

*) S. Beltrami, Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, Annali di Mat. ser. II, tom. II, p. 232.

von diesen Grössen sowohl als von den Coordinaten des betrachteten Punktes eben für die projectiven Räume. Wenn hiernach also diese Räume als solche constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses charakterisirt waren, so blieb noch die Frage unentschieden, ob auch jeder Raum constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses ein projectiver sei. Diese Frage ist in der zweiten zu erwähnenden Abhandlung von Herrn Lipschitz*) in bejahendem Sinne beantwortet worden. Es ist nun das Hauptziel dieser meiner Abhandlung dem Beweise dieses Resultates, der in rein analytischer Form schwer zu übersehen ist, eine einfachere Gestalt zu geben. Ich glaube dies durch einige geometrische Erwägungen erreicht zu haben.

Um, wie es auch Herr Lipschitz gethan, nicht sogleich den gesammten Complex der Eigenschaften solcher Räume für den Beweis zu benutzen, fragte ich, welches die Eigenschaften der projectiven Räume sind, die man denselben bis zu einem gewissen Grade nehmen kann, ohne den Zusammenhang mit einer gewissen Constanz des Krümmungsmaasses aufzugeben. Nun ist doch ein projectiver Raum dadurch vollständig charakterisirt, dass jede seiner geodätischen Flächen doppelt unendlich viel seiner geodätischen Linien enthält. Ich habe daher nach solchen Räumen gefragt, welche diese Eigenschaft nicht voll besitzen, sondern für welche nur ein Theil ihrer geodätischen Flächen, nämlich die durch einen festen Punkt gehenden doppelt unendlich viel ihrer geodätischen Linien enthalten, und bin so genau zu derselben Form des Linienelements gelangt, von welcher Herr Lipschitz ausgegangen ist. Aus ihr folgte nun leicht, dass in einem Raume, dessen sämmtliche geodätische Flächen durch einen festen Punkt doppelt unendlich viel seiner geodätischen Linien enthalten, für jeden Punkt das Riemann'sche Krümmungsmaass aller geodätischen Flächen durch die geodätische Linie nach dem festen Punkte denselben Werth besitzt, und umgekehrt. Mit diesem Resultate ist der Beweis der Identität der Räume constanten Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen gewissermaassen in seine Elemente zerlegt und abgelöst von jedem besonderen Coordinatensysteme. Es ergab sich so einerseits mit Nothwendigkeit die Frage, wie viel solche ausgezeichnete Punkte in einem Raume existiren müssen, damit jeder Punkt so beschaffen, der Raum also ein projectiver sei, und es wurde festgestellt, dass das Vorhandensein zweier solcher Punkte jedem andern dieselbe Eigenschaft auferlegt. Andrerseits fragte sich, ob das Riemann'sche Krümmungsmaass eines Raumes für jeden Punkt nach allen Richtungen denselben Werth haben könne, ohne dass es doch für alle Punkte

*) S. Lipschitz, Fortgesetzte Untersuchungen u. s. w. Journal f. r. u. a. M. Bd. 72, p. 1.

constant bleibt, und es wurde durch Verneinung dieser Frage gewissermassen das Analogon des Satzes gefunden, dass es ausser der Kugel keine Fläche mit lauter Nabelpunkten giebt.

Ich habe diesen specielleren Untersuchungen eine vollständige Begründung der Begriffe und Sätze der allgemeinen Theorie der Räume vorausschicken zu müssen geglaubt, um dem Leser das Verständniss jener zu erleichtern. Das einzig Neue an denselben mag sein die möglichste Vermeidung blosser analytischer Kunststücke und die durchgehende Anlehnung an geometrische Analogien. Den Schluss bilden kurze Betrachtungen über Verallgemeinerungen des Riemann'schen Krümmungsmaasses.

§ 1.

Ueber die geodätischen Linien.

In einem Raume von n Dimensionen, dessen Punkte innerhalb eines gewissen Bereiches mit den Werthsystemen der n Coordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in umgekehrt eindeutiger Beziehung stehen mögen, sei die Entfernung ds zweier unendlich naher Punkte (x_a) und $(x_a + dx_a)$ gegeben in der Form:

$$ds^2 = \sum_{a,b}^{n} a_{ab}\, dx_a\, dx_b \tag{1}$$

wo die $a_{a,b}$ analytische Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind, welche der Bedingung genügen, dass 1) $a_{ab} = a_{ba}$, 2) die Determinante obiger quadratischer Form nicht identisch verschwinde und 3) diese Form eine definite oder stets positive sei. Dann sind die inneren Maassverhältnisse in diesem Raume vollkommen bestimmt, d. h. es ist Alles bestimmt, was sich auf die Ausmessungen in demselben mit Hülfe von geraden oder kürzesten Linien bezieht. *Es wird daher zunächst unsre Aufgabe sein, die Gleichungen solcher geodätischer Linien zu finden.*

Sei nun r die Länge einer solchen etwa vom Anfangspunkte ausgehenden kürzesten Linie, so sollen jetzt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ so als Functionen von r dargestellt werden, dass das Integral

$$r = \int_0^r \sqrt{\sum_{a,b}^{n} a_{ab}\, dx_a\, dx_b} \tag{2}$$

ein Minimum werde. Wir haben dann beiläufig die Relation:

$$\sum_{a,b}^{n} a_{a,b} \frac{dx_a}{dr} \frac{dx_b}{dr} = 1. \tag{3}$$

Variiren wir also die x_a um $\varepsilon\xi_a$, wo die ξ_a beliebige Functionen von r, die nur der Bedingung genügen an den Grenzen zu verschwinden, und wo ε eine unendlich kleine Grösse, so wird aus der Summe unter dem Wurzelzeichen:

$$(4)\quad dr^2\sum_{a,b,c}^{n}\left(a_{ab}+\varepsilon\xi_c\frac{\partial a_{ab}}{\partial x_c}\right)\left(\frac{dx_a}{dr}+\varepsilon\frac{d\xi_a}{dr}\right)\left(\frac{dx_b}{dr}+\varepsilon\frac{d\xi_b}{dr}\right)$$
$$=dr^2\left\{1+\varepsilon\left(\sum_{a,b,c}^{n}\left(\frac{\partial a_{ab}}{\partial x_c}\frac{dx_a}{dr}\frac{dx_b}{dr}\xi_c+2a_{ab}\frac{dx_a}{dr}\frac{d\xi_b}{dr}\right)\right)\right\},$$

wenn wir die Glieder mit höheren Potenzen von ε vernachlässigen. Demnach erhalten wir als nothwendige Bedingung für das Minimum unseres Integrals:

$$(5)\quad \int_0^r\sum_{a,b,c}^{n}\left(\frac{\partial a_{ab}}{\partial x_c}\frac{dx_a}{dr}\frac{dx_b}{dr}\xi_c+2a_{ab}\frac{dx_a}{dr}\frac{d\xi_b}{dr}\right)dr=0.$$

Auf Grund der Identität:

$$(6)\quad \frac{d}{dr}\left(\sum_{a,b,}^{n}a_{ab}\frac{dx_a}{dr}\xi_b\right)=\sum_{a,b}^{n}\frac{d\left(a_{ab}\frac{dx_a}{dr}\right)}{dr}\xi_b+\sum_{a,b}^{n}a_{ab}\frac{dx_a}{dr}\frac{d\xi_b}{dr}$$

wird hieraus:

$$(7)\quad \int_0^r\sum_{a,b,c}^{n}\left(\frac{\partial a_{ab}}{\partial x_c}\frac{dx_a}{dr}\frac{dx_b}{dr}-2\frac{d\left(a_{ac}\frac{dx_a}{dr}\right)}{dr}\right)\xi_c$$
$$+2\int_0^r d\left(\sum_{a,b}^{n}a_{ab}\frac{dx_a}{dr}\xi_b\right)=0,$$

wo das letzte Integral fortfällt, weil die ξ_b an den Grenzen verschwinden sollen. Da nun diese Gleichung für jedes noch so kleine Stück der kürzesten Linie bestehen soll, so muss die Function unter dem Integralzeichen verschwinden; weil ferner die ξ_c noch ganz willkürlich sind, so müssen die Coefficienten der ξ_c verschwinden. Wir erhalten demnach folgendes System von Differentialgleichungen zur Bestimmung der kürzesten Linien:

$$(8)\quad \frac{d}{dr}\left(\sum_{a}^{n}a_{ac}\frac{dx_a}{dr}\right)=\frac{1}{2}\sum_{a,b}^{n}\frac{\partial a_{ab}}{\partial x_c}\frac{dx_a}{dr}\frac{dx_b}{dr}\qquad(c=1,2,\ldots,n).$$

Wir erhalten demnach:

$$(9) \qquad \sum_{a}^{n} a_{ac} \frac{d^2 x_a}{dr^2} = \frac{1}{2} \sum_{a,b}^{n} \left(\frac{\partial a_{ab}}{\partial x_c} - 2 \frac{\partial a_{ac}}{\partial x_b} \right) \frac{dx_a}{dr} \frac{dx_b}{dr}.$$

Vertauscht man rechts $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$ und addirt die so entstehende Gleichung zu (9), so erhalten wir bei Einführung der Abkürzungen:

$$(10) \qquad p_{c,ab} = \frac{\partial a_{ac}}{\partial x_b} + \frac{\partial a_{bc}}{\partial x_a} - \frac{\partial a_{ab}}{\partial x_c}$$

als *endgültige Form der Differentialgleichungen der kürzesten Linien:*

$$(11) \qquad \sum_{a}^{n} a_{ac} \frac{d^2 x_a}{dr^2} = -\frac{1}{2} \sum_{a,b}^{n} p_{c,ab} \frac{dx_a}{dr} \frac{dx_b}{dr}.$$

Soll also die kürzeste Linie durch den Anfangspunkt gehen und sollen dort die $\frac{dx_a}{dr}$ gegebene Werthe η_a annehmen, so sind auf Grund dieser n linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung, weil die Determinante der quadratischen Form (1) nicht verschwindet, auch die

$$\frac{d^2 x_a}{dr^2}, \quad \frac{d^3 x_a}{dr^3}, \ldots$$

im Anfangspunkte bestimmt, sodass man die x_a in der Nähe dieses Punktes als Potenzreihen von r entwickeln kann, und zwar sind die Coefficienten von r^n ganze homogene Functionen n^{ten} Grades der η_a. Im Besonderen ergiebt sich:

$$(12) \qquad \left(\frac{d^2 x_m}{dr^2} \right)^0 = -\frac{1}{2} \sum_{a,b,c}^{n} A^0_{mc} p^0_{c,ab} \eta_a \eta_b,$$

wo:

$$(13) \qquad \sum_{c}^{n} A_{mc} a_{ac} = 0 \text{ oder } 1, \text{ je nachdem } \mathfrak{a} \lessgtr \mathfrak{m} \text{ oder } \mathfrak{a} = \mathfrak{m} \text{ ist;}$$

mit dem oberen Index 0 seien, wie im Folgenden stets, die Werthe bezeichnet, welche die betreffenden Functionen im Anfangspunkte annehmen. Setzen wir $y_a = r\eta_a$, so wird:

$$(14) \qquad x_m = y_m - \frac{1}{4} \sum_{a,b,c}^{n} A^0_{mc} p^0_{c,ab} y_a y_b + (y_1, \ldots, y_n)^3 + \cdots$$

Hieraus folgt beiläufig:

$$(15) \qquad \left(\frac{\partial x_a}{\partial y_b} \right)^0 = 0 \text{ oder } 1, \text{ jenachdem } \mathfrak{a} \lessgtr \mathfrak{b} \text{ oder } \mathfrak{a} = \mathfrak{b},$$

und:

$$\left(\frac{\partial^2 x_c}{\partial y_a \partial y_b}\right)^0 = -\frac{1}{2}\sum_b^n A^0_{cb} p^0_{b,ab}. \tag{16}$$

Ferner folgt aus (14), dass umgekehrt die y_a sich als Potenzreihen der x_a entwickeln lassen und zwar in der Form:

$$y_m = x_m + \frac{1}{4}\sum_{a,b,c}^n A^0_{mc} p^0_{c,ab} x_a x_b + [x_1, \ldots, x_n]^3 + \cdots \tag{17}$$

Die Grössen η_a können wir offenbar als *die Richtungscosinus* der vom Anfangspunkte nach dem Punkte $x_1, \ldots, x_n$ gehenden kürzesten Linie bezeichnen; sie bleiben also für alle Punkte derselben vom Anfangspunkte ausgehenden kürzesten Linie constant. Aus (3) ergiebt sich für sie die Identität:

$$\sum_{a,b}^n a^0_{ab} \eta_a \eta_b = 1. \tag{18}$$

Aus dieser Gleichung kann man mit Hülfe von (17) auch *den Radiusvector r* als Function von $x_1, \ldots, x_n$ darstellen.

Die Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ können wir offenbar als ein anderes System von Coordinaten in unserem Raume ansehen. Wir wollen uns mit denselben, die von Herrn Lipschitz*) *Normalvariabeln* genannt worden sind, im Folgenden näher beschäftigen.

§ 2.

Ueber die Normalvariabeln.

Offenbar gehört jedem Systeme von Coordinaten in dem betrachteten Raume von n Dimensionen für jeden Punkt desselben, also, wie wir der kürzeren Ausdrucksweise halber annahmen, für den Anfangspunkt ein solches System von Normalvariabeln zu. Zwischen allen diesen demselben Anfangspunkte zugehörigen Systemen besteht aber die einfache Beziehung, dass *die Normalvariabeln jedes Systems sich als homogene lineare Functionen derjenigen jedes andern Systems mit demselben Anfangspunkte darstellen lassen, und zwar als lineare Functionen mit constanten Coefficienten.*

Sind in der That $x_1', \ldots, x_n'$ irgend welche andre Coordinaten mit demselben Anfangspunkte und $y_1' = r\eta_1', \ldots, y_n' = r\eta_n'$ die zugehörigen Normalvariabeln, so sind die x_a' irgend welche Functionen der ursprünglichen Coordinaten x_a, sodass sich ergiebt:

---

*) S. Lipschitz a. a. O. p. 4.

$$\frac{dx'_a}{dr} = \frac{\partial x'_a}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dr} + \cdots + \frac{\partial x'_a}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dr}, \tag{19}$$

also:

$$y'_a = \left(\frac{\partial x'_a}{\partial x_1}\right)^0 y_1 + \cdots + \left(\frac{\partial x'_a}{\partial x_n}\right)^0 y_n. \tag{20}$$

Hieraus ergiebt sich leicht ein Theorem des Herrn Lipschitz*), dass *nämlich, falls die Form* (1) *überhaupt in eine solche mit constanten Coefficienten transformirt werden kann, dies durch die Transformation* (14) *geleistet wird.*

Aber auch in jedem andern Falle bestehen zwischen den Coefficienten derjenigen quadratischen Form:

$$ds^2 = \sum_{c,b}^{n} b_{c,b}\, dy_c\, dy_b, \tag{21}$$

in welche die Form (1) durch die Transformation (14) übergeht, bemerkenswerthe Beziehungen, die wir nach Herrn Dedekind**) ableiten wollen.

Zunächst ergiebt sich nämlich, wenn man sich in einer vom Anfangspunkte ausgehenden kürzesten Linie bewegt:

$$\sum_{c,b}^{n} b_{c,b}\, \eta_c\, \eta_b = 1. \tag{22}$$

Denn dann ist ja:

$$\frac{dy_c}{dr} = \frac{\partial y_c}{\partial r} = \eta_c. \tag{23}$$

Es gilt also die Relation (22) für alle Punkte derselben vom Anfangspunkte ausgehenden kürzesten Linie. Aus denselben Gründen gehen die Gleichungen einer solchen Linie (cfr. Gl. (9)) über in:

$$\sum_{a,b}^{n}\left(\frac{\partial b_{ab}}{\partial y_c} - 2\frac{\partial b_{ac}}{\partial y_b}\right) y_a\, y_b = 0. \tag{24}$$

Diese Gleichungen, welche zunächst als die Gleichungen einer vom Anfangspunkte ausgehenden kürzesten Linie zu betrachten sind, können aber auch als Identitäten in Beziehung auf die y_a angesehen werden, weil ja jeder Punkt mit dem Anfangspunkte durch eine kürzeste Linie verbunden werden kann.

Wir können durch Umformung derselben weitere Identitäten ableiten. Bei Einführung der Abkürzung:

---

*) S. Lipschitz; Untersuchungen in Betreff u. s. w. Journ. f. r. a. M. Bd. 70, p. 92.

**) S. Riemanns ges. math. Werke, p. 384 ff.

$$r_a = \sum_b^n b_{ab} y_b \tag{25}$$

gehen sie nämlich über in:

$$r_a + \sum_c^n \frac{\partial r_c}{\partial y_a} y_c = 2 \sum_c^n \frac{\partial r_a}{\partial y_c} y_c. \tag{26}$$

Nun ist doch nach (22):

$$\sum_a^n r_a y_a = r^2, \tag{27}$$

wodurch (26) übergeht in:

$$\frac{\partial (r^2)}{\partial y_a} = 2 \sum_c^n \frac{\partial r_a}{\partial y_c} y_c. \tag{28}$$

Demnach wird:

$$\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial y_a \partial y_b} = \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial y_b \partial y_a} = 2 \frac{\partial r_a}{\partial y_b} + 2 \sum_c^n \frac{\partial^2 r_a}{\partial y_c \partial y_b} y_c \tag{29}$$

$$= 2 \frac{\partial r_b}{\partial y_a} + 2 \sum_c^n \frac{\partial^2 r_b}{\partial y_c \partial y_a} y_c,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{\partial r_a}{\partial y_b} - \frac{\partial r_b}{\partial y_a} + \sum_c^n \frac{\partial}{\partial y_c} \left(\frac{\partial r_a}{\partial y_b} - \frac{\partial r_b}{\partial y_a} \right) y_c = 0. \tag{30}$$

Daraus folgt aber, dass im Anfangspunkte $\frac{\partial r_a}{\partial y_b} - \frac{\partial r_b}{\partial y_a}$ nebst allen seinen Ableitungen verschwindet, dass es also überhaupt verschwindet. Wir erhalten daher die neuen Identitäten:

$$\sum_c^n \frac{\partial b_{ac}}{\partial y_b} y_c = \sum_c^n \frac{\partial b_{bc}}{\partial y_a} y_c, \tag{31}$$

also auch:

$$\sum_{b,c}^n \frac{\partial b_{ac}}{\partial y_b} y_b y_c = \sum_{b,c}^n \frac{\partial b_{bc}}{\partial y_a} y_b y_c. \tag{32}$$

Vergleichen wir dies mit (24), so folgt:

$$\sum_{a,b}^n \frac{\partial b_{ab}}{\partial y_c} y_a y_b = \sum_{a,b}^n \frac{\partial b_{ac}}{\partial y_b} y_a y_b = 0. \tag{33}$$

Hieraus ergiebt sich zunächst, wenn wir auf diejenige Form der

Differentialgleichungen einer vom Anfangspunkte ausgehenden kürzesten Linie, wie sie in den Gleichungen (8) vorliegt, zurückgehen, dass:

$$\frac{d}{dr}\left(\sum_{c}^{n} b_{ac}\,\eta_c\right) = 0, \tag{34}$$

dass also:

$$\sum_{c}^{n} b_{ac}\,\eta_c = \sum_{c}^{n} b^0_{ac}\,\eta_c = b_a, \tag{35}$$

wo die b_a Constanten sind, d. h. von r unabhängig.

Differentiiren wir ferner die Identitäten (33) partiell nach y_b und y_f, so folgt für den Anfangspunkt:

$$\left(\frac{\partial b_{cb}}{\partial y_f}\right)^0 = 0. \tag{36}$$

Differentiiren wir endlich dieselben Identitäten partiell y_c, y_f und y_g, so folgt ebenfalls für den Anfangspunkt:

$$\left(\frac{\partial^2 b_{bf}}{\partial y_c\,\partial y_g} + \frac{\partial^2 b_{bg}}{\partial y_c\,\partial y_f} + \frac{\partial^2 b_{fg}}{\partial y_c\,\partial y_b}\right)^0 = 0, \tag{37}$$

$$\left(\frac{\partial^2 b_{cb}}{\partial y_f\,\partial y_g} + \frac{\partial^2 b_{cf}}{\partial y_b\,\partial y_g} + \frac{\partial^2 b_{cg}}{\partial y_b\,\partial y_f}\right)^0 = 0. \tag{38}$$

Vertauscht man hier in der ersten Gleichung c mit b und zieht sie von der zweiten ab, so folgt noch:

$$\left(\frac{\partial^2 b_{cb}}{\partial y_f\,\partial y_g}\right)^0 = \left(\frac{\partial^2 b_{fg}}{\partial y_c\,\partial y_b}\right)^0. \tag{39}$$

§ 3.

Ueber die geodätischen Flächen.

Bekanntlich ist der gewöhnliche Raum seiner Natur nach durch die Eigenschaften der geraden Linie für sich noch nicht vollständig bestimmt, sondern erst durch deren Beziehungen zur Ebene. Um daher Gesichtspunkte für Eintheilung der Räume zu gewinnen, wollen wir nach Riemann aus kürzesten Linien des bisher betrachteten Raumes von n Dimensionen zusammengesetzte Flächen definiren, die in gewissem Sinne als Analoga der Ebenen des gewöhnlichen Raumes betrachtet werden können.

Bleiben wir in unendlicher Nähe des Anfangspunktes, so wird in einem solchen Gebiete der Raum als eben betrachtet werden können; denn sein Linienelement wird die Form haben:

$$ds^2 = \sum_{a,b}^{n} b^0_{ab}\,dy_a\,dy_b. \tag{40}$$

Sind daher η_a' und η_a'' die Richtungscosinus irgend zweier vom Anfangspunkte ausgehenden unendlich kleinen Linien dieses Gebietes, so werden die Richtungscosinus aller Linien desselben, welche mit jenen zwei in derselben Ebene liegen, die Form haben:

$$\eta_a = \alpha \eta_a' + \beta \eta_a'', \tag{41}$$

wo α und β irgend zwei Constanten, welche durch die Relation verknüpft sind:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta \sum_{a,b}^{n} b_{ab}^0 \eta_a' \eta_b'' + \beta^2 = 1. \tag{42}$$

Die Flächen nun, welche aus vom Anfangspunkte ausgehenden geodätischen Linien zusammengesetzt sind, deren Richtungscosinus in der Form (41) enthalten sind, sollen der näheren Untersuchung unterzogen werden; sie mögen *geodätische Flächen* genannt werden, und der Anfangspunkt ihr Centrum.

Jeder Punkt einer solchen Fläche wird auf dieser offenbar bestimmt sein durch den Winkel φ, welchen die durch ihn gehende geodätische Linie (η_a) etwa mit der geodätischen Linie (η_a') bildet, und den Radiusvector r. Bei Zugrundelegung dieser Parameter nimmt das Linienelement der Fläche bekanntlich die Form an:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \mu^2 d\varphi^2, \tag{43}$$

wo $\mu^0 = 1$; und umgekehrt, wenn das Linienelement diese Form hat und $\mu^0 = 1$ ist, haben r und φ die eben beschriebene Bedeutung. Es ist desshalb:

$$\cos\varphi = \sum_{a,b}^{n} b_{ab}^0 \eta_a \eta_b' = \alpha + \beta \cos\gamma, \tag{44}$$

wenn wir:

$$\cos\gamma = \sum_{a,b}^{n} b_{ab}^0 \eta_a' \eta_b'' \tag{45}$$

setzen. Denn dann wird zunächst:

$$\alpha = \frac{\sin(\gamma - \varphi)}{\sin\gamma}, \quad \beta = \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}, \tag{46}$$

also, weil:

$$d\alpha = -\frac{\cos(\gamma - \varphi)}{\sin\gamma} d\varphi, \quad d\beta = \frac{\cos\varphi}{\sin\gamma} d\varphi, \tag{47}$$

folgt:

$$d\varphi^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + 2\, d\alpha\, d\beta \cos\gamma = \sum_{a,b}^{n} b_{ab}^0 d\eta_a\, d\eta_b; \tag{48}$$

denn es ist ja:

$$d\eta_a = d\alpha\, \eta_a' + d\beta\, \eta_a''. \tag{49}$$

Weil ferner:

$$\sum_{a,b}^{n} b^0_{ab}\,\eta_a\,d\eta_b = 0, \tag{50}$$

also wegen (35) auch:

$$\sum_{a,b}^{n} b_{ab}\,\eta_a\,d\eta_b = 0, \tag{51}$$

so wird, da: $dy_a = dr\eta_a + r\,d\eta_a$:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sum_{a,b}^{n} b_{ab}\,d\eta_a d\eta_b = dr^2 + r^2\mu^2 d\varphi^2, \tag{52}$$

sodass wegen (48):

$$\mu^2 = \frac{\sum_{a,b}^{n} b_{ab}\,d\eta_a\,d\eta_b}{\sum_{a,b}^{n} b^0_{ab}\,d\eta_a\,d\eta_b}, \tag{53}$$

wird, also in der That im Anfangspunkte den Werth 1 annimmt. Dieser Ausdruck hängt natürlich nur scheinbar von $d\varphi$ ab, denn bei Substitution der Werthe für die $d\eta_a$ würde sich $d\varphi^2$ fortheben.

Nach den Formeln (46) ist offenbar das Doppelverhältniss, welches die geodätischen Linien mit den Richtungscosinus $\eta_a''' = \alpha\eta_a' + \beta\eta_a''$ und $\eta_a^{IV} = \alpha'\eta_a' + \beta'\eta_a''$ mit den geodätischen Linien (η_a') und (η_a'') bilden:

$$(\eta'\eta''\eta'''\eta^{IV}) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}. \tag{54}$$

§ 4.

Ueber das Riemann'sche Krümmungsmaass.

Es wird für die folgenden Untersuchungen wichtig sein, das Gaussische Krümmungsmaass k jener geodätischen Flächen im Anfangspunkte zu bestimmen. Bekanntlich ist:

$$k = -\frac{\frac{\partial^2(r\mu)}{\partial r^2}}{r\mu}, \tag{55}$$

also, weil

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial r}\right)^0 = 0,$$

folglich

$$\left(\frac{\frac{\partial\mu}{\partial r}}{r}\right)^0 = \left(\frac{\partial^2\mu}{\partial r^2}\right)^0,$$

erhalten wir:

$$k^0 = -3\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial r^2}\right)^0, \tag{56}$$

also schliesslich:

$$k^0 = -\frac{3}{2}\cdot\frac{\sum_{a,b,c,b}^{n}\left(\frac{\partial^2 b_{ab}}{\partial y_c \partial y_b}\right)^0 \eta_c\eta_b\, d\eta_a\, d\eta_b}{\sum_{a,b}^{n} b^0_{ab}\, d\eta_a\, d\eta_b}. \tag{57}$$

Um nun Zähler und Nenner homogen zu machen, können wir dem Nenner N auf Grund der Identitäten (22) und (51) die Form geben:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{a,b}^{n} b^0_{ab}\, d\eta_a\, d\eta_b \sum_{c,b}^{n} b^0_{cb}\,\eta_c\eta_b - \left(\sum_{a,b}^{n} b^0_{ab}\,\eta_a\, d\eta_b\right)^2 \\ &= \sum_{a,b,c,b}^{n} b^0_{ab}\, b^0_{cb}\,(d\eta_a\, d\eta_b\,\eta_c\eta_b - d\eta_b\, d\eta_b\,\eta_a\eta_c) \\ &= \sum_{a,b;c,b}^{n} b^0_{ab}\, b^0_{cb}\,(d\eta_a\, d\eta_b\,\eta_c\eta_b + d\eta_c\, d\eta_b\,\eta_a\eta_b - d\eta_b\, d\eta_b\,\eta_a\eta_c - d\eta_a\, d\eta_c\,\eta_b\eta_b), \end{aligned}$$

wenn wir durch das Semikolon, wie im Folgenden stets, andeuten, dass die Summation nur über von einander verschiedene Paare der Indices a, b und c, b auszudehnen ist. Demnach wird:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{a,b;c,b}^{n} b^0_{ab}\, b^0_{cb}\,(d\eta_a\,\eta_b - d\eta_b\,\eta_a)\,(d\eta_b\,\eta_c - d\eta_c\,\eta_b) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a,b;c,b}^{n}(b^0_{ab}\, b^0_{cb} - b^0_{ac}\, b^0_{bb})\,(d\eta_a\,\eta_b - d\eta_b\,\eta_a)\,(d\eta_b\,\eta_c - d\eta_c\,\eta_b). \end{aligned} \tag{58}$$

Auf Grund der Relationen (37) bis (39) kann man in analoger Weise den Zähler Z umformen. Zunächst ist rein formal:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{2}{3}\sum_{a,b,c,b}^{n}\left(\frac{\partial^2 b_{ab}}{\partial y_c \partial y_b}\right)^0 \eta_c\,\eta_b\, d\eta_a\, d\eta_b \\ &\quad + \frac{1}{3}\sum_{a,b,c,b}^{n}\left(\frac{\partial^2 b_{ac}}{\partial y_b \partial y_b}\right)^0 \eta_b\,\eta_b\, d\eta_a\, d\eta_c; \end{aligned}$$

denn die zweite Summe unterscheidet sich von der ersten nur durch Anwendung anderer Summationsbuchstaben. Hieraus wird auf Grund von (37):

$$Z = \frac{2}{3}\sum_{a,b,c,b}^{n}\left(\frac{\partial^2 b_{ab}}{\partial y_c \partial y_b}\right)^0 \eta_c \eta_b \, d\eta_a \, d\eta_b$$

$$- \frac{1}{3}\sum_{a,b,c,b}^{n}\left(\frac{\partial^2 b_{ab}}{\partial y_c \partial y_b} + \frac{\partial^2 b_{bc}}{\partial y_a \partial y_b}\right)^0 \eta_b \eta_b \, d\eta_a \, d\eta_c$$

$$= \frac{2}{3}\sum_{a,b,c,b}^{n}\left(\frac{\partial^2 b_{ab}}{\partial y_c \partial y_b}\right)^0 (d\eta_a d\eta_b \eta_c \eta_b - d\eta_a d\eta_c \eta_b \eta_b).$$

Hieraus ergiebt sich nun durch ähnliche Betrachtungen, wie wir sie bei der Umformung von N angestellt haben, dass:

$$(59) \quad Z = \frac{1}{6}\sum_{a,b;c,b}^{n}\left(\frac{\partial^2 b_{ab}}{\partial y_c \partial y_b} + \frac{\partial^2 b_{cb}}{\partial y_a \partial y_b} - \frac{\partial^2 b_{ac}}{\partial y_b \partial y_b} - \frac{\partial^2 b_{bb}}{\partial y_a \partial y_c}\right)^0 \times$$
$$\times (d\eta_a \eta_b - d\eta_b \eta_a)\,(d\eta_b \eta_c - d\eta_c \eta_b).$$

Nun ist doch:

$$(60) \quad d\eta_a \eta_b - d\eta_b \eta_a = (\eta_a' \eta_b'' - \eta_b' \eta_a'')\,(\beta d\alpha - \alpha d\beta)$$
$$= \frac{\beta d\alpha - \alpha d\beta}{r^2}\,(dy_a \delta y_b - dy_b \delta y_a),$$

wenn die dy_a und δy_a irgend zwei Fortschreitungsrichtungen vom Anfangspunkte bestimmen.

Somit wird schliesslich:

$$(61) \quad k^0 = -\frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\sum_{a,b;c,b}^{n}\left(\frac{\partial^2 b_{ab}}{\partial y_c \partial y_b} + \frac{\partial^2 b_{cb}}{\partial y_a \partial y_b} - \frac{\partial^2 b_{ac}}{\partial y_b \partial y_b} - \frac{\partial^2 b_{bb}}{\partial y_a \partial y_c}\right)^0 \times (dy_a \delta y_b - dy_b \delta y_a)\,(dy_b \delta y_c - dy_c \delta y_b)}{\displaystyle\sum_{a,b;c,b}^{n}(b^0_{ab} b^0_{cb} - b^0_{ac} b^0_{bb})\,(dy_a \delta y_b - dy_b \delta y_a)(dy_b \delta y_c - dy_c \delta y_b)}.$$

Dieser Ausdruck ist nun noch von den Normalvariablen y_a auf die ursprünglichen Variablen x_a umzuformen. Nun ist doch nach Definition:

$$(62) \quad b_{ab} = \sum_{f,g}^{n} a_{fg}\frac{\partial x_f}{\partial y_a}\frac{\partial x_g}{\partial y_b}.$$

Daraus folgt nach (15):

$$(63) \quad b^0_{ab} = a^0_{ab}.$$

Da nun ausserdem im Anfangspunkte $dy_a = dx_a$, so sieht man, dass der Nenner N seine Form behält, also nur b mit a und y mit x zu vertauschen ist.

Weiter ergiebt sich:

$$(64)\qquad \frac{\partial b_{ab}}{\partial y_l} = \sum_{f,g,l}^{n} \frac{\partial a_{fg}}{\partial x_l}\frac{\partial x_f}{\partial y_a}\frac{\partial x_g}{\partial y_b}\frac{\partial x_l}{\partial y_c} + \sum_{f,g}^{n} a_{fg}\left(\frac{\partial^2 x_f}{\partial y_a \partial y_c}\frac{\partial x_g}{\partial y_b} + \frac{\partial^2 x_g}{\partial y_b \partial y_c}\frac{\partial x_f}{\partial y_a}\right).$$

Hieraus folgt weiter:

$$\begin{aligned}(65)\qquad \frac{\partial^2 b_{ab}}{\partial y_c \partial y_b} &= \sum_{f,g,l,m}^{n} \frac{\partial^2 a_{fg}}{\partial x_l \partial x_m}\frac{\partial x_f}{\partial y_a}\frac{\partial x_g}{\partial y_b}\frac{\partial x_l}{\partial y_c}\frac{\partial x_m}{\partial y_b} \\ &+ \sum_{f,g,l}^{n} \frac{\partial a_{fg}}{\partial x_l}\left(\frac{\partial^2 x_f}{\partial y_a \partial y_b}\frac{\partial x_g}{\partial y_b}\frac{\partial x_l}{\partial y_c} + \frac{\partial^2 x_g}{\partial y_b \partial y_b}\frac{\partial x_f}{\partial y_a}\frac{\partial x_l}{\partial y_c}\right. \\ &\quad + \frac{\partial^2 x_l}{\partial y_c \partial y_b}\frac{\partial x_f}{\partial y_a}\frac{\partial x_g}{\partial y_b} + \frac{\partial^2 x_f}{\partial y_a \partial y_c}\frac{\partial x_g}{\partial y_b}\frac{\partial x_l}{\partial y_b} \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 x_g}{\partial y_b \partial y_c}\frac{\partial x_f}{\partial y_a}\frac{\partial x_l}{\partial y_b}\right) \\ &+ \sum_{f,g}^{n} a_{fg}\left(\frac{\partial^2 x_f}{\partial y_a \partial y_c}\frac{\partial^2 x_g}{\partial y_b \partial y_b} + \frac{\partial^2 x_f}{\partial y_a \partial y_b}\frac{\partial^2 x_g}{\partial y_b \partial y_c}\right) \\ &+ \sum_{f,g}^{n} a_{fg}\left(\frac{\partial^3 x_f}{\partial y_a \partial y_c \partial y_b}\frac{\partial x_g}{\partial y_b} + \frac{\partial^2 x_g}{\partial y_b \partial y_c}\frac{\partial^2 x_f}{\partial y_a \partial y_b}\right).\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich nach (15) und unter Anwendung der Abkürzungen (10):

$$\begin{aligned}(66)\qquad &\left(\frac{\partial^2 b_{ab}}{\partial y_c \partial y_b} + \frac{\partial^2 b_{cb}}{\partial y_a \partial y_b} - \frac{\partial^2 b_{ac}}{\partial y_b \partial y_b} - \frac{\partial^2 b_{bb}}{\partial y_a \partial y_c}\right)^0 \\ &= \left(\frac{\partial^2 a_{ab}}{\partial x_c \partial x_b} + \frac{\partial^2 a_{cb}}{\partial x_a \partial x_b} - \frac{\partial^2 a_{ac}}{\partial x_b \partial x_b} - \frac{\partial^2 a_{bb}}{\partial x_a \partial x_c}\right)^0 \\ &+ \sum_{f}^{n}\left\{\left(\frac{\partial^2 x_f}{\partial y_b \partial y_b}\right)^0 p^0_{f,ac} + \left(\frac{\partial^2 x_f}{\partial y_a \partial y_c}\right)^0 p^0_{f,bb} - \left(\frac{\partial^2 x_f}{\partial y_a \partial y_b}\right)^0 p^0_{f,cb}\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial^2 x_f}{\partial y_c \partial y_b}\right)^0 p^0_{f,ab}\right\} \\ &+ \sum_{f,g}^{n} a^0_{fg}\left\{\left(\frac{\partial^2 x_f}{\partial y_a \partial y_c}\right)^0\left(\frac{\partial^2 x_g}{\partial y_b \partial y_b}\right)^0 - \left(\frac{\partial^2 x_f}{\partial y_a \partial y_b}\right)^0\left(\frac{\partial^2 x_g}{\partial y_c \partial y_b}\right)^0\right\}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck, für welchen wir die Abkürzung $(a, b; c, b)$ einführen wollen, wird demnach schliesslich in Rücksicht auf (16) und (13):

$$(67)\qquad (a, b; c, b) = \frac{\partial^2 a_{ab}}{\partial x_c \partial x_b} + \frac{\partial^2 a_{cb}}{\partial x_a \partial x_b} - \frac{\partial^2 a_{ac}}{\partial x_b \partial x_b} - \frac{\partial^2 a_{bb}}{\partial x_a \partial x_c} + \frac{1}{2}\sum_{f,g}^{n} A_{fg}\,(p_{f,ab}\,p_{g,cb} - p_{f,ac}\,p_{g,bb}).$$

Der Ausdruck für das Krümmungsmaass einer geodätischen Fläche im Anfangspunkte nimmt daher in einem beliebigen Coordinatensysteme die Form an:

$$(68)\qquad k^0 = -\frac{1}{2}\,\frac{\sum_{a,b;c,b}^{n} (a, b; c, b)^0\,(dx_a\delta x_b - dx_b\delta x_a)\,(dx_b\delta x_c - dx_c\delta x_b)}{\sum_{a,b;c,b}^{n} (a^0_{ab}a^0_{cb} - a^0_{ac}a^0_{bb})\,(dx_a\delta x_b - dx_b\delta x_a)(dx_b\delta x_c - dx_c\delta x_b)}.$$

Dieser Ausdruck heisst das Riemann'sche Krümmungsmaass des durch das Linienelement (1) *charakterisirten Raumes im Anfangspunkte.* Uebrigens ist dieser Ausdruck nur der bequemeren Bezeichnungsweise wegen für den Punkt $(0, 0, \ldots, 0)$ gebildet worden, er gilt natürlich ebenso für das Riemann'sche Krümmungsmaass eines beliebigen Punktes $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Es hängt dasselbe also erstens von den Coordinaten des betreffenden Punktes ab und zweitens von den Determinanten $dx_a\delta x_b - dx_b\delta x_a$, die man füglich als die Coordinaten der geodätischen Fläche bezeichnen kann, deren Gaussisches Krümmungsmaass der Ausdruck darstellt. Es bildet insofern der Ausdruck für das Riemann'sche Krümmungsmaass eine gewisse Analogie zu dem Ausdrucke für das Linienelement, und seine Nützlichkeit besteht hauptsächlich darin, dass es eine bequeme Beschreibung gewisser geometrischer Eigenschaften specieller Räume erlaubt.

§ 5.

Ueber diejenigen Räume, für welche alle durch einen festen Punkt gehenden geodätischen Flächen doppelt unendlich viel geodätische Linien des Raumes enthalten.

Die geodätischen Flächen können offenbar nur bis zu einem gewissen Grade als Analogien der Ebenen des gewöhnlichen Raumes betrachtet werden, insofern dieselben i. A. nur einfach unendlich viel geodätische Linien des Raumes enthalten werden. Es kann aber in besonderen Räumen Systeme von geodätischen Flächen mit doppelt unendlich viel geodätischen Linien geben, und die Eigenschaften dieser Systeme können zu einer geeigneten Classification der Räume führen. In dieser allgemeinen Form scheint die Frage indessen sehr schwierig

zu sein. Wir wollen uns daher auf die specielle Frage beschränken, *unter welchen Bedingungen alle durch einen festen Punkt, etwa den Anfangspunkt, gehenden geodätischen Flächen doppelt unendlich viel geodätische Linien enthalten.*

Ist $(y_m^1) = (r^1 \eta_m^1)$ irgend ein Punkt unsres Raumes, ϱ die Länge einer von ihm ausgehenden geodätischen Linie und $\zeta_m = \left(\frac{dy_m}{d\varrho}\right)^1$, so lauten nach (14) die Gleichungen dieser geodätischen Linie:

$$(69) \qquad y_m - y_m^1 = \varrho\zeta_m - \frac{\varrho^2}{4}\sum_{a,b,c}^{n} B_{mc}^1 q_{c,ab}^1 \zeta_a \zeta_b + \cdots,$$

wenn man mit B_{mc} und $q_{c,ab}$ die den Grössen A_{mc} und $p_{c,ab}$ entsprechenden für die Normalvariablen bezeichnet. Soll daher diese geodätische Linie auf einer durch den Anfangspunkt gehenden geodätischen Fläche liegen, welche durch die beiden geodätischen Linien mit den Richtungscosinus η_m^1 und η_m'' bestimmt ist, so muss andrerseits sein:

$$(70) \qquad y_m - y_m^1 = \varrho(a_1\eta_m^1 + b_1\eta_m'') + \frac{\varrho^2}{2}(a_2\eta_m^1 + b_2\eta_m'') + \cdots.$$

Hieraus folgt zunächst:

$$(71) \qquad \zeta_m = \left(\frac{dr}{d\varrho}\right)^1 \eta_m^1 + r^1 \frac{d\eta_m^1}{d\varrho} = a_1\eta_m^1 + \beta_1 \frac{d\eta_m^1}{d\varrho} = a_1\eta_m^1 + b_1\eta_m''.$$

Zweitens aber:

$$(72) \qquad a_2\eta_m^1 + b_2\eta_m'' = \alpha_2\eta_m^1 + \beta_2 \frac{d\eta_m^1}{d\varrho}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{a,b,c}^{n} B_{mc}^1 q_{c,ab}^1 \left(\alpha_1\eta_a^1 + \beta_1 \frac{d\eta_a^1}{d\varrho}\right)\left(\alpha_1\eta_b^1 + \beta_1 \frac{d\eta_b^1}{d\varrho}\right).$$

Hieraus folgt, wenn wir den Index 1 jetzt fortlassen und die Bezeichnung (35) anwenden:

$$(73) \qquad \alpha_2 b_a + \beta_2 \sum_{b}^{n} b_{ab} \frac{d\eta_b}{d\varrho} = -\alpha_1\beta_1 \sum_{b,c}^{n} q_{a,bc}\eta_b \frac{d\eta_c}{d\varrho}$$

$$-\frac{1}{2}\beta_1^2 \sum_{b,c}^{n} q_{a,bc} \frac{d\eta_b}{d\varrho}\frac{d\eta_c}{d\varrho};$$

denn der Coefficient von α_1^2 verschwindet wegen (33).

Sollen nun diese Gleichungen für alle möglichen geodätischen Linien durch den Punkt (y_m) erfüllt sein, also für beliebige Werthe der $\frac{d\eta_m}{d\varrho}$, vorausgesetzt, dass diese die Bedingung (51):

$$\sum_{a,b}^{n} b_{ab}\,\eta_a \frac{d\eta_b}{d\varrho} = 0. \tag{74}$$

befriedigen, so müssen sie auch für unendlich kleine Werthe der $\frac{d\eta_m}{d\varrho}$ erfüllt sein. Dann verschwindet der Coefficient von β_1^2, es muss also auch α_2 verschwinden, sodass wir, wenn nun jene Gleichungen unabhängig von $\frac{d\eta_m}{d\varrho}$ bestehen sollen, auf Grund von (91) erhalten:

$$\beta_2 b_{ab} - \lambda_a b_b = -\alpha_1\beta_1 \sum_{c}^{n} q_{a,bc}\,\eta_c. \tag{75}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit η_a und addirt sie, so folgt:

$$\lambda_a = \beta_2 b_a. \tag{76}$$

Bezeichnet man daher $\frac{\beta_2}{\alpha_1\beta_1}$ mit $\frac{\partial \log M}{\partial r}$, so folgt:

$$\frac{\partial M}{\partial r}(b_{ab} - b_a b_b) + M\sum_{c}^{n} q_{a,bc}\,\eta_c = 0. \tag{77}$$

Insofern hier M als Function der y_m zu betrachten ist, haben wir, wie früher, unter:

$$\frac{\partial M}{\partial r} = \sum_{a}^{n} \frac{\partial M}{\partial y_a}\,\eta_a \tag{78}$$

zu verstehen. Aus obiger Gleichung folgt daher leicht:

$$\frac{\partial M}{\partial r}(b_{ab} - b_a b_b) + M\frac{\partial b_{ab}}{\partial r} = 0, \tag{79}$$

oder, da die b_a von r unabhängig sind:

$$\frac{\partial\left(M(b_{ab} - b_a b_b)\right)}{\partial r} = 0, \tag{80}$$

d. h.

$$M(b_{ab} - b_a b_b) = M^0(b^0_{ab} - b_a b_b), \tag{81}$$

also nach (50) und (53):

$$\frac{M^0}{M} = \mu^2.$$

Es ergeben sich daher als nothwendige Bedingungen unseres Problems die Gleichungen:

$$b_{ab} - b_a b_b = \mu^2(b^0_{ab} - b_a b_b), \tag{82}$$

welche offenbar besagen, dass μ^2 *von den* $d\eta_m$ *unabhängig ist, also*

eine blosse Function der y_m ist, welche demnach für alle geodätische Flächen des Anfangspunktes durch die geodätische Linie (η_m) unverändert bleibt.

Diese Bedingungen erweisen sich nun aber auch als hinreichend, d. h. es folgt aus ihnen das Bestehen der Gleichungen (73) auch für alle endlichen $\frac{d\eta_m}{d\varrho}$. Wir multipliciren, um dies zu beweisen, die Gleichungen (82) mit r^2 und können sie dann unter Anwendung der Bezeichnungen (25) schreiben:

$$r^2 b_{ab} - r_a r_b = \mu^2 (r^2 b^0_{ab} - r_a r_b). \tag{83}$$

Differentiiren wir diese Gleichungen partiell nach y_c so folgt:

$$2r_c b_{ab} + r^2 \frac{\partial b_{ab}}{\partial y_c} - (1-\mu^2)\{r_a b^0_{bc} + r_b b^0_{ac}\} = \frac{\partial(\mu^2)}{\partial y_c}(r^2 b^0_{ab} - r_a r_b) + 2\mu^2 r_c b^0_{ab}; \tag{84}$$

denn aus:

$$r^2 = \sum_{a,b}^{n} b^0_{ab} y_a y_b \tag{85}$$

folgt, dass:

$$\frac{\partial r}{\partial y_c} = b_c. \tag{86}$$

Aus (84) folgt nun unter Berücksichtigung von (83) selbst:

$$\frac{\partial b_{ab}}{\partial y_c} = \frac{1-\mu^2}{r}\{b_a b^0_{bc} + b_b b^0_{ac} - 2b_a b_b b_c\} + \frac{\partial(\mu^2)}{\partial y_c}(b^0_{ab} - b_a b_b). \tag{87}$$

Daraus folgt weiter:

$$q_{a,bc} = \frac{2(1-\mu^2)}{r}(b^0_{bc} - b_b b_c) b_a + \frac{\partial(\mu^2)}{\partial y_c}(b^0_{ab} - b_a b_b) + \frac{\partial(\mu^2)}{\partial y_b}(b^0_{ac} - b_a b_c) - \frac{\partial(\mu^2)}{\partial y_a}(b^0_{bc} - b_b b_c). \tag{88}$$

Es ist hiernach in Rücksicht auf (48):

$$\sum_{b,c}^{n} q_{a,bc} \frac{d\eta_b}{d\varrho} \frac{d\eta_c}{d\varrho} = \frac{2(1-\mu^2)}{r}\left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2 b_a + 2\frac{db_a}{d\varrho}\sum_{b}^{n} \frac{\partial(\mu^2)}{\partial y_b}\frac{d\eta_b}{d\varrho} - \frac{\partial(\mu^2)}{\partial y_a}\left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2. \tag{89}$$

Da nun nach (44):

$$\cos\varphi = \sum_{a,b}^{n} b^0_{ab}\,\eta_a\,\eta'_b = \frac{1}{r}\sum_{a,b}^{n} b^0_{ab}\,y_a\,\eta'_b,$$

so folgt:

$$-\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y_a} = \frac{1}{r}\sum_{b}^{n} b^0_{ab}\,\eta'_b - \frac{b_a}{r}\sum_{b,c}^{n} b^0_{bc}\,\eta_b\,\eta'_c,$$

also, weil

$$\eta'_c = \alpha\eta_c + \beta\frac{d\eta_c}{d\varrho}:$$

$$-\sin\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial y_a} = \beta\frac{1}{r}\frac{db_a}{d\varphi}.$$

Da nun allgemein, wenn N irgend eine Function der y_a ist:

$$\frac{\partial N}{\partial\varphi} = r\sum_{a}^{n}\frac{\partial N}{\partial y_a}\frac{d\eta_a}{d\varphi}, \tag{90}$$

so folgt

$$\beta = -\sin\varphi,$$

also:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_a} = \frac{1}{r}\,\frac{db_a}{d\varphi}. \tag{91}$$

Demnach wird:

$$\frac{\partial(\mu^2)}{\partial y_a} = b_a\,\frac{\partial(\mu^2)}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{db_a}{d\varphi}\,\frac{\partial(\mu^2)}{\partial\varphi}. \tag{92}$$

Dadurch geht (89) über in:

$$\sum_{b,c}^{n} q_{a,bc}\frac{d\eta_b}{d\varrho}\,\frac{d\eta_c}{d\varrho} = b_a\left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2\left\{\frac{2(1-\mu^2)}{r} - \frac{\partial(\mu^2)}{\partial r}\right\} + \frac{1}{r}\,\frac{db_a}{d\varrho}\,\frac{d\varphi}{d\varrho}\,\frac{\partial(\mu^2)}{\partial\varphi}. \tag{93}$$

Ebenso folgt:

$$\sum_{a,b,c}^{n} q_{a,bc}\frac{d\eta_a}{d\varrho}\,\frac{d\eta_b}{d\varrho}\,\frac{d\eta_c}{d\varrho} = \frac{1}{r}\left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^3\frac{\partial(\mu^2)}{\partial\varphi}; \tag{94}$$

$$\sum_{a,b,c}^{n} q_{a,bc}\frac{d\eta_a}{d\varrho}\,\eta_b\,\frac{d\eta_c}{d\varrho} = \left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2\frac{\partial(\mu^2)}{\partial r}; \tag{95}$$

$$\sum_{b,c}^{n} q_{a,bc}\,\eta_b\frac{d\eta_c}{d\varrho} = \frac{db_a}{d\varrho}\,\frac{\partial(\mu^2)}{\partial r}. \tag{96}$$

Multiplicirt man daher die Gleichung (73) mit $\frac{d\eta_a}{d\varrho}$ resp. η_a und summirt über a, so folgt:

$$(97) \qquad \beta_2 = -\alpha_1\beta_1 \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial(\mu^2)}{\partial r} - \frac{1}{2}\beta_1^2 \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\varrho}\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial(\mu^2)}{\partial\varphi},$$

und:

$$(98) \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{2}\beta_1^2\left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2\left\{\frac{2(1-\mu^2)}{r} - \frac{\partial(\mu^2)}{\partial r}\right\}$$

unter Berücksichtigung von (33). Nun folgt doch aus (82), dass:

$$(99) \qquad \sum_b^n b_{ab}\frac{d\eta_b}{d\varrho} = \mu^2\frac{db_a}{d\varrho}.$$

Setzt man daher die Werthe von α_2 und β_2 in die Gleichungen (73) ein, so folgt unter Berücksichtigung von (96):

$$\sum_{b,c}^n q_{a,bc}\frac{d\eta_b}{d\varrho}\frac{d\eta_c}{d\varrho} = b_a\left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2\left\{\frac{2(1-\mu^2)}{r} - \frac{\partial(\mu^2)}{\partial r}\right\} + \frac{db_a}{d\varrho}\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\varrho}\frac{\partial(\mu^2)}{\partial\varphi},$$

also genau dieselben Gleichungen, wie wir sie auf Grund von (82) in den Gleichungen (93) gefunden hatten.

Es sind folglich die Gleichungen (82) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass jede durch einen Punkt der geodätischen Linie (η_m) gehende geodätische Linie mit einer der geodätischen Flächen, welche im Anfangspunkte ihr Centrum haben und die geodätische Linie (η_m) enthalten, drei auf einander folgende Punkte gemeinsam hat. Das nun die η_m selbst noch willkürlich, so folgt, dass jede geodätische Linie eines Raumes, für welchen die Coefficienten des Linienelements den Gleichungen (82) gemäss bestimmt sind, in einer geodätischen Fläche, deren Centrum der Anfangspunkt ist, enthalten ist. Hier können offenbar die b^0_{ab} die Coefficienten irgend einer positiven quadratischen Form sein und μ^2 irgend eine Function der y_a, welche nur den Anfangsbedingungen zu genügen hat, dass für $r = 0 : \mu^2 = 1$ und $\frac{\partial(\mu^2)}{\partial y_a} = 0$, wie aus den Gleichungen (87) hervorgeht; denn dann ist natürlich auch $\left(\frac{\mu^2-1}{r}\right)^0 = \left(\frac{\partial(\mu^2)}{\partial r}\right)^0 = 0$. Offenbar sind es diese Anfangsbedingungen, welche die y_a als die Normalvariabeln charakterisiren. Wir erhalten daher folgendes Resultat:

I. *Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass alle geodätischen Flächen des durch das Linienelement:*

$$ds^2 = \sum_{a,b}^{n} b_{ab}\, dy_a\, dy_b$$

charakterisirten Raumes, welche durch den Anfangspunkt gehen, doppelt unendlich viel geodätische Linien dieses Raumes enthalten, bestehen darin, dass:

$$r^2 b_{ab} - r_a r_b = \mu^2 \left(r^2 b^0_{ab} - r_a r_b\right),$$

wo die b^0_{ab}, *die Anfangswerthe der* b_{ab}, *die Coefficienten irgend einer positiven quadratischen Form, wo:*

$$r^2 = \sum_{a,b}^{n} b^0_{ab}\, y_a\, y_b,$$

$$r_a = \sum_{b}^{n} b^0_{ab}\, y_b$$

und μ^2 *irgend eine Function der* y_a, *für welche im Anfangspunkte* $\mu^2 = 1$ *und* $\frac{\partial(\mu^2)}{\partial y_a} = 0$.

Offenbar kann man unbeschadet der Allgemeinheit stets

$$r^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2,$$

also

$$r_a = y_a$$

setzen.

§ 6.

Ueber das Riemann'sche Krümmungsmaass dieser Räume.

Aus der Thatsache, dass für unsere speciellen Räume μ^2 einer eine Function der y_a, also für alle geodätischen Flächen durch dieselbe geodätische Linie (η_a) unveränderlich ist, ergiebt sich Folgendes: Zieht man durch den Anfangspunkt irgend zwei zu (η_a) benachbarte geodätische Linien, welche mit ihr denselben Winkel $d\varphi$ bilden, so schliessen diese mit (η_a) auf den dadurch bestimmten geodätischen Flächen zwei auf einander abwickelbare Streifen ein. Es hat demnach das Riemann'sche Krümmungsmaass jedes Punktes für alle geodätischen Flächen, welche die geodätische Linie (η_a) durch den Anfangspunkt enthalten, denselben Werth, nämlich $-\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}$, wenn wir $r\mu = m$ setzen. Es ist dies eine unmittelbare geometrische Folge aus unserem Satze, lässt sich aber auch leicht analytisch verificiren. Es müssten hiernach nämlich unabhängig von den $d\eta_a$ die Gleichungen bestehen,

welche aus (67) und (68) folgen, wenn man $dy_a = dr\,\eta_a$ und $\delta y_a = \delta r(\alpha\eta_a + \beta\, d\eta_a)$ setzt, nämlich:

$$(100)\qquad -\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\sum_{c,b}^{n}(b_{ab}\,b_{cb} - b_{ac}\,b_{bb})\,\eta_c\,\eta_b$$

$$+\frac{m}{2}\left\{\sum_{c,b}^{n}\left(\frac{\partial q_{a,bb}}{\partial y_c} - \frac{\partial q_{a,cb}}{\partial y_b}\right)\eta_c\,\eta_b\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{c,b,f,g}^{n} B_{fg}\,(q_{f,ab}\,q_{g,cb} - q_{f,ac}\,q_{g,bb})\,\eta_c\,\eta_b\right\} = 0.$$

Nun liefert in der That die Differentiation der Gleichungen (77), die man auch schreiben kann:

$$(101)\qquad r^2\frac{\partial\mu}{\partial r}(b_{ab} - b_a b_b) - \frac{1}{2}\,\mu r^2\sum_{b}^{n} q_{a,bb}\,\eta_b = 0,$$

wenn man bedenkt, dass:

$$\frac{\partial\left(r^2\,\frac{\partial\left(\frac{m}{r}\right)}{\partial r}\right)}{\partial r} = r\,\frac{\partial^2 m}{\partial r^2},$$

$$b_{ab} - b_a b_b = b_{ab}\sum_{c,b}^{n} b_{cb}\,\eta_c\,\eta_b - \sum_{c}^{n} b_{ac}\,\eta_c\sum_{b}^{n} b_{bb}\,\eta_b$$

$$= \sum_{c,b}^{n}(b_{ab}\,b_{cb} - b_{ac}\,b_{bb})\,\eta_c\,\eta_b,$$

$$q_{a,bc} + q_{b,ac} = 2\,\frac{\partial b_{ab}}{\partial y_c}$$

und endlich, wie durch partielle Differentiation von:

$$(102)\qquad \sum_{c,b}^{n} q_{a,cb}\,\eta_c\,\eta_b = 0$$

nach η_b folgt (vergl. (33)):

$$2\sum_{c}^{n} q_{a,bc}\,\eta_c + r\sum_{c,b}^{n}\frac{\partial q_{a,cb}}{\partial y_b}\,\eta_c\,\eta_b = 0,$$

die folgenden Identitäten:

$$(103)\qquad r\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\sum_{c,b}^{n}(b_{ab}b_{cb}-b_{ac}b_{bb})\eta_c\eta_b$$
$$-\frac{mr}{2}\sum_{c,b}^{n}\left(\frac{\partial q_{a,bb}}{\partial y_c}-\frac{\partial q_{a,cb}}{\partial y_b}\right)\eta_c\eta_b$$
$$+\frac{r^2}{2}\frac{\partial\mu}{\partial r}\sum_{c}^{n}q_{b,ac}\eta_c=0.$$

Diese Gleichungen würden nun mit (100) auf Grund von (102) identisch sein, wenn:

$$(104)\qquad \frac{\partial\mu}{\partial r}\sum_{c}^{n}q_{b,ac}\eta_c-\frac{1}{2}\mu\sum_{c,b,f,g}^{n}B_{fg}q_{f,ac}q_{g,bb}\eta_c\eta_b=0$$

wäre. Dies folgt nun aber leicht, wenn man die Gleichungen (101):

$$\frac{\partial\mu}{\partial r}(b_{bg}-b_b b_g)-\frac{1}{2}\mu\sum_{b}^{n}q_{g,bb}\eta_b=0$$

mit $B_{fg}q_{f,ac}\eta_c$ multiplicirt und über c, f, g summirt. Denn es ist:

$$\sum_{g}^{n}b_g B_{fg}=\eta_f,$$

also:

$$\sum_{c,f,g}^{n}b_g B_{fg}q_{f,ac}\eta_c=0.$$

Bezeichnet man daher die linke Seite von (101) mit $\varphi_{a,b}$, so kann man den Gleichungen (100) die Form geben:

$$(105)\qquad \frac{\partial\varphi_{a,b}}{\partial r}-\frac{1}{2}\sum_{c,f,g}^{n}B_{fg}q_{f,ac}\eta_c\varphi_{b,g}=0,$$

aus welcher unmittelbar folgt, dass die Gleichungen (101) oder (82) die Gleichungen (100) zur Folge haben. Würden umgekehrt*) Gleichungen von der Form (100) bestehen, in denen $m=r\mu$ eine Function der y_a bedeutet, welche für $r=0$ verschwindet, so würden aus ihnen die Gleichungen (101) folgen. Denn weil die $\varphi_{a,b}$ für $r=0$ verschwinden, so verschwinden sie wegen der mit (100) identischen Gleichungen (105) überhaupt. Nimmt man daher noch an, dass für

*) S. Lipschitz, Fortgesetzte Untersuchungen u. s. w. Journ. f. r. u. a. M. Bd. 72, p. 47.

$r = 0$: $\mu^2 = 1$ und $\frac{\partial(\mu^2)}{\partial y_a} = 0$, so folgt, wie in § 5, dass μ^2 die durch (53) definirte Bedeutung hat; die Nothwendigkeit einer solchen Annahme würde sich natürlich wiederum aus den Gleichungen (82) und (87) ergeben. Bedenkt man, welche geometrische Bedeutung das Bestehen der Gleichungen (100) hat, so ergiebt sich der Satz:

II. *Giebt es für einen Raum einen ausgezeichneten Punkt von der Beschaffenheit, dass für jeden Punkt des Raumes das Riemann'sche Krümmungsmaass aller geodätischen Flächen, welche die nach dem ausgezeichneten Punkte gehende geodätische Linie enthalten, denselben Werth besitzt, so enthalten alle diese geodätischen Flächen durch den ausgezeichneten doppelt unendlich viel geodätische Linien dieses Raumes; und umgekehrt.*

§ 7.

Ueber die projectiven Räume oder die Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses.

Unter einem projectiven Raume verstehen wir einen solchen, in welchem innerhalb eines gewissen Bereiches desselben erstens durch zwei Punkte eine geodätische Linie vollständig bestimmt ist, und zweitens jede geodätische Fläche doppelt unendlich viel geodätische Linien enthält, also durch drei Punkte bestimmt ist. Es kann hier nicht unsere Aufgabe sein, den directen Beweis dafür zu erbringen, dass diese Definition mit der üblichen Definition eines projectiven Raumes übereinstimmt, ein Beweis, der übrigens in Formel (110) implicite enthalten ist. Für uns wird vielmehr von grösserer Wichtigkeit die Frage sein, ob es in einem Raume mehr als einen ausgezeichneten Punkt von der Beschaffenheit geben kann, dass jede ihn enthaltende geodätische Fläche doppelt unendlich viel geodätische Linien enthält, ohne dass jeder Punkt diese Eigenschaft besitzt. Wir werden diese Frage in verneinendem Sinne entscheiden und zwar, wie man wohl sagen kann, auf geometrischem Wege. Wir benutzen dazu den folgenden allgemeinen:

Hülfsatz. *Verbindet man irgend ein Büschel geodätischer Linien durch den Punkt A^0 mit irgend einer andern geodätischen Linie η^0 durch diesen Punkt durch geodätische Flächen, so bilden die unendlich kleinen Tangenten derselben in irgend einem Punkte A^1 von η^0 ein Strahlenbündel eines ebenen dreidimensionalen Raumes, von dem jedes Strahlenbüschel vermittelst dieser geodätischen Flächen auf das erstgenannte Büschel geodätischer Linien projectiv bezogen ist.*

Sind nämlich η^1, η^2, $\eta^3 = \alpha\eta^1 + \beta\eta^2$ und $\eta^4 = \alpha'\eta^1 + \beta'\eta^2$ irgend vier Linien dieses Büschels, so ist nach (54) ihr Doppelverhältniss $(\eta^1\eta^2\eta^3\eta^4) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}$. Ist andrerseits ξ^1 eine geodätische Linie,

welche durch den Punkt A^1 geht, so ist $\xi^1 = a^1\eta^0 + b^1\eta_1$, falls ξ^1 die durch η^0 und η^1 bestimmte geodätische Fläche tangiren soll (vergl. (71)). In analoger Weise sei $\xi^2 = a^2\eta^0 + b^2\eta^2$. Soll dann ξ^3 erstens die geodätische Fläche $(\eta^0\eta^3)$ tangiren, so muss sein:

$$\xi^3 = a^3\eta^0 + b^3\eta^3 = a^3\eta^0 + \alpha b^3\eta^1 + \beta b^3\eta^2$$
$$= \left(a^3 - \frac{b^3a^1\alpha}{b^1} - \frac{a^3a^2\beta}{b^2}\right)\eta^0 + \frac{\alpha b^3}{b^1}\xi^1 + \frac{\beta b^3}{b^2}\xi^2.$$

Hierin ist zunächst der Beweis des ersten Theiles unseres Satzes enthalten. Soll nun weiter ξ^3 auch der geodätischen Fläche $(\xi^1\xi^2)$ angehören, so muss der Coefficient von η^0 in dem letzten Ausdrucke verschwinden. Hierdurch in Verbindung mit der Identität

$$\sum_{a,b}^{n} b^1_{ab}\,\xi_a{}^3\,\xi_b{}^3 = 1\text{*)}$$

sind dann a^3 und b^3 bis auf das Vorzeichen, welches sich nur auf den Richtungssinn der geodätischen Linie bezieht, vollständig bestimmt. Ist nun in analoger Weise:

$$\xi^4 = a^4\eta^0 + b^4\eta^4 = \frac{\alpha' b^4}{b^1}\xi^1 + \frac{\beta' b^4}{b^2}\xi^2,$$

so wird das Doppelverhältniss:

$$(\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4) = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{b^1}{b^2} : \frac{\beta' b^1}{\alpha' b^2} = (\eta^1\eta^2\eta^3\eta^4),$$

womit auch der zweite Theil unseres Satzes bewiesen ist. Man sieht also, dass wir Projectivität durchaus in dem gewöhnlichen Sinne der Gleichheit des Doppelverhältnisses der Sinus der Winkel entsprechender Strahlen verstehen.

Seien nunmehr A^0 und A^1 zwei Punkte von der Beschaffenheit, dass erstens durch sie nur eine geodätische Linie möglich ist und dass zweitens alle durch jeden derselben hindurchgehenden geodätischen Flächen doppelt unendlich viel geodätische Linien des Raumes enthalten, so folgt zunächst unmittelbar aus unserem Hülfssatze, dass die beiden geodätischen Strahlbüschel, welche aus den geodätischen Verbindungslinien von A^0 und A^1 mit den Punkten irgend einer geodätischen Linie η bestehen, projectiv oder perspectiv auf einander bezogen sind.

Offenbar wird man einem Punkte A^2 dieselbe Beschaffenheit wie den Punkten A^0 und A^1 zusprechen können, wenn gezeigt werden kann, dass die geodätischen Verbindungslinien von A^2 mit den Punkten von η stets eine geodätische Fläche bilden. Nun bilden nach unserm Hülfssatze die unendlich kleinen Tangenten im Punkte A^2 an die

*) Wir haben oben der kürzeren Schreibweise wegen bei den η und ξ die unteren Indices fortgelassen.

geodätischen Flächen durch A^0A^2 und die Punkte von η einen ebenen dreidimensionalen Raum, weil die geodätischen Verbindungslinien von A^0 mit den Punkten von η der Voraussetzung nach ein geodätisches Strahlenbüschel bilden. Dasselbe gilt auch in Bezug auf die geodätischen Flächen durch A^1A^2 und die Punkte von η. Diese beiden ebenen Räume werden sich also, wenn sie nicht identisch sind, in der That in einer Ebene durchdringen, welche die Richtungen jener geodätischen Verbindungslinien von A^2 mit den Punkten von η enthält. Fallen aber jene beiden ebenen Räume zusammen, so wird man, soweit es auf den Beweis unseres Satzes ankommt, annehmen dürfen, dass η die geodätische Fläche $A^0A^1A^2$ trifft, woraus dann leicht folgt, dass die projectiven Büschel der unendlich kleinen Tangentialebenen in A^2 an die geodätischen Flächen durch A^0A^2 resp. A^1A^2 und die Punkte von η perspectiv sind, die unendlich kleinen Tangenten an die geodätischen Verbindungslinien von A^2 mit den Punkten η also wiederum in einer Ebene liegen. Wir erhalten daher den folgenden Satz:

III. *Giebt es in einem Raume innerhalb eines Bereiches desselben, in welchem durch zwei Punkte eine geodätische Linie vollständig bestimmt ist, zwei Punkte von der Beschaffenheit, dass alle durch jeden derselben hindurchgehenden geodätischen Flächen doppelt unendlich viel geodätische Linien des Raumes enthalten, so hat jede geodätische Fläche innerhalb dieses Bereiches dieselbe Eigenschaft, d. h. der Raum ist ein projectiver.*

Was nun die Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses betrifft, welche also (vergl. (68)) durch die Gleichungen:

$$k^0\,(a_{ab}\,a_{cb} - a_{ac}\,a_{bb}) + \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b};\ \mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = 0 \tag{106}$$

charakterisirt sind, so folgt aus Satz II unmittelbar:

IV. *Jeder Raum constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses ist ein projectiver Raum.*

Was nun die Umkehrung dieses Satzes betrifft, so ist ja aus II unmittelbar klar, dass in einem projectiven Raume für jeden Punkt das Riemann'sche Krümmungsmaass nach allen Richtungen hin denselben Werth besitzt. Es kommt also nur noch darauf an zu beweisen, dass es auch von Punkt zu Punkt seinen Werth nicht ändert. Wir können dies aus dem Satze des Herrn Beltrami*) schliessen, *dass jede Fläche, welche innerhalb eines Bereiches so punkteindeutig auf die Ebene abgebildet werden kann, dass jeder geodätischen Linie derselben eine gerade Linie entspricht, und umgekehrt, constantes Krümmungs-*

*) S. Beltrami, Rispostare i punti di una superficie ecc. Ann. di Mat. t. 7, p. 203; vergl. auch Dini, Sopra un problema, che si presenta ecc. Annali di Mat. Ser. II, tom. III, p. 268; und Lie, Untersuchungen über geodätische Curven, Math. Ann. Bd. XX, p. 371 und 425.

maass besitzt. Denn jede geodätische Fläche eines projectiven Raumes besitzt diese Eigenschaft.

Wollen wir uns über diesen Satz Rechenschaft geben, so wird es offenbar darauf ankommen, von den projectiven Eigenschaften eines solchen Raumes zu den metrischen eine Brücke zu finden. Da nun nach unserer Definition der Projectivität geodätische Strahlenbüschel mit entsprechend gleichen Winkeln projectiv sind, so wird diese Brücke gefunden sein, wenn wir auch beweisen können, dass geodätische Linien mit entsprechend gleichen Strecken als projectiv angesehen werden können; und es wird genügen diesen Satz für zwei durch einen Punkt A^0 gehende unendlich nahe geodätische Linien η' und η'' zu beweisen, wenn zwei ihrer Punkte P' und P'' gleichen Abstandes von A^0 einander zugewiesen werden. Sei nun η eine dritte geodätische Linie durch A^0, welche mit η' und η'' denselben unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ bildet, so werden offenbar nach Satz I die beiden unendlich schmalen geodätischen Streifen $(\eta\eta')$ und $(\eta\eta'')$ auf einander abwickelbar sein, weil in $ds^2 = dr^2 + r^2\mu^2 d\varphi^2$ die Grösse μ^2 längs der geodätischen Linie η für beide Streifen je denselben Werth besitzt. Es bilden hiernach die geodätischen Linien, welche die Punkte P' aus irgend einem Punkte A^1 von η projiciren mit η dieselben Winkel wie die entsprechenden geodätischen Linien A^1P'', sodass η' und η'' in der That projectiv auf einander bezogen sind. Hieraus folgt dann auch, dass *alle geodätischen Linien einer geodätischen Fläche, welche auf einer und derselben geodätischen Linie senkrecht stehen, ein geodätisches Strahlenbüschel bilden,* d. h. dass ihnen bei obiger Abbildung der Fläche auf die Ebene gerade Linien durch denselben Punkt entsprechen.

Daraus lässt sich dann durch einfache geometrische Betrachtungen, auf die wir hier nicht eingehen wollen, beweisen, dass jede geodätische Fläche ∞^3 projective Transformationen in sich gestattet, bei welcher jedes Paar rechtwinkliger geodätischer Linien in ein ebensolches übergeht, welche Transformationen somit Verbiegungen der Fläche in sich sind. Hiermit ist der Beltrami'sche Satz bewiesen. Wir haben daher den Satz:

V. *Jeder projective Raum ist ein Raum constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses.*

Wir können diesem Satze den folgenden negativen, der mir bemerkenswerth erscheint, hinzufügen:

VI. *Ist in einem Raume das Riemann'sche Krümmungsmaass in jedem Punkte nach allen Flächenrichtungen hin constant, so ändert es sich auch von Punkt zu Punkt nicht.*

Wir stellen zum Schluss noch die Form des Linienelements in solchen Räumen auf. Weil alle geodätischen Flächen derselben con-

stantes Krümmungsmaass besitzen, so ist in Formel (43) $r^2\mu^2 = \frac{\sin^2 \varkappa r}{\varkappa^2}$ zu setzen, wenn $\varkappa^2$ das constante Krümmungsmaass. Wählen wir daher die Normalvariabeln so, wie am Schluss von § 5 angegeben wurde, so folgt:

$$(117) \qquad ds^2 = dr^2 + \frac{\sin^2 \varkappa r}{\varkappa^2}(d\eta_1^2 + d\eta_2^2 + \cdots + d\eta_n^2),$$

wo:

$$(108) \qquad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \cdots + \eta_n^2 = 1.$$

Machen wir die Substitution

$$(109) \qquad x_a = iR \tan \varkappa r\, \eta_a,$$

so nimmt das Linienelement:

$$(110) \qquad ds^2 = \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\left(\sum_a^n dx_a^2\right)\left(\sum_a^n x_a^2 - R^2\right) - \left(\sum_a^n x_a\, dx_a\right)^2}{\left(\sum_a^n x_a^2 - R^2\right)^2},$$

die Gestalt an, von welcher ich in meiner Abhandlung „über die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses“*) ausgegangen bin. Die dort gemachte Annahme, dass $\cot \varkappa = iR$, entspricht offenbar der Voraussetzung, dass der sphärische Raum mit dem Radius $r = 1$ die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ habe.

§ 8.

Ueber Verallgemeinerungen des Riemann'schen Krümmungsmaasses.

Von der Untersuchung der geodätischen Flächen könnte man nun zu der von geodätischen Räumen übergehen. Dieselben würden offenbar zu definiren sein als aus denjenigen durch einen Punkt laufenden geodätischen Linien bestehend, deren Anfangselemente einen ebenen Raum bilden. Man könnte weiter versuchen für diese einen Begriff aufzustellen, welcher dem des Riemann'schen Krümmungsmaasses analog wäre. Natürlich ist hierbei der Analogiebildung ein weiter Spielraum gelassen. Indessen scheint es mir nicht zweckmässig, wie dies zumeist geschehen ist, von dem Falle auszugehen, dass der betreffende n-dimensionale Raum in einem ebenen oder nicht-euklidischen Raume von $n+1$ Dimensionen enthalten ist, weil diese Annahme für $n > 2$ nicht bei jeder Form des Linienelements erlaubt ist. Es wird vielmehr geboten sein diesen Begriff nur durch Operationen innerhalb des durch sein Linienelement definirten Raumes zu bilden. Zu diesem Zwecke wird es nützlich sein, der geometrischen Definition des Gaussischen Krümmungsmaasses einer Fläche eine solche Form zu geben.

*) S. Math. Ann. Bd. XXVII, p. 166.

Nun erkennt man aus den Identitäten (36) leicht, dass unter Zugrundelegung von Normalvariabeln y_1, y_2 die Parameterlinien $y_1 = 0$ und $y_2 = dy_2$ resp. $y_1 = \delta y_1$ und $y_2 = 0$ bis auf unendlich kleine Grössen 2. Ordnung denselben Winkel einschliessen wie die Parameterlinien $y_1 = 0$ und $y_2 = 0$. Hiernach kann man aus Formel (61) sofort die folgende Definition des Gaussischen Krümmungsmaasses ablesen:

Zieht man von einem Punkte A^0 einer Fläche zwei unendlich kleine Linien A^0A^1 und A^0A^2 und durch A^2 und A^1 zwei diesen resp. gleichgerichtete Linien, welche sich in A^3 treffen mögen, so ist die Differenz der Quadrate der gegenüberliegenden Seiten des unendlich kleinen Vierecks $A^0A^1A^2A^3$, d. h. $(A^0A^1)^2 - (A^2A^3)^2$ oder $(A^0A^2)^2 - (A^1A^3)^2$, dividirt durch das Quadrat seines Flächeninhalts gleich dem Dreifachen des Gaussischen Krümmungsmaasses dieser Fläche im Punkte A^0.)*

Construirt man sich nun in einem dreidimensionalen Raume von einem Punkte A^0 aus in ähnlicher Weise ein unendlich kleines Parallelepipedon, nimmt die Differenz der Quadrate gegenüberliegender Seitenflächen desselben und dividirt sie durch das Quadrat seines Volumens, so erhält man einen Ausdruck, den man als das Krümmungsmaass des Raumes in diesem Punkte bezeichnen kann. In der That ergiebt die Ausführung dieser Vorschrift nach ähnlichen Umformungen, wie sie in § 4 angewendet wurden, für den durch die drei Richtungen dx_a, δx_a und Δx_a bestimmten geodätischen Raum als Werth eines solchen Krümmungsmaasses bis auf einen Zahlenfactor den Ausdruck:

$$(111)\qquad \frac{\sum_{a,b;c,b;f,g}^{n} a_{ab}(c,b;f,g)\,\xi_{abf}\,\xi_{bcg}}{\sum_{a,b;c,b;f,g}^{n} \begin{vmatrix} a_{ab} & a_{ac} & a_{ag} \\ a_{bb} & a_{cb} & a_{bg} \\ a_{bf} & a_{cf} & a_{fg} \end{vmatrix} \xi_{abf}\,\xi_{bcg}},$$

wo:

$$(112)\qquad \xi_{abf} = \begin{vmatrix} dx_a & \delta x_a & \Delta x_a \\ dx_b & \delta x_b & \Delta x_b \\ dx_f & \delta x_f & \Delta x_f \end{vmatrix},$$

welche Grössen man als die Coordinaten des betreffenden geodätischen Raumes bezeichnen kann.

---

*) Eine solche Definition meinte wohl auch Herr Dedekind a. a. O. p. 289. Vergl. auch die übrigens auf andern Principien beruhenden infinitesimalen Definitionen des Krümmungsmaasses, welche Herr Natani im Anhange zu Joachimsthal's Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung, 2. Aufl. Leipzig 1881, p. 227ff. gegeben hat.

Es gestattet dieser Ausdruck noch die zweite geometrische Interpretation als die Summe der Gaussischen Krümmungsmaasse irgend dreier zu einander rechtwinkliger geodätischer Flächen jenes geodätischen Raumes im Punkte A^0 wie die Annahme, dass:

$$\sum_{a,b}^{n} a_{ab}\, dx_a\, \delta x_b = \sum_{a,b}^{n} a_{ab}\, dx_a \Delta x_b = \sum_{a,b}^{n} a_{ab}\, \delta x_a\, \Delta x_b = 0$$

leicht ergiebt.

Es ist klar, wie dies auf vier- und mehrdimensionale Räume übertragen werden kann.

Das Studium der Beziehungen der beiden quadratischen Formen im Zähler und Nenner dieser Ausdrücke könnte nun weiteren Untersuchungen in ähnlicher Weise zum Ausgangspunkte dienen, wie auch in der gewöhnlichen Theorie der Flächenkrümmung das Studium der beiden quadratischen Formen, durch deren Quotient der Krümmungsradius eines Normalschnittes dargestellt ist. Macht man in der That die Annahme, dass der betrachtete n-dimensionale Raum in einem ebenen $(n+1)$-dimensionalen enthalten ist, so haben seine geodätischen Linien, Flächen, Räume von drei Dimensionen u. s. w. mit denjenigen Linien, Flächen, Räumen von drei Dimensionen u. s. w., welche von Ebenen, ebenen Räumen von drei, vier Dimensionen u. s. w. durch die Normale des Punktes ausgeschnitten werden, eine Berührung 2. Ordnung. Da hiernach in diesem Falle die Maxima und Minima der Krümmungsmaasse dieser geodätischen Flächen durch diejenigen der Normalschnitte mitbestimmt sind*), so erklärt sich leicht die von Herrn Lipschitz**) bewiesene Thatsache, dass das Krümmungsmaass eines solchen Raumes, wie es Herr Kronecker***) definirt hat, resp. dessen Quadrat sich rational durch die Coefficienten des Linienelements und deren erste und zweite Ableitungen ausdrücken lässt. Man beweist dies auch leicht explicite aus den in § 2 meiner o. a. Abhandlung gegebenen Formeln. Ist nämlich, wie dort, der Raum in der Nähe des betrachteten Punktes dargestellt in der Form:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{a,b}^{n} c_{ab}\, x_a\, x_b + \cdots,$$

so ist sein Krümmungsmaass für diesen Punkt bis auf einen Zahlen-

*) S. Souvoroff, Caractéristiques des systèmes de trois dimensions, Bulletin des Sc. math. 1. Sér. t. 4, p. 191.

**) S. Lipschitz, Beitrag zur Theorie des Krümmungsmaasses, Journ. f. r. u. a. Math. Bd. 81, p. 236.

***) S. Kronecker, Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln, Ber. der Berliner Akad. von 1869, p. 695.

factor gleich der Determinante $|c_{ab}|$. Nun ist aber nach Formel (21) jenes Paragraphen:

$$(a, b;\ c, b)^0 = 2(c_{ac}c_{bb} - c_{ab}c_{cb});$$

demnach lässt sich für ein gerades n nach einem bekannten Determinantensatze $|c_{ab}|$ rational durch die Ausdrücke $(a, b;\ c, b)$ darstellen, für ein ungerades n aber das Quadrat derselben, weil das Quadrat jeder Determinante $n$ter Ordnung sich darstellen lässt als eine Determinante $(2n)$ter Ordnung, von der etwa die n^2 Glieder der oberen Ecke rechts verschwinden.*)

Will man die Untersuchung der Maxima und Minima der Krümmungsmaasse aller geodätischen Flächen durch einen Punkt unabhängig von der Annahme, dass der betrachtete n-dimensionale Raum in einem ebenen $(n+1)$-dimensionalen enthalten ist, durchführen, so wird man sich zunächst auf den Fall $n = 3$ beschränken müssen, weil sonst die Coordinaten $dx_a \delta x_b - dx_b \delta x_a$ der geodätischen Flächen nicht mehr unabhängig von einander sind. Dann erhält man in jedem Punkte drei Maxima resp. Minima des Krümmungsmaasses, deren Product man nun weiter zu untersuchen hätte. Stellt man für dasselbe einen Ausdruck in den Coordinaten ξ_{abf} irgend eines geodätischen dreidimensionalen Raumes durch den Punkt A^0 des Raumes von n Dimensionen auf, so erhält man nun freilich einen Quotienten zweier biquadratischen Formen dieser Coordinaten, welche unter der Annahme, dass der Raum in einem ebenen $(n+1)$-dimensionalen enthalten sei, vollständige Quadrate werden. Dies liefert dann nothwendige Bedingungen, denen die Coefficienten des Linienelements genügen müssen, damit der durch dasselbe charakterisirte Raum in einem ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen enthalten sein könne. Sie stimmen überein mit den Bedingungen (I), welche Herr Ricci**) aufgestellt hat.

Ich glaube hiermit die Richtung gekennzeichnet zu haben, nach der sich etwaige Verallgemeinerungen des Riemann'schen Krümmungsmaasses zu bewegen hätten; indessen scheint mir keine derselben von ähnlicher Wichtigkeit wie dieses, um an sie weitere Untersuchungen zu knüpfen.

Leipzig, im Mai 1886.

*) Vergl. auch Killing, Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung, Leipzig 1885, p. 235. Herr K. scheint die letzte Bemerkung unseres Satzes übersehen zu haben, sonst hätte er wegen des Beweises für ein ungerades n nicht auf Lipschitz zu verweisen brauchen.

**) S. Ricci, principi di una teoria delle forme differenziali quadratique. Ann. di Mat. Ser. II. t. VII. p. 153.

Nachtrag zu der Note über die Herpolodie.

Von

W. Hess in München.

Durch ein Versehen sind die Sätze 6 und 7 der beregten Note, welche für die Herpolodie der Hyperboloide die Wendepunktsfrage entscheiden, aus meiner Dissertation irrig übertragen worden. Dieselben müssen nämlich lauten, wie folgt:

6. *In der Herpolodie des einschaligen Hyperboloids können, auch wenn dieser Abstand kleiner ist als die kleinere der reellen Halbaxen, Wendepunkte nicht erscheinen, wenn das Trägheitsmoment C um die imaginäre Axe seinem absoluten Werthe nach grösser ist als die Differenz der Trägheitsmomente A und B um die reellen Axen* (p. 46).
7. *Die durch das Rollen eines zweischaligen Hyperboloids erzeugte Herpolodie kann nur dann Wendepunkte besitzen, wenn das Trägheitsmoment A um die reelle Axe kleiner ist als die Differenz der absoluten Werthe B und C der Trägheitsmomente um die imaginären Axen* (p. 48).

München, im Juni 1886.

Ueber ein Theorem der analytischen Mechanik.

Von

A. Voss in München.

Bereits in den Fragmenten von Lagrange, welche in die von Herrn Bertrand besorgte Ausgabe der Mécanique Analytique aufgenommen sind*), findet sich die Bemerkung, dass die 3 Euler'schen Differentialgleichungen der Rotation eines starren Systems für ein beliebiges System materieller Punkte in unveränderter Form in Gültigkeit bleiben. Später hat Liouville,**) ohne dabei freilich diese Analogie hervortreten zu lassen, jene Gleichungen für diesen letzteren Fall abgeleitet; doch wird diese Verallgemeinerung selbst auf Poisson zurückgeführt, der in seiner Arbeit über die Variation der Constanten bereits einen speciellen Fall derselben angedeutet hatte. Des Weiteren finde ich nur in einer Arbeit von Frahm***) eine mit dem angeführten Satze in Verbindung stehende Notiz. Derselbe bemerkt, indem er eine von Herrn Kirchhoff†) unter Benutzung des Hamilton'schen Principes geführte Betrachtung verallgemeinert, dass die Differentialgleichungen der Rotation einer starren Mannigfaltigkeit um einen festen Punkt (ohne Einfluss von Kräften) ihrer Form nach ungeändert bleiben, auch wenn man die Coefficienten in der quadratischen Form, welche die lebendige Kraft darstellt, nicht constant, sondern als *willkürliche Functionen* der unabhängigen Variabelen voraussetzt, ohne dies Verhalten dort freilich in mechanischem Sinne zu deuten.

Das allgemeine Theorem, *dass die sechs Euler'schen Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers in unveränderter Form auch für ein beliebiges System materieller Punkte bestehen bleiben*, kann

*) Mécanique Analytique, 1855, tom. II, Fragments, p. 376. vgl. auch p. 212.

**) Journal von Liouville, Ser. II, tome 3. 1858, p. 6—20.

***) Ueber gewisse Differentialgleichungen, diese Annalen VIII, S. 35 39.

†) Journal von Crelle, Bd. 71, S. 241—246.

hiernach wohl nicht als eigentlich neu bezeichnet werden, dürfte aber gleichwohl nirgends in so bestimmter Form ausgesprochen und auch sonst weniger beachtet sein, als das Interesse, das sich schon in analytischer Hinsicht an dasselbe knüpft, verdienen möchte. Es sei mir daher gestattet, dasselbe in der Form darzulegen, dass die Systeme der Gleichungen, welche Herr Kirchhoff in seinen Vorlesungen über Mathematische Physik*) mit Hülfe des Hamilton'schen Principes entwickelt, als allgemein gültige vermöge einer ganz directen Transformation der Lagrange'schen Gleichungen (in ihrer ersten Form) nachgewiesen werden. Ich werde dabei ein Punktsystem voraussetzen, das sich in einer ebenen Mannigfaltigkeit von n Dimensionen befindet, welche auf ein System rechtwinkliger Coordinatenaxen $X_1 X_2 \ldots X_n$ bezogen ist, da es für gewisse weiter gehende Anwendungen von Interesse ist, die allgemeine Form der Differentialgleichungen der Mechanik unabhängig von der Anzahl der Dimensionen zu kennen.

Die Coordinaten eines Systempunktes P seien $x_1 \ldots x_n$, die zugehörige Masse m, die an demselben angreifenden Kraftcomponenten, einschliesslich der aus etwaigen Bedingungen herrührenden, seien $X_1 \ldots X_n$**). Ferner sei

$$(1) \qquad x_i = a_i + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\,\xi_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

wo a ein beliebiger Punkt des Systemes, die c_{ik} der Bequemlichkeit halber Coefficienten einer orthogonalen Substitution bedeuten mögen, so dass die ξ_k die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P in Bezug auf ein irgendwie bewegliches Orthogonalsystem sind, dessen Anfang in a liegt, und dessen Axen $\Xi_1, \ldots, \Xi_n$, mit den Axen $X_1 \ldots X_n$ des ursprünglichen festen Coordinatensystemes die Richtungscosinus c_{ik} bilden, zwischen denen die Bedingungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} \sum_i c_{is}\,c_{ik} &= (sk), \\ \sum_i c_{si}\,c_{ki} &= (sk), \end{aligned}$$

bestehen, in denen das Symbol (sk) für verschiedene Indices s, k gleich Null, für $s = k$ aber gleich Eins zu setzen ist.

*) Daselbst S. 57—62.

**) Unter der Voraussetzung, dass die zwischen zwei Punkten wirkenden *inneren* Kräfte gleich aber entgegengesetzt nach der Verbindungslinie gerichtet sind, kann man, wie weiter unten erhellt, von diesen absehen.

Es ist dann*)

$$x_i' = a_i' + \sum_k c_{ik}' \xi_k + \sum_k c_{ik} \xi_k', \tag{3}$$

$$\sum_i x_i c_{is} = v_s + \xi_s, \tag{4}$$

$$\sum_i x_i' c_{is} = u_s + p_s + \xi_s',$$

wenn zur Abkürzung

$$v_s = \sum_i a_i c_{is}, \quad u_s = \sum_i a_i' c_{is}, \quad p_s = \sum_k r_{sk} \xi_k, \tag{5}$$

gesetzt wird. Für die „*Rotationscomponenten*“ r_{sk} in Bezug auf die Axen Ξ bestehen dabei die Gleichungen

$$r_{sk} = -r_{ks} = \sum_i c_{is} c_{ik}', \tag{6}$$

$$r_{ss} = 0,$$

$$c_{is}' = \sum_m r_{ms} c_{im}.$$

Die *lebendige Kraft* T des Systemes ist nach (4) ausgedrückt durch

$$2T = \sum \sum_s m x_s'^2 = \sum \sum_s m (u_s + p_s + \xi_s')^2, \tag{7}$$

wo das erste Summenzeichen ohne Index sich auf die Anzahl der Punkte bezieht, aus denen das System besteht. Hieraus folgt

$$\frac{\partial T}{\partial u_s} = \sum m (u_s + p_s + \xi_s'), \tag{8}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r_{sk}} = \sum m [\xi_k (u_s + p_s + \xi_s') - \xi_s (u_k + p_k + \xi_k')].$$

Diejenigen Differentialgleichungen nun, welche den Massenmittelpunkts- und Flächensätzen entsprechen, werden durch die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \sum m \begin{vmatrix} v_{11} & , v_{12} & , \cdots, v_{1n} \\ v_{21} & , v_{22} & , \cdots, v_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{n-2,1} & , v_{n-2,2} & , \cdots, v_{n-2,n} \\ x_1 + w_1, & x_2 + w_2, & \cdots, x_n + w_n \\ x_1' & x_2' & \cdots x_n' \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} v_{11} & , \cdots, v_{1n} \\ v_{21} & , \cdots, v_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ v_{n-2,1} & , \cdots, v_{n-2,n} \\ x_1 + w_1, & \cdots, x_n + w_n \\ X_1 & , \cdots, X_n \end{vmatrix} \tag{9}$$

*) Differentialquotienten nach der Zeit t sind durch einen Strich bezeichnet, so dass allgemein $\frac{dx}{dt} = x'$.

ausgedrückt, falls die Grössen v_{ik}, w_i willkürliche Constanten bedeuten. Multiplicirt man die linke Seite von (9) mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{n1} \\ c_{1n} & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{1n} \\ c_{n1} & c_{nn} \end{vmatrix} = 1,$$

und zwar in der durch die beiden Factoren angegebenen Folge, so bleiben die Grössen v_{ik}, w_i zufolge der Gleichungen (2) ungeändert, während an Stelle der x_k, x_k' nach (4) die Ausdrücke

$$\sum_i \xi_i c_{ik} + \sum_i v_i c_{ki},$$

$$\sum_i (u_i + p_i + \xi_i') c_{ki},$$

treten. Unter Benutzung von (8) erhält man nun unmittelbar aus (9) durch Vergleichung der Coefficienten der w_i

$$\text{(I)} \qquad \frac{d}{dt} \sum_k \frac{\partial T}{\partial u_k} c_{rk} = \sum X_r, \quad r = 1, 2, \ldots, n,$$

und hieraus durch Multiplication mit den c_{rs}, und Summation über r, wenn für $\sum X_r$ zur Abkürzung Ξ_r gesetzt wird,

$$\text{(Ia)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u_s}\right) + \sum_k \frac{\partial T}{\partial u_k} r_{sk} = \sum_r \Xi_r c_{rs}, \quad s = 1, 2 \ldots n.$$

Vergleicht man dagegen die Coefficienten gleicher Verbindungen der v_{ik}, so erhält man ebenso unmittelbar

$$\text{(II)} \qquad \frac{d}{dt} \sum_{jk} \left(v_j \frac{\partial T}{\partial u_k} - v_k \frac{\partial T}{\partial u_j} + \frac{\partial T}{\partial r_{kj}} \right) c_{rj} c_{sk} = \sum (x_r X_s - x_s X_r);$$

$$r, s = 1, 2 \ldots n,$$

in welchen Gleichungen die rechte Seite zur Abkürzung gleich

$$M_{rs} = - M_{sr}$$

gesetzt werden mag. Denkt man sich links in (II) die Differentiation nach t ausgeführt, multiplicirt dann mit $c_{rt} c_{s\sigma}$ und summirt nach r, s und beachtet, dass nach (6)

$$\text{(10)} \qquad \sum_{rs} c_{rt} c_{s\sigma} \frac{d}{dt} (c_{rj} c_{sk}) = r_{\sigma j}(\sigma k) + r_{\sigma k}(jt),$$

so erhält man

$$(11)\quad \frac{d}{dt}\left(v_t\frac{\partial T}{\partial u_\sigma}-v_\sigma\frac{\partial T}{\partial u_t}+\frac{\partial T}{\partial r_{\sigma t}}\right)+\sum_j\left(r_{tj}\frac{\partial T}{\partial r_{\sigma j}}-r_{\sigma j}\frac{\partial T}{\partial r_{tj}}\right)$$
$$+\sum_j\left\{r_{tj}\left(v_j\frac{\partial T}{\partial u_\sigma}-v_\sigma\frac{\partial T}{\partial u_j}\right)-r_{\sigma j}\left(v_j\frac{\partial T}{\partial u_t}-v_t\frac{\partial T}{\partial u_j}\right)\right\}$$
$$=\sum_{r,s}M_{rs}c_{rt}c_{s\sigma}=\sum_{r,s}M_{rs}(c_{rt}c_{s\sigma}-c_{st}c_{r\sigma});$$
$$t,\ \sigma=1,2\ldots n.$$

Diese Formel gestattet noch eine weitere Vereinfachung. Aus der Gleichung (5)

$$v_s=\sum_i a_i c_{is}$$

folgt nämlich mit Hülfe von (6)

$$(12)\qquad \frac{dv_s}{dt}=u_s+\sum_m r_{ms}v_m.$$

Führt man die Differentiation im ersten Terme links von (11) aus, und setzt statt der Differentialquotienten der partiellen Differentialquotienten von T ihre Werthe aus (Ia) ein, so entsteht:

$$(\text{IIa})\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r_{\sigma t}}\right)+\sum_j\left(r_{tj}\frac{\partial T}{\partial r_{\sigma j}}-r_{\sigma j}\frac{\partial T}{\partial r_{tj}}\right)+u_t\frac{\partial T}{\partial u_\sigma}-u_\sigma\frac{\partial T}{\partial u_t}$$
$$=\sum_{r,s}M_{rs}(c_{rt}c_{s\sigma}-c_{r\sigma}c_{rs})+\sum_r\Xi_r(c_{rt}v_\sigma-c_{r\sigma}v_t);$$
$$\sigma,t=1,2\ldots n,$$

wo nun rechter Hand die „*Momente*" der Kräfte in Bezug auf das bewegliche Axensystem stehen.*)

Die Sätze (I), (Ia), (II), (IIa) entsprechen völlig den Gleichungen der Bewegung eines starren Körpers, wie sie Herr Kirchhoff a. a. O. S. 61 entwickelt; die inneren Kräfte treten in ihnen überhaupt nicht auf. Eine Ausdehnung derselben für die Rotation einer starren, keinen Kräften unterworfenen, Mannigfaltigkeit um einen Punkt hat bereits Frahm gegeben.

Der von letzterem im Anschluss an Herrn Kirchhoff's oben genannte Abhandlungen eingeschlagene Weg, welcher auf algebraischen Umformungen und dem Hamilton'schen Principe beruht, lässt sich aber, wie gezeigt, durch die einfache in (9) zum Ausdrucke gebrachte Methode so abkürzen, dass fast jede Rechnung überflüssig wird. Für

*) Nur für 3 Dimensionen, in welchem Falle die zweireihigen Unterdeterminanten der c_{ik} diesen selbst gleich werden, können daher die Momente in Bezug auf verschiedene Axen durch Projection aus einander abgeleitet werden.

den gewöhnlichen Fall von 3 Dimensionen kann man noch einfacher verfahren. Es genügt dann, in (9) mit der Substitutionsdeterminante Δ selbst zu multipliciren; man erhält dann *unmittelbar* die transformirten Gleichungen. Dieser Weg, den anzudeuten hier genügen wird, dürfte sich empfehlen, wenn es sich darum handelt, die Differentialgleichungen der Bewegung des starren Körpers durch rein analytische Transformation aus dem d'Alembert'schen Principe abzuleiten.

München, 16. Juni 1886.

Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen.

Nach Johann Rudolf Merian

bearbeitet von

KARL VONDERMÜHLL in Leipzig.

Die kleinen Bewegungen tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen von endlicher Tiefe sind meines Wissens zuerst von meinem Grossoheim Johann Rudolf Merian behandelt worden*), im Anschluss an die Arbeiten von Poisson und Cauchy, welche sich auf den Fall beschränkt hatten, wo die Flüssigkeit unendlich tief und seitlich unbegrenzt ist. Die Resultate haben in neuerer Zeit besondern Werth erhalten durch die Anwendung auf eigenthümliche, Ebbe- und Fluthartige Bewegungen, periodische Hebungen und Senkungen, welche der Wasserspiegel von Landseen erleidet; am Genfer See, namentlich in Genf, wo die Schwankungen besonders merklich sind und an einzelnen Tagen einen, ja zwei Meter überstiegen haben, sind diese Bewegungen unter dem Namen der „Seiches" bekannt; sie wurden schon im vorigen Jahundert beobachtet und beschrieben.

Herr F. A. Forel**), Professor in Lausanne, hat seit Anfang der siebziger Jahre an verschiedenen Stellen des Genfer Sees, ebenso an andern Schweizer Seen die Hebungen und Senkungen des Wasserspiegels genauer untersucht, namentlich die Schwingungszeiten gemessen; er hat dann gezeigt, dass diese Zeiten mit weit grösserer Annäherung als man vermuthen sollte, durch die Formel bestimmt werden, welche die Theorie für die Dauer der ersten einfachen Schwingung in einem Gefäss von constanter Tiefe liefert.

Bei diesem Anlass hat sich herausgestellt, dass die betreffenden Gleichungen, wenn auch den Mathematikern nicht unbekannt und an

*) Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen. Abhandlung von Dr. J. Rud. Merian. Basel, 1828. 53 pp.

**) F. A. Forel. — Sur les Seiches du lac Léman. — Bull. de la Soc. vaudoise des Sciences naturelles. XII, No. 70, 1873; XIII, No. 74, 1875. — Archives de Genève. Août 1876, Décembre 1876, Mai 1877, Septembre 1885.

verschiedenen Orten angegeben, seit dem Jahre 1828 wohl nirgends ausführlich abgeleitet sind*). Die kleine Schrift von J. R. Merian hat wenig Verbreitung gefunden und ist längst vergriffen; die Darstellung entspricht auch der heutigen Auffassung nicht mehr, nachdem in den verflossenen sechzig Jahren die analytische Behandlung von ähnlichen Problemen der mathematischen Physik eine so weit reichende Entwicklung und Umgestaltung erfahren hat. Ich glaube daher den Physikern einen Dienst zu leisten, wenn ich an dieser Stelle den wesentlichen Inhalt der genannten Abhandluug in völlig umgearbeiteter Form wieder zur Veröffentlichung bringe.

§ 1.

Die Differentialgleichungen des Problems.

Eine tropfbare Flüssigkeit der Dichtigkeit ϱ sei enthalten in einem oben offenen Gefäss mit festen Wänden; von äussern Kräften wirke allein die Schwere; dann ist die Gleichgewichtsoberfläche der Flüssigkeit eine horizontale Ebene. Es sei dies die Ebene $z = 0$, indem wir die z-Axe mit der Richtung der Schwere zusammenfallen lassen.

Eine Bewegung der Flüssigkeit kann nur auf einem der beiden folgenden Wege hervorgerufen werden: Entweder erhält die Oberfläche eine von der Gleichgewichtsoberfläche abweichende Form, oder es werden auf die verschiedenen Stellen der Oberfläche Stösse ausgeübt, so dass die Theilchen der Flüssigkeit bestimmte Anfangsgeschwindigkeiten erhalten.

Wir versuchen eine Behandlung der Aufgabe auf Grund der Annahme, dass die Anfangsgeschwindigkeiten ein Potential besitzen; dann muss, weil auch die wirkenden Kräfte ein Potential besitzen, immer ein Geschwindigkeitspotential φ existiren, und es gelten die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\varrho}p = gz - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} + T \tag{2}$$

für jede Stelle (x, y, z), wo sich zur Zeit t Flüssigkeit befindet. Hierin bezeichnet g die beschleunigende Kraft der Schwere und p den Druck, bezogen auf die Einheit der Fläche; T ist eine unbekannte Function der Zeit.

---

*) In den Vorlesungen über mathematische Physik von G. Kirchhoff sind nur die Hauptformeln ganz kurz entwickelt: 25. Vorlesung, § 3, p. 354—359.

Ferner muss an jeder Stelle der Gefässwand die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \tag{3}$$

wo dn die Richtung der Normale an die Wand bedeutet; sie werde in das Innere des Gefässes positiv gerechnet.

Dagegen haben wir an der freien Oberfläche der Flüssigkeit, auf welche ein mit der Zeit veränderlicher äusserer Druck P wirken soll, zwei Bedingungen: Erstens muss der Druck der Flüssigkeit dem äussern Druck gleich sein,

$$p = P, \tag{4}$$

wo P eine gegebene Function von t sein soll; dann aber muss ein Flüssigkeitstheilchen, welches einmal der Oberfläche angehört, immer an der Oberfläche bleiben; dies führt auf die zweite Gleichung:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial t}, \tag{5}$$

welche beiden Gleichungen für jede Stelle der Oberfläche zu jeder Zeit gelten.

Endlich haben wir noch Bedingungen für den Anfang der Bewegung, $t = 0$. Es muss die Gestalt der Oberfläche gegeben sein; sie werde bestimmt durch die Gleichung:

$$F(x, y, z) = 0. \tag{6}$$

Zweitens müssen die Anfangsgeschwindigkeiten der sämmtlichen Flüssigkeitstheilchen gegeben sein, die Werthe von

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial z},$$

wenn φ_0 das Geschwindigkeitspotential zur Zeit $t = 0$ bedeutet, oder es muss φ_0 für alle Stellen der Flüssigkeit gegeben sein, abgesehen von einer Constante, die willkürlich bleibt. Allein die Werthe von φ_0 sind durchaus nicht beliebig; denn wie jedes φ, so muss auch φ_0 der Differentialgleichung (1) Genüge leisten, und an jeder Stelle der Gefässwand der Bedingung (3).

Nun ist leicht zu zeigen, dass φ_0 völlig bestimmt ist, sobald noch sein Werth an der Oberfläche vorgeschrieben wird, etwa

$$\varphi_0 = \Phi(x, y, z), \tag{7}$$

welche Gleichung nur für die Stellen (x, y, z) der Oberfläche (6) gelten soll, soweit diese Oberfläche die Grenze der Flüssigkeit bildet.

Um diesen Beweis zu führen, nehmen wir an, es gebe zwei verschiedene Lösungen, φ_1 und φ_2; dann muss ihre Differenz:

$$\psi = \varphi_1 - \varphi_2$$

der Differentialgleichung (1) Genüge leisten, an der Gefässwand die Bedingung (3) erfüllen und in der Oberfläche verschwinden. Nun ist aber nach einem bekannten Satze:

$$\iiint\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)\psi\,dx\,dy\,dz$$
$$=-\iint\frac{\partial\psi}{\partial n}\psi\,d\omega-\iiint\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz,$$

wo die dreifachen Integrale über alle Elemente $dx\,dy\,dz$ der Flüssigkeit auszudehnen sind, das Doppelintegral über alle Elemente $d\omega$ der Grenze; dn bezeichnet die Normale an die Grenze, nach Innen positiv gerechnet. Für die Oberfläche ist $\psi = 0$, für die Gefässwand $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$; folglich verschwindet das Flächenintegral. Da wegen der allgemeinen Differentialgleichung (1) das erste Raumintegral gleich Null ist, muss auch das zweite verschwinden; so folgt für jede Stelle der Flüssigkeit:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2=0,$$

d. h.

$$\psi = 0.$$

Folglich giebt es nur eine einzige Lösung.

Die Anfangsgeschwindigkeiten sind demnach vollständig bestimmt, wenn der Werth von φ_0 für die Oberfläche gegeben ist, und dem entspricht, dass die Anfangsgeschwindigkeiten den sämmtlichen Flüssigkeitstheilchen durch Stösse auf die Oberfläche müssen ertheilt werden. Und zwar werden die Stösse durch den gegebenen Werth Φ sehr einfach bestimmt.

An der Stelle (x, y, z) der Oberfläche finde ein Stoss statt von der Stärke Q, bezogen auf die Einheit der Fläche; das soll heissen: Auf das Element $d\omega$ der Oberfläche werde senkrecht von Aussen her ein Stoss ausgeübt von der Stärke $Q\,d\omega$, so dass dieses Product einer Bewegungsgrösse äquivalent ist. Mithin verhält sich der stossende Druck Q zu einem stetigen Druck P, wie eine Stosskraft zu einer stetigen bewegenden Kraft.

Nach unserer Auffassung wirken die auf die Oberfläche geführten Stösse instantan auf die ganze Flüssigkeit, und die den einzelnen Stellen mitgetheilten Geschwindigkeiten werden bedingt durch die Incompressibilität der Flüssigkeit und die Festigkeit der Wände. Für die Stelle (x, y, z) im Innern der Flüssigkeit sei der Stoss gleich q; das soll folgende Bedeutung haben: Wir legen durch die Stelle irgend ein Flächenelement $d\omega$, errichten auf demselben einen geraden Cylinder und ersetzen die Flüssigkeit im Innern des Cylinders durch einen festen Stempel; auf diesen Stempel soll in der Richtung der Cylinderaxe

ein Stoss ausgeübt werden von der Stärke $q\,d\omega$. Demnach wirkt der Stoss nach allen Seiten in gleicher Stärke, ganz ähnlich einem stetigen Druck. Ist q für jede Stelle im Innern der Flüssigkeit gegeben, so ist die Geschwindigkeit eines jeden Flüssigkeitstheilchens bestimmt.

Wir denken uns an der Stelle ein unendlich kleines Parallelepipedum ausgeschnitten, mit den Kanten dx, dy, dz; durch q sind die auf die sechs Seitenflächen geführten Stösse gegeben, und die Geschwindigkeit an der Stelle (x, y, z) ist gleich derjenigen, welche das Flüssigkeitselement durch die sechs Stösse erhält. Nun werden auf die beiden Seiten $dy\,dz$ in der Richtung der positiven x-Axe die Stösse ausgeführt

$$q\,dy\,dz$$

und

$$-\left(q + \frac{\partial q}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz;$$

ihre Summe ist gleich der x-Componente von dem Stoss, welcher das Element trifft, also gleich dem Product aus der Masse in die x-Componente der Geschwindigkeit. So folgt die Gleichung:

$$-\frac{\partial q}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \varrho\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

wo φ das Potential der ertheilten Geschwindigkeiten bedeutet. Wir erhalten schliesslich:

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \varrho\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial q}{\partial y} = \varrho\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial q}{\partial z} = \varrho\,\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

oder einfach

$$q = -\varrho\varphi.$$

Wir erkennen nun den Zusammenhang, der zwischen der Annahme, es existire ein Geschwindigkeitspotential, und den Voraussetzungen besteht, welche bei Ableitung der hydrodynamischen Gleichungen gemacht werden.

Wir können das Resultat folgendermaassen allgemein aussprechen: Die Geschwindigkeiten an den verschiedenen Stellen zu einer beliebigen Zeit t werden ertheilt durch einen Stoss auf die Oberfläche von der Stärke

$$-\varrho\varphi,$$

wo φ der Werth des Geschwindigkeitspotentiales an der Oberfläche ist. Dementsprechend werden die Anfangsgeschwindigkeiten der Flüssigkeit ertheilt durch den Stoss auf die Oberfläche

$$-\varrho\Phi;$$

mit dem Werthe von Φ werden also die auf die verschiedenen Stellen der Oberfläche ausgeübten Stösse gegeben.

Wir können endlich die Gleichungen (1) bis (7) mit den beiden

Unbekannten φ und p so umformen, dass wir ein System von Gleichungen mit φ allein erhalten, durch dessen Lösung auch der Druck p bestimmt wird.

Wir setzen

$$\varphi = \varphi' + T',$$

wo T' eine Function von t sein soll; dann tritt in den sämmtlichen Gleichungen einfach φ' an die Stelle von φ, mit Ausnahme von Gleichung (2), welche die Form annimmt:

$$\frac{1}{\varrho} p - T + \frac{dT'}{dt} = gz - \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

Setzen wir weiter

$$\frac{dT'}{dt} = T - \frac{1}{\varrho} P,$$

so folgt

$$\frac{p - P}{\varrho} = gz - \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right)^2\right\},$$

und wenn wir diesen Ausdruck mit χ bezeichnen, so können wir die beiden Bedingungen an der Oberfläche schreiben:

$$\chi = 0,$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Nun ist aber φ' ebensowohl Geschwindigkeitspotential, wie φ. Wir schreiben daher überall φ, verstehen unter χ die Function von φ:

$$\chi = gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\},$$

und haben zur Bestimmung von φ die allgemeine Differentialgleichung (1), die Bedingung (3) an der Gefässwand, die beiden oben stehenden Gleichungen mit χ an der Oberfläche, endlich die Anfangsbedingungen (6) und (7).

Ist φ gefunden, so folgt p aus der Gleichung

$$p = P + \varrho\chi.$$

Wir sehen, dass der auf die Oberfläche wirkende Druck P ohne Einfluss auf die Bewegung der Flüssigkeit ist, selbst wenn er sich mit der Zeit ändert. Das würde nicht mehr gelten, wenn zu derselben Zeit der Druck an verschiedenen Stellen der Oberfläche verschiedenen Werth hätte, P auch Function von x, y, z wäre.

§ 2.

Annahme sehr kleiner Geschwindigkeiten.

Erhält die Flüssigkeit in dem Gefäss eine beliebige Bewegung, so wird die Oberfläche und damit auch der Raum, den die Flüssigkeit einnimmt, endliche Aenderungen erleiden. Dann lässt sich das Problem im Allgemeinen auf Grund der oben abgeleiteten Gleichungen nicht behandeln, weil das Gebiet der Variabeln x, y, z veränderlich ist. Nehmen wir aber an, es seien die Geschwindigkeiten der sämmtlichen Stellen immer sehr klein, so muss auch die Aenderung, welche die Oberfläche erleidet, sehr klein bleiben; folglich wird die Oberfläche von der horizontalen Gleichgewichtsfläche nur sehr wenig abweichen, und wir begehen einen sehr geringen Fehler, wenn wir für die Geschwindigkeiten an der Oberfläche diejenigen Werthe einsetzen, welche an der nächstgelegenen Stelle der Gleichgewichtsfläche $z = 0$ gelten. Dann wird das Gebiet der Variabeln x, y, z ein bestimmtes und unveränderliches, begrenzt von der Gefässwand und der Gleichgewichtsfläche $z = 0$, und es soll das Geschwindigkeitspotential φ als Function der Zeit t und der nun als unabhängig zu betrachtenden Variabeln x, y, z bestimmt werden.

Wir vernachlässigen die Quadrate und Producte der Geschwindigkeiten $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Dann muss φ der allgemeinen Differentialgleichung Genüge leisten:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0; \tag{1}$$

ferner an der Gefässwand, soweit diese von der Flüssigkeit im Gleichgewichtszustand benetzt wird, die Bedingung erfüllen:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0. \tag{2}$$

An der Oberfläche haben wir nun, da

$$\chi = gz - \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

die beiden Gleichungen:

$$gz = \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

$$g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

Die erstere Gleichung bestimmt im Allgemeinen die Ordinate der Oberfläche; wir wollen sie zur Unterscheidung mit $\bar{z}$ bezeichnen; dann wird $\bar{z}$ bestimmt als Function von x, y und t, indem in $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ $z = 0$ zu

setzen ist. Zur Zeit $t = 0$ soll die Gestalt der Oberfläche gegeben sein, also auch der Werth von $\bar{z}$; folglich ist der Werth von $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ zur Zeit $t = 0$ für $z = 0$ gegeben.

Die letztere Gleichung liefert die Bedingung an der Grenze $z = 0$:

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Nehmen wir endlich an, es seien die Ordinate der Oberfläche und der Werth von φ an der Oberfläche zur Zeit $t = 0$ bestimmt durch die Functionen F und Φ von x und y, so haben wir noch die beiden Anfangsbedingungen für $z = 0$:

$$\varphi_0 = \Phi(x, y), \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0 = g F(x, y). \tag{5}$$

Ist φ als Lösung dieser sämmtlichen fünf Gleichungen bestimmt, so folgt die Ordinate $\bar{z}$ der Oberfläche aus der Gleichung:

$$\bar{z} = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{6}$$

wo rechts der Werth von $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für $z = 0$ zu nehmen ist, und der Druck p an der Stelle x, y, z zur Zeit t:

$$p = P + gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{7}$$

wo der Einfachheit wegen die oben mit ϱ bezeichnete Dichtigkeit gleich Eins gesetzt ist und P wieder den zur Zeit t auf die Oberfläche ausgeübten Druck bedeutet. —

Es könnten Zweifel entstehen, ob der nach Gleichung (6) bestimmte Werth von $\bar{z}$ der Bedingung genüge, dass das Volumen der Flüssigkeit ungeändert bleibe. Danach soll sein

$$\iint \bar{z}\, dx\, dy = 0,$$

wo das Integral über alle Elemente der Gleichgewichtsfläche auszudehnen ist. Nach Gleichung (6) ist diese Bedingung erfüllt, wenn

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dx\, dy = 0,$$

wo in $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ wieder $z = 0$ zu setzen ist.

Nun haben wir mit Rücksicht auf die Gleichung (3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dx\, dy = \iint \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\, dx\, dy = g \iint \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dx\, dy,$$

und das letzte Integral ist gleich Null. Denn nach einem bekannten Satze gilt die Formel:

$$\iiint\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz=-\iint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\omega,$$

wenn das dreifache Integral über den ganzen von der Flüssigkeit erfüllten Raum, das Flächenintegral über alle Elemente $d\omega$ der Grenze ausgedehnt wird und dn die Normale an die Grenze bezeichnet, nach Innen positiv gerechnet. Ferner verschwindet das dreifache Integral wegen der Gleichung (1); für jede Stelle der Gefässwand aber gilt die Gleichung (2); folglich ist das Flächenintegral, ausgedehnt über die Gleichgewichtsfläche, gleich Null:

$$\iint\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dx\,dy=0.$$

Wir finden demnach, dass das Integral

$$\iint\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dy$$

einen constanten, von der Zeit unabhängigen Werth haben muss, und da dieser Werth für die Zeit $t=0$ Null ist, weil selbstverständlich der gegebene Werth von $\bar{z}$ der Bedingung genügen muss:

$$\iint F(x,y)\,dx\,dy=0,$$

bleibt das Volumen der Flüssigkeit in der That ungeändert. —

Ganz ähnlich können wir den Beweis führen, dass durch die Gleichungen (1) bis (5) das Geschwindigkeitspotential völlig bestimmt ist, dass also nur eine einzige Lösung des Problems existirt.

Wir nehmen an, es gebe deren zwei, φ_1 und φ_2, und betrachten die Differenz:

$$\varphi'=\varphi_1-\varphi_2.$$

φ' muss dann den Gleichungen (1), (2) und (3) Genüge leisten; wegen (4) und (5)' aber müssen φ' und $\frac{\partial\varphi'}{\partial t}$ verschwinden für $t=0$ und $z=0$.

Jetzt betrachten wir das vierfache Integral, das wegen der Gleichung (1) verschwindet:

$$0=\int_0^t\iiint\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial z^2}\right)\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Das dreifache Integral ist über alle Elemente $dx\,dy\,dz$ der Flüssigkeit auszudehnen, das Zeitintegral von 0 bis t.

Durch partielle Integration folgt:

$$0 = -\int_0^t \iint \frac{\partial \varphi'}{\partial n} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \, d\omega \, dt$$

$$-\int_0^t \iiint \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z \partial t} \right) dx \, dy \, dz \, dt.$$

Hier ist wieder das Flächenintegral über alle Elemente $d\omega$ der Grenze auszudehnen. Für die Gefässwand ist aber

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = 0,$$

für die Oberfläche nach Gleichung (3)

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2};$$

folglich können wir die Gleichung in der Form schreiben:

$$0 = \frac{1}{g} \int_0^t \iint \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right)^2 dx \, dy \, dt$$

$$+ \int_0^t \iiint \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right)^2 \right\} dx \, dy \, dz \, dt,$$

und dann die Integration nach der Zeit ausführen. Hiebei ist zu beachten, dass, wie wir oben gezeigt haben, die Grössen φ' und $\frac{\partial \varphi'}{\partial t}$ für die Zeit $t = 0$ überhaupt verschwinden, da sie für $z = 0$ Null sein sollen und die Gleichungen (1) und (2) gelten. So erhalten wir für jede Zeit t:

$$0 = \frac{1}{g} \iint \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right)^2 dx \, dy + \iiint \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right)^2 \right\} dx \, dy \, dz.$$

Diese Gleichung ist nur erfüllt, wenn für jede Stelle im Innern der Flüssigkeit

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = 0$$

und für die Oberfläche $z = 0$ auch

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0.$$

Nach den ersten drei Gleichungen ist φ' nur Function der Zeit, nach der letzten gleich einer Constante, und diese Constante ist wegen der Bedingungen für $t = 0$ gleich Null. Wir finden also:

$$\varphi' = \varphi_1 - \varphi_2 = 0,$$

d. h. es giebt keine zwei von einander verschiedenen Lösungen des Problems. —

Zum Schlusse wollen wir noch bemerken, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Bewegungen der einzelnen Flüssigkeitstheilchen können angegeben werden, sobald das Geschwindigkeitspotential φ bekannt ist.

Es sei (a, b, c) der Ort eines Flüssigkeitstheilchens zur Zeit $t=0$, ferner u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit, welche dieses Theilchen zur Zeit t besitzt, gegeben als Functionen von a, b, c und t. Dann wird der Ort des Theilchens zur Zeit t bestimmt durch die Gleichungen:

$$x = a + \int_0^t u\,dt,$$

$$y = b + \int_0^t v\,dt,$$

$$z = c + \int_0^t w\,dt.$$

Nun sind einmal nach der Annahme die Geschwindigkeiten u, v, w immer sehr klein; ferner verändern die Flüssigkeitstheilchen ihren Ort nur sehr wenig; dann sind aber die Werthe u, v, w nur sehr wenig verschieden von den Geschwindigkeiten, welche an der Stelle a, b, c zur Zeit t statthaben, und der Unterschied ist von der zweiten Ordnung, also zu vernachlässigen. Endlich erhalten wir die Geschwindigkeiten an der Stelle a, b, c zur Zeit t, indem wir in den Ausdrücken $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ die Variabeln x, y, z durch a, b, c ersetzen. Mithin haben wir:

$$x = a + \int_0^t \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dt,$$

$$y = b + \int_0^t \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) dt,$$

$$z = c + \int_0^t \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) dt,$$

wo die Klammern um $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$ u. s. w. bedeuten sollen, dass a, b, c statt x, y, z gesetzt werde.

§ 3.

Integration der Differentialgleichungen.

Wir suchen zunächst eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (1) und der Grenzgleichungen (2) und (3) von der Form:

$$\varphi = TU,$$

wo T nur Function der Zeit t und U nur Function von x, y, z sein soll. Setzen wir den Werth ein in die zweite Grenzgleichung (3), so folgt

$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = g\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial z},$$

wo rechts $z = 0$ zu setzen ist, d. h. es soll eine Function von t einer Function von x und y gleich sein. Dieser Bedingung genügt nur eine Constante; wir bezeichnen dieselbe mit $-\varkappa^2$.

Dann folgt für T die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \varkappa^2 T = 0,$$

deren vollständige Lösung ist:

$$T = A\cos\varkappa t + B\frac{g}{\varkappa}\sin\varkappa t,$$

mit den beiden willkürlichen Constanten A und B. Wir wählen diese Form, damit auch für den Fall $\varkappa = 0$ die vollständige Lösung $A + Bgt$ erhalten werde; der Factor g im zweiten Gliede ist wegen der Anfangsbedingungen bequem.

Die Function U von x, y, z muss dagegen den folgenden Gleichungen genügen:

1) Der allgemeinen Differentialgleichung:

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0;$$

2) Der Grenzgleichung an der Gefässwand:

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial U}{\partial n} = 0;$$

3) Der Bedingung an der Oberfläche $z = 0$:

$$\text{(C)} \qquad g\frac{\partial U}{\partial z} + \varkappa^2 U = 0.$$

Durch Umformung des Integrales

$$\iiint\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) U\,dx\,dy\,dz$$

ergiebt sich die Gleichung:

$$\varkappa^2\iint U^2\,dx\,dy = \iiint\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right\} dx\,dy\,dz,$$

wo das Flächenintegral auf der linken Seite wieder über alle Elemente der Gleichgewichtsoberfläche zu nehmen ist. Folglich muss die Constante $\varkappa^2$ reell und positiv sein, so dass wir auch $\varkappa$ positiv setzen können. Das sagt aus: Die einfachen Schwingungen der Flüssigkeit in dem Gefäss, welche durch einen Ausdruck von der Form TU dargestellt werden, sind periodisch um $\frac{2\pi}{\varkappa}$.

Schliesslich wird den Anfangsbedingungen (4) und (5) genügt, wenn es gelingt, eine auf der Gleichgewichtsoberfläche gegebene Function von x und y darzustellen durch eine Reihe von Lösungen der Gleichungen (A), (B), (C) für verschiedene Werthe von $\varkappa$:

$$\sum C_\varkappa U_\varkappa.$$

Hierin bedeutet $U_\varkappa$ den Werth einer Lösung U für $z = 0$, und die Reihe ist nach steigenden Werthen von $\varkappa$ zu ordnen. Setzen wir dementsprechend:

$$T_\varkappa = A_\varkappa \cos \varkappa t + B_\varkappa \frac{g}{\varkappa} \sin \varkappa t,$$

so geben die Gleichungen (4) und (5):

$$\Phi(x, y) = \sum A_\varkappa U_\varkappa,$$
$$F(x, y) = \sum B_\varkappa U_\varkappa.$$

Was die Bestimmung der Coefficienten A und B betrifft, ist leicht zu zeigen, dass

$$(\varkappa_2^2 - \varkappa_1^2) \int\int U_1 U_2 \, dx \, dy = 0,$$

wenn U_1 und U_2 die Werthe von $U_\varkappa$ für $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ bedeuten. Daraus folgt, dass

$$\int\int U_1 U_2 \, dx \, dy = 0,$$

sobald

$$\varkappa_1^2 \gtrless \varkappa_2^2.$$

Die Berechnung der Coefficienten macht also keine Schwierigkeit, wenn die Darstellbarkeit der Function durch eine solche Reihe angenommen wird.

Die weitere Behandlung der Aufgabe hängt von der Form des Gefässes ab.*)

*) Den Fall, wo der Boden des Gefässes aus einer schiefen Ebene oder aus zwei schiefen Ebenen gebildet ist, hat G. Kirchhoff behandelt: Wied. Ann. 10, pag. 34—36.

§ 4.

Betrachtung eines Gefässes von constanter Tiefe.

Das Gefäss habe die Form eines geraden Prismas oder Cylinders mit horizontalem Boden und verticalen Seitenwänden. Die Tiefe der Flüssigkeit betrage c.

Dann suchen wir eine Lösung der Gleichungen (A), (B), (C) von der Form

$$U = ZW,$$

wo Z nur Function von z und W nur Function von x und y sein soll. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung (A) folgt:

$$Z\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) + W\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0,$$

und diese Gleichung kann nur bestehen, wenn

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 Z$$

und

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \gamma^2 W = 0,$$

wo γ^2 eine Constante bedeutet.

Z muss ferner den Bedingungen Genüge leisten:

$$\frac{dZ}{dz} = 0 \quad \text{für} \quad z = c,$$

wegen der Gleichung (B) für den Boden des Gefässes;

$$g\frac{dZ}{dz} + \varkappa^2 Z = 0 \quad \text{für} \quad z = 0,$$

wegen der Bedingung (C) an der Oberfläche.

Setzen wir die vollständige Lösung der Differentialgleichung:

$$Z = Ae^{\gamma z} + Be^{-\gamma z}$$

in die erste Grenzbedingung ein, so folgt

$$\gamma(Ae^{\gamma c} - Be^{-\gamma c}) = 0.$$

Dieser Gleichung wird genügt durch

$$Z = C\left\{e^{\gamma(c-z)} + e^{-\gamma(c-z)}\right\},$$

und die zweite Bedingung giebt:

$$\varkappa^2 = g\gamma\,\frac{e^{\gamma c} - e^{-\gamma c}}{e^{\gamma c} + e^{-\gamma c}}.$$

Da $\varkappa$ reell sein soll, können wir γ reell und positiv annehmen; die Formeln gelten auch für $\gamma = 0$. Wir betrachten nun $\varkappa$ als bestimmt

durch γ, und verfügen über den Factor von Z so, dass $Z = 1$ für $z = 0$. Demgemäss wird:

$$Z_\gamma = \frac{e^{\gamma(c-z)} + e^{-\gamma(c-z)}}{e^{\gamma c} + e^{-\gamma c}}.$$

Entsprechend sei W_γ für einen bestimmten Werth von γ die Lösung der Gleichungen:

(a) $$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \gamma^2 W = 0,$$

(b) $$\frac{\partial W}{\partial n} = 0.$$

Die Differentialgleichung (a) gilt für jede Stelle (x, y) der Gleichgewichtsfläche oder des Bodens, die Gleichung (b) für die Grenzlinie, deren Normale nach Innen dn ist. Dann kommt es noch darauf an, eine gegebene Function von x und y darzustellen durch eine Reihe von der Form:

$$\sum C_\gamma W_\gamma.$$

Diese Aufgabe ist von Heinrich Weber sehr ausführlich behandelt worden.*) Es ergiebt sich, dass der Differentialgleichung und der Grenzbedingung für einen beliebigen Werth von γ nicht kann genügt werden, dass dagegen unendlich viele, von einander verschiedene Lösungen existiren, worin die Constante γ zwar unendlich viele, aber nur ganz bestimmte, von der Natur der Begrenzung abhängige Werthe haben kann.

Indem wir auf diese Untersuchung verweisen, wollen wir hier nur zeigen, wie die Coefficienten der Reihen bestimmt werden, die Entwickelbarkeit der Functionen vorausgesetzt. Dem Obigen entsprechend ergiebt sich leicht, dass

$$(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \iint W_1 W_2 \, dx \, dy = 0,$$

wenn W_1 und W_2 die Lösungen der Gleichungen (a) und (b) für die Werthe γ_1 und γ_2 bedeuten; folglich ist:

$$\iint W_1 W_2 \, dx \, dy = 0,$$

wenn

$$\gamma_1^2 \gtrless \gamma_2^2.$$

Setzen wir also:

$$\varphi = \sum \left(A_\gamma \cos \varkappa t + B_\gamma \frac{g}{\gamma} \sin \varkappa t \right) Z_\gamma W_\gamma,$$

*) H. Weber. — Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0.$$

Math. Ann. 1, p. 1—36. 1869.

so folgt auf bekanntem Wege:

$$A_\gamma = \frac{\iint \Phi(x, y)\, W_\gamma\, dx\, dy}{\iint W_\gamma^2\, dx\, dy},$$

$$B_\gamma = \frac{\iint F(x, y)\, W_\gamma\, dx\, dy}{\iint W_\gamma^2\, dx\, dy}.$$

§ 5.

Bewegungen nach zwei Dimensionen.

Wir betrachten den Fall, wo der Boden des Gefässes ein Rechteck ist mit den Seiten a und b. Lassen wir die Axen x und y mit zweien dieser Seiten zusammenfallen, so werden die Seitenwände des Gefässes bestimmt durch die Gleichungen:

$$x = 0, \quad x = a;$$
$$y = 0, \quad y = b.$$

Wir betrachten zuerst den einfachen Fall, wo das Geschwindigkeitspotential φ von y unabhängig ist, wo also die Flüssigkeitstheilchen sich parallel der (x, z)-Ebene bewegen. Wir erhalten diesen Fall, wenn die Functionen F und Φ von y unabhängig sind. Der Bedingung an den Seitenwänden $y = 0$ und $y = b$ ist dann genügt, weil $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ überhaupt Null ist, und W wird als Function von x bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + \gamma^2 W = 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < a,$$

$$\frac{dW}{dx} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und für} \quad x = a.$$

Durch Integration finden wir:

$$W = A \cos \gamma x + B \frac{1}{\gamma} \sin \gamma x;$$

weiter aus den Grenzbedingungen:

$$B = 0, \quad A \sin \gamma a = 0.$$

Folglich wird, wenn n eine ganze positive Zahl bezeichnet,

$$\gamma = \frac{n\pi}{a}$$

und

$$W = \cos \frac{n\pi x}{a}.$$

Wir können somit die Lösung in der Form schreiben:

$$\varphi = \sum_0^\infty{}_n \left(A_n \cos \varkappa_n t + B_n \frac{g}{\varkappa_n} \sin \varkappa_n t \right) Z_n \cos \frac{n\pi x}{a},$$

wo

$$(1) \qquad \varkappa_n^2 = \frac{n\pi g}{a} \cdot \frac{e^{\frac{n\pi c}{a}} - e^{-\frac{n\pi c}{a}}}{e^{\frac{n\pi c}{a}} + e^{-\frac{n\pi c}{a}}},$$

$$(2) \qquad Z_n = \frac{e^{\frac{n\pi(c-z)}{a}} + e^{-\frac{n\pi(c-z)}{a}}}{e^{\frac{n\pi c}{a}} + e^{-\frac{n\pi c}{a}}},$$

und wo die Constanten A und B durch die Gleichungen bestimmt werden:

$$A_0 = \frac{1}{a} \int_0^a \Phi(x)\, dx,$$

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a \Phi(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx;$$

$$B_0 = \frac{1}{a} \int_0^a F(x)\, dx,$$

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a F(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx.$$

Wir können aber das Glied mit $n = 0$ fortlassen; die Constante A_0 ist ohne Bedeutung, weil φ überhaupt nur bis auf eine Constante bestimmt ist, und B_0 wird Null, wenn wir die (x,y)-Ebene mit der Gleichgewichtsoberfläche zusammenfallen lassen. Wir setzen daher, indem wir die Integrationsvariable mit ξ bezeichnen:

$$\varphi = \frac{2}{a} \sum_1^\infty{}_n \int_0^a \left\{ \cos \varkappa_n t . \Phi(\xi) + \frac{g}{\varkappa_n} \sin \varkappa_n t . F(\xi) \right\} Z_n \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi \xi}{a}\, d\xi.$$

Die Oberfläche der Flüssigkeit wird bestimmt durch die Gleichung (6), § 2:

$$\bar{z} = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{für} \quad z = 0;$$

wir erhalten somit für unsern Fall:

$$\bar{z} = \frac{2}{a} \sum_1^\infty{}_n \int_0^a \left\{ \cos \varkappa_n t . F(\xi) - \frac{\varkappa_n}{g} \sin \varkappa_n t . \Phi(\xi) \right\} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi \xi}{a}\, d\xi. —$$

Um die Untersuchung der durch unsre Formeln dargestellten Bewegung zu vereinfachen, wollen wir annehmen, es sei $\Phi(x) = 0$. Die Bewegung soll also dadurch hervorgebracht werden, dass der Oberfläche eine von der Gleichgewichtsfläche abweichende Form ertheilt wird. Durch Stösse auf die Oberfläche entsteht eine ganz ähnliche Bewegung; der allgemeine Fall wird durch Addition der beiden Bewegungen erhalten, und es genügt somit, den Fall zu betrachten, wo $F(x)$ von Null verschiedene Werthe hat.

Die Reihen reduciren sich auf ein Glied, wenn die ursprüngliche Ordinate der Oberfläche dem Cosinus eines Vielfachen von $\frac{\pi x}{a}$ proportional ist; setzen wir:

$$F(x) = K \cos \frac{n\pi x}{a},$$

wo K nach der Annahme immer sehr klein sein soll, so wird:

$$\varphi = \frac{gK}{\varkappa_n} \sin \varkappa_n t \,.\, Z_n \cos \frac{n\pi x}{a},$$

$$\bar{z} = K \cos \varkappa_n t \,.\, \cos \frac{n\pi x}{a}.$$

Dies ist eine *einfache Schwingung*. Jede Bewegung kann aufgefasst werden als eine Summe solcher einfacher Schwingungen.

Betrachten wir zunächst die Oberfläche, so besteht diese aus n Theilen; von zwei an einander grenzenden Theilen ist der eine das Spiegelbild des andern in Bezug auf die Grenze. Dasselbe gilt von φ. Denken wir uns also das Gefäss durch $(n-1)$ parallele Zwischenwände in n gleiche Theile getheilt, so ist die Bewegung in zwei an einander stossenden Theilen symmetrisch gegen die Grenze. Demnach können die Flüssigkeitstheilchen, welche in einer solchen Grenze liegen, sich nur in der Grenze auf- und abbewegen, und in einem der Theile findet genau dieselbe Bewegung statt, wie in einem festen Gefäss von der Länge

$$l = \frac{a}{n},$$

wenn die Ordinate der Oberfläche zur Zeit $t = 0$ bestimmt ist durch

$$\pm K \cos \frac{\pi x}{l}.$$

Dies ist aber die erste einfache Schwingung in einem Gefäss von der Länge l.

Wir untersuchen daher diese erste einfache Schwingung in einem Gefäss von der Länge l, welche dargestellt wird durch die Gleichungen:

$$\bar{z} = K \cos \varkappa t \,.\, \cos \frac{\pi x}{l},$$

$$u = -\frac{\pi}{l} Kg \frac{\sin \varkappa t}{\varkappa} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{e^{\frac{\pi}{l}(c-s)} + e^{-\frac{\pi}{l}(c-s)}}{e^{\frac{\pi c}{l}} - e^{-\frac{\pi c}{l}}},$$

$$w = -\frac{\pi}{l} Kg \frac{\sin \varkappa t}{\varkappa} \cos \frac{\pi x}{l} \frac{e^{\frac{\pi}{l}(c-s)} + e^{-\frac{\pi}{l}(c-s)}}{e^{\frac{\pi c}{l}} + e^{-\frac{\pi c}{l}}},$$

wo u und w die Componenten der Geschwindigkeit bedeuten und

$$\varkappa^2 = \frac{\pi g}{l} \frac{e^{\frac{\pi c}{l}} - e^{-\frac{\pi c}{l}}}{e^{\frac{\pi c}{l}} + e^{-\frac{\pi c}{l}}}.$$

Sämmtliche Werthe bleiben ungeändert, wenn man die Zeit t um ein ganzes Vielfaches von $\frac{2\pi}{\varkappa}$ ändert; die Bewegung ist also periodisch um $\frac{2\pi}{\varkappa}$. Betrachten wir die Bewegung der Oberfläche während einer solchen Periode, von $t = 0$ bis $t = \frac{2\pi}{\varkappa}$, so haben die Ordinaten am Ende der Periode ihre ursprünglichen Werthe, in der Mitte aber, zur Zeit $t = \frac{\pi}{\varkappa}$, dieselben Werthe mit entgegengesetztem Vorzeichen; diese Werthe sind die Maxima und Minima der Ordinaten. Jede Stelle der Oberfläche vollführt also während einer Periode zwei Schwingungen, und die Dauer einer solchen Schwingung ist $\frac{\pi}{\varkappa}$,

$$T = \sqrt{\frac{\pi l}{g}} \left\{ \frac{e^{\frac{\pi c}{l}} + e^{-\frac{\pi c}{l}}}{e^{\frac{\pi c}{l}} - e^{-\frac{\pi c}{l}}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Folglich ist die Schwingungsdauer von K, d. h. von der Amplitude der Schwingungen ganz unabhängig; sie wird um so grösser, je länger das Gefäss und je kleiner die Tiefe desselben ist. Wäre das Gefäss unendlich tief, so hätten wir:

$$T = \sqrt{\frac{\pi l}{g}}.$$

Demnach verhält sich die Schwingungsdauer in einem Gefäss von der Länge l und von unendlicher Tiefe zu der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels von der Länge l, wie $1 : \sqrt{\pi}$. Durch den Einfluss des Bodens wird die Schwingungsdauer vergrössert, und zwar nimmt mit abnehmender Tiefe des Gefässes die Schwingungsdauer fortwährend zu.

Ist $\frac{c}{l}$ eine kleine Grösse, so erhalten wir bei Vernachlässigung von $\left(\frac{c}{l}\right)^4$:

$$T = \frac{l}{\sqrt{gc}}\left\{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi c}{l}\right)^2\right\};$$

dürfen wir schon die zweite Potenz vernachlässigen, so wird die Schwingungsdauer der Länge l direct, der Quadratwurzel aus der Tiefe c umgekehrt proportional:

$$T = \frac{l}{\sqrt{gc}}.^*)$$

Der Unterschied zwischen der grösten Hebung und Senkung der Oberfläche an der Stelle x ist:

$$2K \cos\frac{\pi x}{l},$$

gleich der doppelten Länge der ursprünglichen Ordinate; die Amplitude der Schwingungen ist also unabhängig von der Tiefe. Wir erhalten ferner die Geschwindigkeit der Hebung oder Senkung, indem wir $\frac{\partial z}{\partial t}$ bilden oder in w $s = 0$ setzen; dies giebt:

$$-K\sqrt{\frac{\pi g}{l}}\left\{\frac{e^{\frac{\pi c}{l}} - e^{-\frac{\pi c}{l}}}{e^{\frac{\pi c}{l}} + e^{-\frac{\pi c}{l}}}\right\}^{\frac{1}{2}} \sin \varkappa t \,.\, \cos\frac{\pi x}{l}.$$

Demnach nimmt die Geschwindigkeit der Hebung und Senkung mit der Tiefe des Gefässes ab. Sie ist am Ende jeder Schwingung Null, indem die Ordinate ein Maximum oder Minimum wird, in der Mitte der Schwingung dagegen ein Maximum, wo die Ordinate Null ist, die Oberfläche also mit der Gleichgewichtsebene zusammenfällt. Ferner ist die Geschwindigkeit der ursprünglichen Ordinate proportional; in der Mitte des Gefässes bleibt die Oberfläche in Ruhe; nach beiden Seiten wachsen die Ordinaten und die Geschwindigkeiten, aber in entgegengesetzter Richtung. Wird die Tiefe unendlich, so ist die Geschwindigkeit:

$$-K\sqrt{\frac{\pi g}{l}} \sin \varkappa t \,.\, \cos\frac{\pi x}{l},$$

und in ihrem Maximum, wenn die Oberfläche durch die Gleichgewichtsebene hindurchgeht:

$$\pm K\sqrt{\frac{\pi g}{l}} \cos\frac{\pi x}{l} = f\sqrt{\frac{\pi g}{l}},$$

wo f den Weg bezeichnet, welchen die Stelle vom Anfang der Schwingung an durchlaufen hat. Ein Körper, der von der Höhe f gefallen

*) Forel hat diese Formel auf die „*Seiches*" zur Anwendung gebracht und nachgewiesen, dass sie mit den Messungen sehr gut übereinstimmt.

wäre, hätte die Geschwindigkeit $\sqrt{2gf}$ erlangt; die Geschwindigkeiten verhalten sich also, wie

$$\sqrt{\frac{\pi f}{l}} : \sqrt{2}.$$

Wir untersuchen zweitens die Bewegung der einzelnen Flüssigkeitstheilchen während der einfachen Schwingung. Da wir die zweiten Potenzen und die Producte der Geschwindigkeiten vernachlässigen, können wir annehmen, das Flüssigkeitstheilchen, welches sich zur Zeit $t = 0$ an der Stelle x, z befindet, habe zur Zeit t die Geschwindigkeiten, die an derselben Stelle zur Zeit t statthaben. Diese Geschwindigkeiten sind:

$$u = -K\frac{\pi g}{\varkappa l}\sin \varkappa t \,.\, \sin\frac{\pi x}{l}\,\frac{e^{\frac{\pi(c-z)}{l}} + e^{-\frac{\pi(c-z)}{l}}}{e^{\frac{\pi c}{l}} + e^{-\frac{\pi c}{l}}},$$

$$w = -K\frac{\pi g}{\varkappa l}\sin \varkappa t \,.\, \cos\frac{\pi x}{l}\,\frac{e^{\frac{\pi(c-z)}{l}} - e^{-\frac{\pi(c-z)}{l}}}{e^{\frac{\pi c}{l}} + e^{-\frac{\pi c}{l}}}.$$

Folglich kann das Verhältniss $\frac{u}{w}$ und damit die Richtung der Geschwindigkeit als von der Zeit unabhängig betrachtet werden: Die Theilchen bewegen sich auf sehr kurzen Strecken von krummen Linien, die sich mit der Zeit nicht ändern, hin und her. Wir erhalten die Gleichungen dieser Linien, indem wir setzen:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u}{w}$$

und integriren. Demnach ist die Differentialgleichung der Curven:

$$\left\{e^{\frac{\pi(c-z)}{l}} + e^{-\frac{\pi(c-z)}{l}}\right\}\sin\frac{\pi x}{l}\,dz - \left\{e^{\frac{\pi(c-z)}{l}} - e^{-\frac{\pi(c-z)}{l}}\right\}\cos\frac{\pi x}{l}\,dx = 0,$$

und durch Integration folgt:

$$\left\{e^{\frac{\pi(c-z)}{l}} - e^{-\frac{\pi(c-z)}{l}}\right\}\sin\frac{\pi x}{l} = \text{Const.}$$

Die Curven haben in der Mitte, $x = \frac{1}{2}l$, ihren tiefsten Punkt und steigen nach beiden Seiten symmetrisch; nennen wir die Ordinate ihres tiefsten Punktes h, so wird die Gleichung einer solchen Curve:

$$\left\{e^{\frac{\pi(c-z)}{l}} - e^{-\frac{\pi(c-z)}{l}}\right\}\sin\frac{\pi x}{l} = e^{\frac{\pi(c-h)}{l}} - e^{-\frac{\pi(c-h)}{l}}.$$

Die Curven schneiden also die x-Axe, d. h. die Oberfläche in zwei

Punkten, deren Abstände x_1 von den Seitenwänden bestimmt werden durch die Gleichung:

$$\sin\frac{\pi x_1}{l} = \frac{e^{\frac{\pi(c-h)}{l}} - e^{-\frac{\pi(c-h)}{l}}}{e^{\frac{\pi c}{l}} - e^{-\frac{\pi c}{l}}};$$

da $0 < h < c$, ist immer $0 < x_1 < l$.

Für die oberste der krummen Linien ist $h = 0$; sie berührt nur die Flüssigkeit in der Mitte der Oberfläche:

$$x = \frac{1}{2}l, \qquad s = 0.$$

Mit wachsendem h nähert sich die Curve mehr und mehr der Gefässwand, bis sie für $h = c$ mit derselben zusammenfällt:

$$x = 0, \quad s = c, \quad x = l.$$

Wird die Tiefe des Gefässes c gegen seine Länge l sehr gross, so kann für mässige Tiefen s die Gleichung geschrieben werden:

$$\sin\frac{\pi x}{l} = e^{\frac{\pi(s-h)}{l}}$$

oder

$$s = h + \frac{l}{\pi}\log.\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Die Curven haben demnach alle dieselbe Form und unterscheiden sich nur dadurch, dass ihr tiefster Punkt in verschiedenem Abstand unter der Oberfläche liegt; die beiden Senkrechten $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}l$ sind Asymptoten dieser Linien.

Der Werth der Geschwindigkeit v an der Stelle (x, s) im Innern der Flüssigkeit zur Zeit t ist, abgesehen vom Vorzeichen:

$$v = K\sqrt{\frac{\pi g}{l}}\sin \varkappa t \,.\, e^{-\frac{\pi s}{l}}\left\{\frac{1 - 2\cos\frac{2\pi x}{l}e^{-\frac{2\pi(c-s)}{l}} + e^{-\frac{4\pi(c-s)}{l}}}{1 - e^{-\frac{2\pi c}{l}}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Wir erhalten ferner die Länge s der Oscillation für das betreffende Flüssigkeitstheilchen, wenn wir diesen Ausdruck mit dt multipliciren und in Bezug auf t von 0 bis $T = \frac{\pi}{\varkappa}$ integriren; somit folgt:

$$s = 2Ke^{-\frac{\pi s}{l}}\frac{\left\{1 - 2\cos\frac{2\pi x}{l}e^{-\frac{2\pi(c-s)}{l}} + e^{-\frac{4\pi(c-s)}{l}}\right\}^{\frac{1}{2}}}{1 - e^{-\frac{2\pi c}{l}}}.$$

Für ein sehr tiefes Gefäss aber haben wir die Geschwindigkeit:

$$v = K\sqrt{\frac{\pi g}{l}} \sin \varkappa t \,.\, e^{-\frac{\pi s}{l}},$$

und die Länge der Oscillation:

$$s = 2Ke^{-\frac{\pi s}{l}}.$$

In diesem Falle sind also Geschwindigkeit und Länge der Oscillation gleich für alle Stellen einer Horizontalen; beide nehmen mit wachsender Tiefe sehr rasch ab.

Durch den Einfluss des Bodens werden die Werthe in der Mitte des Gefässes vergrössert; wir erhalten für $x = \frac{1}{2}l$:

$$v = K\sqrt{\frac{\pi g}{l}} \sin \varkappa t\, e^{-\frac{\pi s}{l}} \frac{1 + e^{-\frac{2\pi(c-s)}{l}}}{\left(1 - e^{-\frac{4\pi c}{l}\frac{1}{2}}\right)},$$

$$s = 2Ke^{-\frac{\pi s}{l}} \frac{1 + e^{-\frac{2\pi(c-s)}{l}}}{1 - e^{-\frac{2\pi c}{l}}};$$

beide Werthe wachsen mit abnehmender Tiefe c.

Dagegen werden die Werthe am Rande des Gefässes durch den Einfluss des Bodens verkleinert; für $x = 0$ oder $x = l$ ergeben sich die Werthe:

$$v = K\sqrt{\frac{\pi g}{l}} \sin \varkappa t \,.\, e^{-\frac{\pi s}{l}} \frac{1 - e^{-\frac{2\pi(c-s)}{l}}}{\left(1 - e^{-\frac{4\pi c}{l}\frac{1}{2}}\right)},$$

$$s = 2Ke^{-\frac{\pi s}{l}} \frac{1 - e^{-\frac{2\pi(c-s)}{l}}}{1 - e^{-\frac{2\pi c}{l}}}.$$

Die Geschwindigkeit ist hier immer kleiner, als wenn die Tiefe unendlich gesetzt wird; an der Oberfläche wird sie in dem Verhältniss:

$$\left\{\frac{1 - e^{-\frac{2\pi c}{l}}}{1 + e^{-\frac{2\pi c}{l}}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

verkleinert, und dieses Verhältniss nimmt ab, je mehr wir uns dem Boden nähern, wo die Geschwindigkeit Null wird. Die Länge der Oscillation dagegen ist an der Oberfläche dieselbe, welche Tiefe das Gefäss auch haben mag; je mehr wir uns aber dem Boden nähern, um so mehr wird die Länge s durch den Einfluss des Bodens vermindert, und für $s = c$ verschwindet auch s.

So viel über die einfachen Schwingungen. Ist die ursprüngliche Ordinate der Oberfläche durch mehrere Glieder ausgedrückt, von denen jedes dem Cosinus eines Vielfachen von $\frac{\pi x}{a}$ proportional ist, so finden ebenso viele einfache Schwingungen gleichzeitig statt. Die Bewegung hört dann auf periodisch zu sein; denn die Perioden der einzelnen einfachen Schwingungen stehen mit einander in keinen rationalen Verhältnissen. Doch kann der Fall eintreten, dass die Verhältnisse sich rationalen Werthen nähern; in diesem Falle wird die Bewegung eine Zeit lang nahe periodisch sein.

Zu ganz ähnlichen Resultaten wären wir gelangt, wenn wir, statt ursprünglich eine Abweichung der Oberfläche von der Gleichgewichtsebene anzunehmen, den Flüssigkeitstheilchen durch auf die Oberfläche geführte Stösse Anfangsgeschwindigkeiten ertheilt hätten. Die Bewegung ist auch in diesem Falle aufzufassen als eine Summe einfacher Schwingungen. Der Unterschied besteht darin, dass die Bewegung in dem Moment beginnt, wo die Oberfläche sich in der Gleichgewichtslage befindet, die Flüssigkeitstheilchen dagegen ihre grösten Geschwindigkeiten besitzen.

§ 6.

Bewegungen nach drei Dimensionen.

Wir behandeln noch kurz den Fall, wo in dem prismatischen Gefäss mit horizontalem Boden und verticalen Seitenwänden eine beliebige Bewegung stattfindet. Die Function W muss dann den folgenden Gleichungen genügen:

1) Der Differentialgleichung für $0 < x < a$ und $0 < y < b$:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \gamma^2 W = 0;$$

2) Den Grenzbedingungen:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = a,$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = 0 \quad \text{für} \quad y = 0 \quad \text{und} \quad y = b.$$

Wir suchen zunächst eine Lösung der Differentialgleichung von der Form:

$$W = X\,Y.$$

wo X nur von x, Y nur von y abhangen soll. Durch Einsetzen folgt:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \gamma^2 = 0.$$

Diese Gleichung verlangt, dass die Functionen von x und von y constant seien; folglich:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0,$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \beta^2 Y = 0,$$

wo α und β beliebig sind. Die Gleichung giebt dann:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Weiter folgt aus den Grenzgleichungen, gerade so wie oben, dass

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \qquad X = \cos\frac{m\pi y}{a};$$

$$\beta = \frac{n\pi}{b}, \qquad Y = \cos\frac{n\pi x}{b}.$$

m und n sind positive ganze Zahlen.

Somit erhalten wir in diesem Falle:

$$\varphi = \sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_n \left\{ A_{m,n} \cos . \varkappa_{m,n} t + B_{m,n} \frac{g}{\varkappa_{m,n}} \sin . \varkappa_{m,n} t \right\} Z_{m,n} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b},$$

wo

$$\gamma_{m,n}^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right),$$

$$\varkappa_{m,n}^2 = g\gamma_{m,n} \frac{e^{\gamma_{m,n}c} - e^{-\gamma_{m,n}c}}{e^{\gamma_{m,n}c} + e^{-\gamma_{m,n}c}},$$

$$Z_{m,n} = \frac{e^{\gamma_{m,n}(c-z)} + e^{-\gamma_{m,n}(c-z)}}{e^{\gamma_{m,n}c} + e^{-\gamma_{m,n}c}}.$$

Endlich muss noch den Anfangsbedingungen Genüge geleistet werden:

$$\sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_n A_{m,n} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} = \Phi(x, y),$$

$$\sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_n B_{m,n} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} = F(x, y).$$

In bekannter Weise folgt:

$$A_{0,0} = \frac{1}{ab}\int_0^b\int_0^a \Phi(x, y)\, dx\, dy,$$

$$A_{m,0} = \frac{2}{ab}\int_0^b\int_0^a \Phi(x, y) \cos\frac{m\pi x}{a}\, dx\, dy,$$

$$A_{0,n} = \frac{2}{ab}\int_0^a\int_0^b \Phi(x, y) \cos\frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy,$$

$$A_{m,n} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b \Phi(x, y)\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy;$$

ganz ähnlich werden die Coefficienten $B_{m,n}$ durch die Function $F(x, y)$ bestimmt.

Wir können das constante Glied $A_{0,0}$ fortlassen, und $B_{0,0}$ wird Null, wenn die (x,y)-Ebene mit der Gleichgewichtsfläche zusammenfällt. Die Reihe für φ beginnt dann mit den Gliedern $m = 1$, $n = 0$ und $m = 0$, $n = 1$, welche einfache Schwingungen der früher betrachteten Art darstellen.

Jedes Glied der Reihe stellt auch hier eine einfache Bewegung dar, welche ähnlichen Gesetzen folgt, wie die oben betrachteten einfachen Schwingungen. Wir wollen deren Gesetze nicht weiter ableiten, sondern uns auf die Bemerkung beschränken, dass hier mehrere einfache Bewegungen dieselbe Periode haben können. Dies tritt ein, wenn der Ausdruck:

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}$$

für mehrere Werthensysteme m, n denselben Werth annimmt; a und b werden jedenfalls commensurabel sein müssen.

In dem Falle:

$$a = b$$

geben z. B. die folgenden drei Werthensysteme einfache Bewegungen gleicher Periode:

$$m = 1\ , \quad n = 18;$$
$$m = 6\ , \quad n = 17;$$
$$m = 10, \quad n = 15;$$

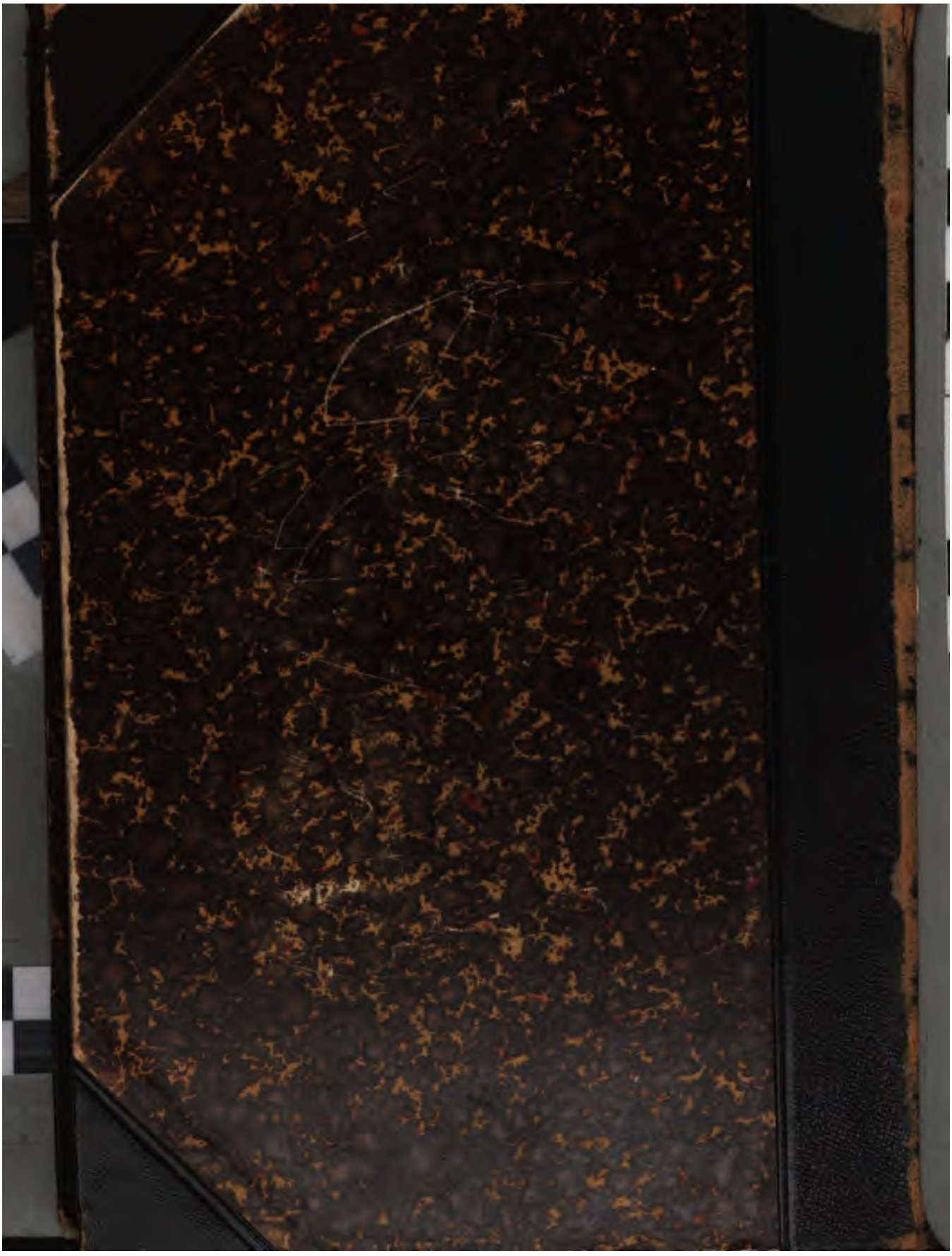
denn für alle ist

$$m^2 + n^2 = 325.$$

In einem letzten Abschnitt hat J. R. Merian noch den Fall behandelt, wo der Boden des Gefässes Kreisform hat. Hiebei handelt es sich um eine Entwicklung nach Cylinderfunctionen. Nachdem deren Theorie und Anwendung in den letzten Jahrzehnten so weit ist entwickelt worden, erscheint eine Wiedergabe von Formeln aus dem Jahre 1828 nicht am Platze. Für einige andere Begrenzungen hat H. Weber in der oben genannten Abhandlung*) den Weg zur Lösung des Problemes angegeben.

*) Math. Ann. I, p. 27 ff.

To avoid fine, this book should be returned on or before the date last stamped below

[redacted]

20M-2-50-53574